И.Х. Сабитов

Конспекты семинаров по курсу математического анализа

Тема: Обобщение задачи № 4181.

(Рисунки студента Константина Гордеева)

Напишем условие задачи № 4181 из задачника Демидовича в следующем виде

Исследовать сходимость несобственного интеграла

$$I = \int\int \frac{dxdy}{r^p}$$

в области D, ограниченной окружностью $C : x^2 + y^2 = R^2$ и кривыми $y = 0,\ 0 \le x \le R$, и $\Gamma : y = x^q,\ x > 0$, в зависимости от значений параметров $p > 0$ $q > 0$ (через r как обычно обозначен $\sqrt{x^2+y^2}$).

Смысл в обобщении задачи (в оригинале $p = q = 2$) состоит в следующем: показать. что сходимость многократного несобственного интеграла зависит как от скорости возрастания подынтегральной функции (у нас она определяется значением p - чем больше p, тем быстрее возрастание функции) и величиной площади области D, по которой происходит интегрирование (у нас она определяется значением q - чем больше q, тем площадь меньше).

Решение. При $p < 2$ интеграл сходится во всем круге, значит, тогда сходимость есть при любом $q > 0$. Рассмотрим поэтому задачу при $p \ge 2$. Пусть $p = 2$ и пусть $q = 1$. Тогда при переходе к полярным координатам интеграл примет вид

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^R \frac{dr}{r}$$

и расходимость его очевидна (советуем нарисовать картинки в декартовых и полярных координатах с отсечением начала координат). Значит, расходимость есть и при всех $q < 1$ (почему?).

Напомним, что сходимость или расходимость интеграла можно установить двумя способами: или исследованием поведения интеграла в окрестности особой точки (этому соответствуют понятия "хвост" или "остаток" в несобственных интегралах на прямой), или изучается поведение интеграла с удаленной окрестностью особой точки (такой подход соответствует использованию определения несобственного интеграла через исчерпание области).

Пусть $p \ge 2$ и $q > 1$. Отсечем особую точку окружностью радиуса $\varepsilon > 0$ и перейдем к полярным координатам. В полярных координатах отсеченной области D_ε полярных координатах соответствует область Ω_ε, заключенная между линиями $\varphi = 0,\ 0 \le r \le \varepsilon,\ r(\varphi) \le r \le \varepsilon$ (над отрезком $0 \le \varphi \le \varphi(\varepsilon)$, где $\varphi(\varepsilon)$ – значение полярного угла в точке пересечения кривой $\Gamma : y = x^q$ с окружностью $r = \varepsilon$. Вычисление интеграла по области Ω_ε в полярных координатах можно произвести по двум вариантам

$$\int\!\!\int_{D_\varepsilon} \frac{dxdy}{r^p} = \int\!\!\int_{\Omega_\varepsilon} \frac{d\varphi dr}{r^{p-1}} = \int_0^{\varphi(\epsilon)} d\varphi \int_{r(\varphi)}^{\varepsilon} \frac{dr}{r^{p-1}} = \int_0^{\varepsilon} \frac{dr}{r^{p-1}} \int_0^{\varphi(r)} d\varphi,$$

где $\varphi(\varepsilon)$ и $r(\varphi)$ определяются из равенств

$$\sin\varphi = \varepsilon^{q-1}\cos^q\varphi,\ \varphi(\varepsilon) \sim \varepsilon^{q-1},\ \varepsilon \to 0,$$

а

$$r(\varphi) = (\frac{\sin\varphi}{\cos^q\varphi})^{\frac{1}{q-1}} \sim \varphi^{\frac{1}{q-1}},\ \varphi \to 0$$

(соответствующие картинки можно видеть на рис. 1 и 2). Рассматривая отдельно случаи $p = 2$ и $p > 2$ с использованием любого из повторных интегралов можно установить, что исходный интеграл сходится при выполнении условия $p - q < 1$ и расходится при $p - q \geq 1$. Значит, качественно подтверждается высказанное в начале утверждение: если функция растет быстро (т.е. растет p), тогда для сходимости необходимо, чтобы площадь области интегрирования уменьшалась быстро (достаточно, чтобы было $q > p - 1$).

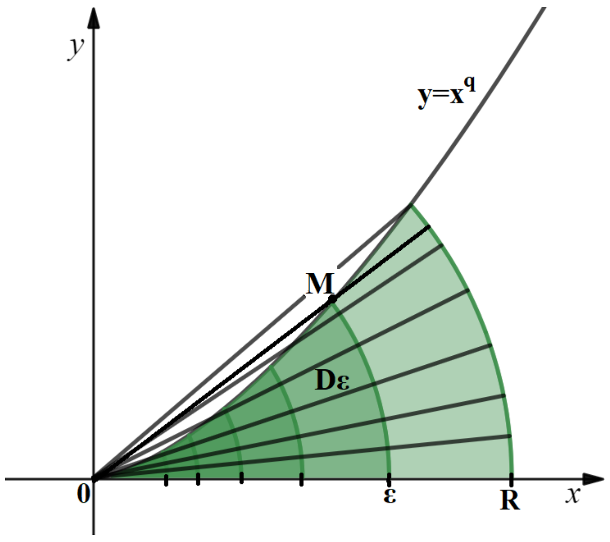

Рис. 1

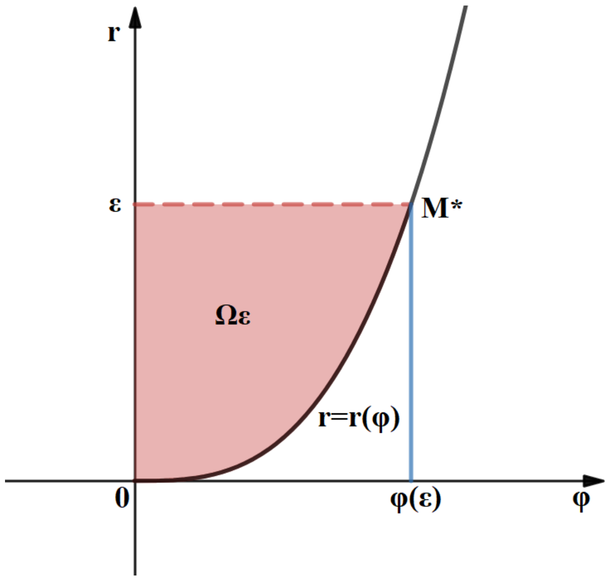

Рис. 2