Замечание о конформных отображениях областей плоскости Минковского

В.А. Зорич

Аннотация

Мы обсуждаем вопрос о конформном отображении областей плоскости Минковского и приводим общий вид такого отображения. В отличие от областей евклидовой плоскости, собственные подобласти плоскости Минковского оказываются конформно более жёсткими, хотя применительно к полным плоскостям, — всё наоборот. В этой связи мы напоминаем также классическую теорему Лиувилля о конформной жёсткости многомерных областей.

1. Введение.

Известно, что области евклидовых и псевдоевклидовых пространств размерности выше двух конформно жёстки в том смысле, что все их конформные отображения в пределах содержащего их пространства сводятся к отображениям Мёбиуса (сдвиги, подобия, инверсии). Это обнаружил Лиувилль ещё в 1850 году. (Подробности и некоторую библиографию см.,например, в [1].) Вместе с тем классическая теорема Римана (открытая почти тогда же, когда и теорема Лиувилля) показывает, что области двумерной евклидовой плоскости в этом отношении весьма эластичны: любая односвязная область, отличная от всей плоскости, допускает конформное отображение на каноническую область — круг.

Учитывая роль метрики Минковского в математическом аппарате теории относительности, мы обсудим здесь вопрос о конформном отображении областей плоскости Минковского. Это тот единственный случай, которого нет в приведённом выше перечне конформных отображений.

2. Конформное отображение в плоскости Минковского.

Напомним, что отображение $f : (X, g) \to (\tilde{X}, \tilde{g})$ одного риманова или псевдориманова многообразия в другое называется *конформным*, если метрики (метрические тензоры) этих пространств при отображении $\tilde{x} = f(x)$ связаны соотношением $\tilde{g}^2(\tilde{x}) = \lambda^2(x) g^2(x)$, где $\lambda(x)$— зависящее от точки, но не зависящее от направления, изменение масштаба. (В каждой точке это просто "гомотетия" или дилатация касательного пространства с коэффициентом подобия $\lambda(x) \neq 0$.)

Как уже было сказано, мы здесь собираемся рассмотреть только конформные отображения областей двумерной плоскости Минковского. Следуя физическим традициям, точку такой плоскости будем обозначать парой действительных чисел (t, x), а задающую метрику квадратичную форму будем записывать в виде $ds^2 = dt^2 - dx^2$. Индуцируемое ею расстояние $((t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2)^{1/2}$ принято называть *интервалом* между точками (событиями) (t_1, x_1) и (t_2, x_2).

Равноправность инерциальных систем и постоянство в них скорости света, как известно, приводят к специальным преобразованиям координат (преобразованиям Лоренца) при переходе между различными инерциальными системами отсчёта. При этих преобразованиях сохраняется интервал между событиями, наблюдаемыми из разных инерциальных систем координат. На математическом языке это означает, что указанные преобразования являются движениями метрики Минковского. Они, конечно, конформны ($\lambda(x) \equiv 1$).

Теперь обратимся к общему конформному отображению $f : (X^2, ds^2) \to (\tilde{X}^2, d\tilde{s}^2)$ плоскости Минковского или её подобласти.

Направление (или вектор в касательном пространстве) в точке называют *изотропным* (световым), если в этом направлении (на этом векторе) форма, задающая метрику Минковского, обращается в нуль.

Из самого определения конформности отображения следует, что при конформном отображении плоскости Минковского или её подобласти изотропные направления переходят в изотропные.

Поле изотропных направлений имеет интегральные кривые, которыми в рассматриваемом случае стандартных координат (t, x) и метрики $ds^2 = dt^2 - dx^2$, очевидно, являются два семейства прямых, задаваемые равенством $(t - t_0)^2 - (x - x_0)^2 = 0$, где (t_0, x_0) — точка, пробегающая плоскость Минковского или её отображаемую подобласть.

Конформное отображение $f : (X^2, ds^2) \to (\tilde{X}^2, d\tilde{s}^2)$ переводит одно такое семейство прямых, лежащих в плоскости X^2 в другое такое же семейство прямых, лежащих в плоскости $\tilde{X}^2$.

Если в качестве координатных осей взять оси изотропных направлений, и новыми координатами считать $(\tau, \xi) = (t + x, t - x)$ и $(\tilde{\tau}, \tilde{\xi}) = (\tilde{t} + \tilde{x}, \tilde{t} - \tilde{x})$, то рассматриваемое отображение запишется в виде: $(\tau, \xi) \mapsto (\tilde{\tau}, \tilde{\xi}) = (T(\tau), X(\xi))$.

