И.Х. Сабитов

Конспекты семинаров по курсу математического анализа

Тема: Поверхностные интегралы (задача 4359)

Задача № 4359. Вычислить интеграл

$$F(t) = \iint\limits_{C} f(x,y,z)dS, \tag{1}$$

где S - плоскость $x+y+z=t$, а функция

$$f(x,y,z) = \begin{cases} 1-x^2-y^2-z^2, & \text{если } x^2+y^2+z^2 \leq 1; \\ 0, & \text{если } x^2+y^2+z^2 > 1. \end{cases}$$

По заданию функции $f(x,y,z)$ для интеграла имеют значение только на положения точек плоскости S, которые расположены в пределах единичного шара $B: x^2+y^2+z^2 \leq 1$.

Есть два способа решения задачи. Первый способ - прямое применение правила интегрирования по поверхности с явно заданным уравнением $z = t-x-y$. Пересечение шара B с плоскостью S - это круг, который проектируется на плоскость координат Oxy на область D с границе йв виде эллипса. Напомним, что проекция на некоторую координатную плоскость пространственной кривой, заданной в виде пересечения двух поверхностей $F_1(x,y,z) = 0$ и $F_2(x,y,z) = 0$, имеет уравнение, получаемое исключением из уравнений поверхностей той переменной, которая должна быть нулем на выбранной для проектирования координатной плоскости. У нас поектировние на плоскость $Oxy: z = 0/$ значит, из уравнений $x+y+z-t-0$ и $x^2+y^2+z^2- = 0$ нужно исключить z. Получим уравнение

$$x^2+y^2+(t-x-y)^2 = 1. \tag{2}$$

Это и есть уравнение эллипса, ограничивающего область D, над которой задана поверхность $S: z = t-x-y$. Для нее элемент площади

$$dS = \sqrt{3}dxdy \tag{3}$$

и в итоге вопрос сводится к вычислению обычного двойного интеграла

$$\iint\limits_{D} (1-x^2-y^2-(t-x-y)^2)\sqrt{3}dxdy.$$

Техническая проблема только в нахождении канонического уравнения эллипса (2), чтобы можно было применить стандартную параметризацию эллиптической области обобщенными полярными координатами.

Второе решение более интересное, так как оно использует новые идеи и позволяет поупражняться в понимании и использовании аппарата внешних форм.

Очевидно, что если бы проектирование было на координатную плоскость, параллельную самой плоскости S, то проекция тоже была бы кругом и область интегрирования была бы простой, не требующей нахождения осей симметрии эллипса и значений его большой и малой полуосей. Поэтому введем новую систему координат ξ, η, ζ. Выберем сначала ось $O\zeta$ по нормали к плоскости S, т.е. по вектору $\mathbf{n} = \{1,1,1\}$. Теперь надо выбрать направления осей $O\xi$ и $O\eta$. Здесь можно применить такой метод. Возьмем любой вектор $\mathbf{l} = \{a,b,c\}$, ортогональный к $\mathbf{n}$, и составим векторное произведение $\mathbf{l}\times\mathbf{n}$, например, возьмем $\mathbf{l}_1 = \{-1,1,0\}$.

Получим третий вектор $\mathbf{m}$, ортогональный к обоим векторам $\mathbf{n}$ и $\mathbf{l}$, $\mathbf{n}$={-1,-1,2}. Затем сделаем эти векторы единичными. Оставим в нашем случае за ними те же обозначения и получим

$$\mathbf{l} = \frac{1}{\sqrt{2}}\{-1,-1,0\},\ \mathbf{m} = \frac{1}{\sqrt{6}}\{-1,-1,2\},\ \mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}\{1,1,1\}.$$

Переход от стандартного базиса $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ к базису $\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{n}$ дается ортогональной матрицей M

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix},$$

а координаты преобразуются следующим образом

$$(\xi,\eta,\zeta)^T = M(x,y,z)^T,$$

т.е. имеем

$$\xi = -\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y \tag{4}$$

$$\eta = -\frac{1}{\sqrt{6}}x - \frac{1}{\sqrt{6}}y + \frac{2}{\sqrt{6}}z \tag{5}$$

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}y + \frac{1}{\sqrt{3}}z \tag{6}$$

В частности, плоскость S с уравнением $x+y+z = t$ переходит в плоскость Σ с уравнением $\zeta = \dfrac{t}{\sqrt{3}}$, а функция f принимает вид $f(\xi,\eta,\zeta) = 1-\xi^2-\eta^2-\zeta^2$, так как расстояния при ортогональных преобразованиях не изменяются. так же как не изменяются и площади. Единичный шар B переходит тоже в единичный шар B_1, а его круговое сечение горизонтальной плоскостью $\zeta = \dfrac{t}{\sqrt{3}}$ проектируется на плоскость $O\xi\eta$ в круг Δ радиуса $R = \sqrt{\dfrac{3-t^2}{3}}$ с центром в начале координат. Тогда рассматриваемый интеграл принимает вид

$$\iint\limits_{\Delta} (1 - \frac{t^2}{3} - \rho^2) d\xi d\eta,$$

где $\rho^2 = \xi^2 + \eta^2$, а интегрирование происходит в круге радиуса R. Этот интеграл считается легко и получаем ответ $\frac{\pi(3-t^2)^2}{18}$.

Но важное в этом вычислении заключается в возможности проверке того, как происходит замена элемента площади $dxdy$ эллипса D на элемент площади $d\xi d\eta$ круга Δ. Простая замена элемента площади dSS5 на элемент площади $dS*$ плоскости Σ равенством $dS = dS*$ понятна в силу изометричности перехода из пространства (x,y,z) в пространство $(\xi,\eta,\zeta$, так как плоскость Σ является образом плоскости S, но плоскость $\zeta = 0$ не является образом плоскости $z = 0$. На каждый из интегралов

$$\iint\limits_{D} f(x,y,z))dxdy$$

и

$$\iint\limits_{\Delta} f(\xi,\eta,\zeta))d\xi d\eta$$

смотрим как на интегралы $\int\int_D f(x,y,z))dx \wedge dy$ и $\int\int_\Delta f(\xi,\eta,\zeta)d\xi \wedge d\eta$ от соответствующих дифференциальных форм. Теперь вспоминаем связи (4)-(6)т между переменными и находим

$$d\xi = -\frac{1}{\sqrt{2}}dx + \frac{1}{\sqrt{2}}dy,\ d\eta = -\frac{1}{\sqrt{6}}dx - \frac{1}{\sqrt{6}}dy + \frac{2}{\sqrt{6}}dz,$$

а дифференциал dz на плоскости S равен $-dx - dy$. Производя нужные действия во внешнем умножении $d\xi \wedge d\eta$, получаем

$$d\xi \wedge d\eta = \frac{1}{\sqrt{12}}(-dx + dy) \wedge (-dx - dy - 2dx - 2dy) =$$
$$\frac{1}{2\sqrt{3}}(3dx \wedge dx + 3dx \wedge dy - 3dy \wedge dx - 3dy \wedge dy) = \sqrt{3}dx \wedge dy,$$

и это равенство как раз и подтверждает, что оно пришло из того, что $dS = \sqrt{3}dxdy$ равно $dS* = d\xi d\eta$.