И.Х. Сабитов

Конспекты семинаров по курсу математического анализа

Тема: Интеграл Гаусса (задача 4329)

(Рисунок студента Константина Гордеева)

Задача № 4329. Вычислить интеграл

$$U(x_0,y_0)=\oint_C \frac{\cos(\hat{\mathbf{r},\mathbf{n}})}{r}ds, \tag{1}$$

где $r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$ – длина вектора $\mathbf{r}$, соединяющего постоянную точку $M_0(x_0,y_0)$ с переменной точкой $M(x,y)$ простого (т.е., без самопересечений) гладкого контура C, а $(\hat{\mathbf{r},\mathbf{n}})$ – угол между вектором $\mathbf{r}$ и внешней нормалью $\mathbf{n}$ к кривой C в точке M.

Первый способ решения основан на сведении интеграла 1-рода (1) к интегралу 2-го рода с применением впоследствии формулы Грина. Пусть

$$x=x(s),\ y=y(s)$$

– натуральное уравнение кривой C. Пусть $\mathbf{t}=\{x'(s),y'(s)\}$ – единичный касательный вектор к C в направлении положительного обхода, тогда единичный вектор внешней нормали имеет вид $\mathbf{n}=\{y'(s),-x'(s)\}$ (проверьте, что пара $(\mathbf{n},\mathbf{t})$ имеет ту же ориентацию, что и стандартный базис $(\mathbf{i},\mathbf{j})$). Имеем, что $\cos(\hat{\mathbf{r},\mathbf{n}})=\dfrac{(x-x_0)y'(s)-(y-y_0)x'(s)}{r}$, значит,

$$U(x_0,y_0)=\oint_C \frac{(x-x_0)dy-(y-y_0)dx}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}.$$

Запишем кратко этот интеграл в виде криволинейного интеграла 2-го рода

$$U(x_0,y_0)=\oint_{C^+} Pdx+Qdy \tag{2}$$

с очевидными обозначениями $P(x,y)=-\dfrac{y-y_0}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2},\ Q(x,y)=\dfrac{x-x_0}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$ по положительно ориентированной кривой C^+.

Очевидно, что функции P и Q продолжимы с кривой в том же виде на все точки (x,y) плоскости, кроме точки M_0. Легко проверяем, что вне точки M_0 выполнено равенство $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$. Пусть точка M_0 находится внутри области, ограниченной кривой C. Окружим точку M_0 окружностью C_ε достаточно малого радиуса ε с центром в этой же точке и обозначим через D_ε двусвязную область, ограниченную кривыми C и C_ε. Применяя к области D_ε формулу Грина, получаем, что

$$\oint_{\partial D_\varepsilon} Pdx+Qdy=0=\oint_{C^+} Pdx+Qdy\ +\oint_{C_\varepsilon^-} Pdx+Qdy.$$

Интеграл (1) для любой окружности с центром в точке M_0 вычисляется непосредственно ее параметризацией в полярных координатах с полюсом в центре окружности, и получаем, что $\oint_{C_\varepsilon^-} Pdx+Qdy=-2\pi$. Значит, интеграл Гаусса (1) в случае, когда точка M_0 находится внутри области, ограниченной кривой C, равен 2π.

Второй способ основан на использовании геометрического смысла интеграла. Для его выяснения полезно напомнить взаимоотношения между главными частями различных бесконечно малых характеристик гладкой кривой. Пусть на кривой с радиус-вектором $\mathbf{r}(t)=\{x(t),y(t)\}$ выделена дуга между ее точками $M(t_0)$ и $M_1(t_0+\Delta t)$. Тогда появляются следующие величины: 1) Δs - длина этой дуги, которая при $\Delta \to 0$ эквивалентна дифференциалу дуги ds; 2) длина хорды Δl между точками M и M_1, которую можно считать равной $|\Delta\mathbf{r}| = |\mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t)|$; 3) длина отрезка ΔT касательной к кривой в точке $M(t_0)$, отсекаемого радиус-векторами $\mathbf{r}(t)$ и $\mathbf{r}(t+\Delta t)$. Полезное замечание: **доказать, что все эти величины являются при $\Delta \to 0$ эквивалентными бесконечно малыми.** Отметим, что выбор длины отрезка касательной ΔT не является однозначным, как выбор длин Δs и Δl, но он обеспечивает эквивалентность всех трех величин как бесконечно малых; наш выбор подогнан под его применение в дальнейших рассуждениях.

Имея в виду использовать это замечание, проведем следующие построения: 1) от точки $M \in C$ отложим на кривой C малую дугу длины Δs с концевой точкой $M_1 \in C$; 2) проведем окружность Γ с центром в M_0 и радиуса r и касательную T к этой окружности в точке M: 3) проведем прямую M_0M_1 и отметим на ней точки ее пересечения M_2, M_3 и M_4 соответственно с касательной к кривой C, с окружностью Γ и касательной к ней T (см. рисунок). Обозначим длину отрезка касательной MM_2 к C и длину отрезка MM_4 касательной к окружности соответственно через ΔL и ΔT, а длину дуги MM_4 окружности - через $d\sigma$. Касательная к окружности ортогональна к вектору $\mathbf{r}$, касательная к кривой ортогональна к ее нормали, поэтому угол между ними равен углу $\psi = \widehat{\mathbf{r},\mathbf{n}}$. Обозначим малый угол между радиус-векторами $\mathbf{r}(t)$ и $\mathbf{r}(t+\Delta t)$ через $\Delta\varphi$. Тогда в прямоугольном треугольнике M_0MM_4 мы знаем катет $MM_4 = \Delta T$ и углы $\angle MM_0M_4 = \Delta\varphi, \angle M_2MM_4 = \psi$ и $\angle MM_4M_2 = 90^o - \Delta\varphi$. Из этих данных по теореме синусов находим, что $\dfrac{\Delta T}{\Delta L} = \dfrac{\cos(\psi - \Delta\phi)}{\cos\Delta\phi}$, а далее с использованием эквивалентностей $\Delta T \sim d\sigma, \Delta L \sim ds$ при $\Delta\varphi \to 0$ приходим к соотношению

$$\frac{\cos(\widehat{\mathbf{r},\mathbf{n}})}{r} ds = d\varphi.$$

Видим, что подынтегральное выражение в интеграле Гаусса есть не что иное, как дифференциал угла видимости дуги MM_1 кривой C из точки M_0, поэтому сам интеграл дает значение полного угла видимости, т.е. он равен 2π, если точка M_0 находится внутри кривой, и 0, если точка находится вне кривой.

Заметим, что из геометрического смысла подынтегрального выражения следует, что интеграл Гаусса в случае незамкнутой кривой дает алгебраическое значение угла видимости кривой из данной точки M_0. Важность этого интеграла в теоретических и прикладных вопросах геометрии и топологии очевидна.

Задания. 1) Мы нашли значение интеграла Гаусса в случае расположения точки M_0 вне кривой использованием его геометрического смысла. Как получить тот же результат с использованием первого "чисто" аналитического метода?

2) Исследовать вопрос о значении интеграла Гаусса, если точка M_0 расположена на самой кривой.