Возвращаясь к исходным координатам, найдём, что $d\tilde{t}^2 - d\tilde{x}^2 = = -T'(\tau)X'(\xi))(dt^2 - dx^2)$, и отображение конформно относительно метрики Минковского.

Мы приходим к следующему заключению.

Теорема. *Пусть* $f : (X^2, ds^2) \to (\tilde{X}^2, d\tilde{s}^2)$ *— конформное отображение плоскости Минковского* X^2 *(или её подобласти) с координатами* (t, x) *и метрикой* $ds^2 = dt^2 - dx^2$ *в другую плоскость Минковского,* $\tilde{X}^2$ *с координатами* $(\tilde{t}, \tilde{x})$ *и метрикой* $d\tilde{s}^2 = d\tilde{t}^2 - d\tilde{x}^2$.

Если в качестве координатных осей взять оси изотропных направлений, и считать новыми координатами $(\tau, \xi) = (t + x, t - x)$ *и* $(\tilde{\tau}, \tilde{\xi}) = (\tilde{t} + \tilde{x}, \tilde{t} - \tilde{x})$*, то отображение* f *запишется в виде:* $(\tau, \xi) \mapsto (\tilde{\tau}, \tilde{\xi}) = (T(\tau), X(\xi))$*, где* $T(\tau)$ *и* $X(\xi))$ *— монотонные функции, каждая из которых зависит только от одной переменной.*

Обратно, каждая такая пара гладких монотонных функций по указанной формуле определяет конформное отображение в области своего действия.

Коэффициент λ^2 соотношения $d\tilde{s}^2 = \lambda^2 ds^2$, определяющего конформность отображения f, как было указано выше, равен $-T'(\tau)X'(\xi)$. Изометрия получается при $\lambda^2 \equiv 1$. Это возможно только если обе функции T и X, а с ними и конформное отображение f, линейны. Заметим, что исходно мы не требовали сохранения ориентации при отображении. Движения метрики Минковского образуют группу Пуанкаре. Преобразования Лоренца составляют связную компоненту единицы этой группы.

3. Комментарий.

Этот текст можно рассматривать как дополнение к статье [1]. Я подучивал кое-что из физики. Как математик я знал и теорему Римана о конформной эластичности областей евклидовой плоскости, и теорему Лиувилля о конформной жёсткости многомерных областей. Но я ничего не знал о конформных отображениях областей плоскости Минковского, и задал себе этот вопрос. К счастью, вопрос оказался простым и мне посильным. Я пришёл к заключению, сформулированному выше, и написал этот небольшой текст. При этом я вполне сознательно ещё раз остановился на самом понятии конформного отображения, чтобы отметить его возможное расширенное толкование, предложенное Громовым, и привести пример открытого вопроса с этим связанного (сформулированного ниже).

Когда текст вместе с библиографией [1]-[3] был готов, я послал файл знакомому математику, который, в отличие от меня, в этих вопросах ориентируется высоко профессионально. Попросил его посмотреть формулировку теоремы и сказать мне одно из двух: я ошибся или я изобрёл велосипед? К счастью, оказалось второе. Мне тут же была дана ссылка на книгу [4] с указанием страницы 35, где есть нужная теорема. Более того, я получил дополнительную ссылку на статью [5], которую можно было бы добавить в литературу статьи [1]. Книга [4] сравнительно свежая (продукт этого тысячелетия), поэтому, чтобы развеять возможные сомнения, мой коллега добавил, что такой факт о конформных отображениях областей плоскости Минковского, скорее всего, был известен ещё классикам (вероятно, и физикам, и математикам). Я очень рад, что читатель при желании сможет уже в первой главе книги [4] найти много полезного о конформных отображениях. Книга посвящена конформной теории поля. Она написана на физическую тему, но с упором на математическую сторону дела и с чётким изложением математических фактов.

Что же касается этого моего общедоступного текста, он больше ориентирован на обсуждение самого понятия конформного отображения.

В курсе комплексного анализа обычно говорят о геометрическом смысле производной голоморфной функции: модуль производной — коэффициент растяжения, а её аргумент — общий угол поворота всех направлений в точке. После этого делается естественное заключение о конформности отображения — оно сохраняет углы!

На самом деле независимость коэффициента растяжения от направления в точке уже влечёт сохранение углов при отображении любых римановых многообразий, поэтому в определение конформности отображения входит именно соотношение $\tilde{g}(\tilde{x}) = \lambda^2(x)g(x)$, связывающее метрические тензоры пространств.

Более того, такое изменение квадратичной формы, задающей метрику, конечно, диктует точно такое же изменение индуцированного метрикой скалярного произведения векторов. Но тогда отношение квадрата скалярного произведения векторов касательного пространства в точке к произведению скалярных квадратов этих векторов не меняется при конформных заменах метрики. Это и трактуется как сохранение углов.

Всё это в равной степени относится к конформным отображениям пространства с индефинитной метрикой, например, четырёхмерного пространства специальной теории относительности с метрикой Минковского. Но тут возникают новые явления. Например, появляются векторы изотропных направлений, — ненулевые векторы, которые ортогональны сами себе. Теория относительности демонстрирует нам много интересного, неожиданного и непривычного для человека, редко перемещавшегося в пространстве со скоростью, близкой к скорости света. С преобразованиями Галилея большинство знакомо ближе, чем с преобразованиями Лоренца. Но, даже зная формально преобразования Лоренца, полезно понимать физическую сущность описываемых ими явлений, которые порой кажутся парадоксальными. Такое понимание полезно в самом прямом смысле. Вспомним, например, аберрацию света или эффект Допплера [2], или то, что повсеместно теперь используемые навигаторы были бы немыслимы без учёта релятивистских эффектов.

В связи с обсуждением понятия конформного отображения в заключение добавлю следующее. Обобщая понятие конформного (квазиконформного) отображения областей римановых многообразий одинаковой размерности, Громов предложил считать конформным (квазиконформным) такое отображение метрических пространств, например, отображение $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \quad (m \geq n)$, при котором в каждой точке отображаемой области бесконечно малый шар преобразуется в образе в бесконечно малый шар (соответственно, в эллипсоид ограниченного общей константой экцентриситета) [3]. В связи с таким расширением понятий конформности и квазиконформности отображения Громов естественно ставит вопрос о том, какие факты классической теории распространяются и на эти отображения. В частности, верно ли, что если отображение $F : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ конформно и ограничено, то при $n \geq 2$ оно постоянно? Заметим, что в смысле Громова, например, голоморфная функция n переменных $w = f(z_1, ..., z_n)$ осуществляет конформное отображение своей области определения $D \subset \mathbb{C}^n$ в $\mathbb{C}$. Для таких отображений (голоморфных функций) теорема Лиувилля о константе, конечно, справедлива.

Благодарность. Я весьма признателен С.Ю.Немировскому за консультацию и за указание на приведённые в списке литературы источники [4] и [5].

Цитированная литература

[**1**] В.А.Зорич (V.A.Zorich), Теорема Лиувилля о конформных отображениях областей многомерного евклидова и псевдоевклидова пространства. (Liouville theorem on conformal mappings of domains in multidimensional Euclidean and Pseudoeuclidean spaces.)

Matematički vesnik, Volume 70, issue 2 (2018), 183-188.[1]

[**2**] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, Краткий курс теоретической физики. Книга 1. Механика. Электродинамика. М., Наука, (1969); 142, 227.

[**3**] M. Gromov, `https://www.ihes.fr/~gromov/wp-content/uploads/2018/08/problems-sept2014-copy.pdf`

[**4**] M. Schottenloher, A Mathematical Introduction to Conformal Field Theory. Springer Lecture Notes in Physics 759. August 2008.

DOI: 10.1007/978-3-540-68628-6

[**5**] W. Kühnel, H.-B. Rademacher, Liouville's theorem in conformal geometry. Journal de Mathématiques Pures et Appliquées Volume 88, Issue 3, September 2007, Pages 251-260.

DOI:10.1016/j.matpur.2007.06.005

[1]При написании этой заметки, я просматривал статью [1] и обнаружил небольшой дефект, который, пользуясь случаем, хочу подправить. Чтобы не возникало сомнений в том, что приведённое там доказательство применимо как к евклидову случаю, так и к случаю индефинитной метрики (типа метрики Минковского), пункт b) доказательства надо начать фразой:

В силу конформности f имеем $\langle f_i, f_i\rangle(x) = \lambda^2(x)\langle e_i, e_i\rangle$. Дифференцируя это равенство по e_j, независимо от того, будет ли $\langle e_i, e_i\rangle = 1$ или $\langle e_i, e_i\rangle = -1$, находим, что $\langle f_{ij}, f_i\rangle/\langle f_i, f_i\rangle = \frac{\lambda_j}{\lambda}$. Аналогично получаем $\langle f_{ij}, f_j\rangle/\langle f_j, f_j\rangle = \frac{\lambda_i}{\lambda}$.