МНОГОМЕРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА И ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Лекция 17 (10.04.20)
Метрические и нормированные пространства. Пространство $\mathbb{R}^n$

Метрическое пространство

Определение 1. Метрическим пространством называется пара (M, ρ), где M — множество, а ρ — **метрика** или **расстояние**, функция из $M \times M$ в $\mathbb{R}$ (т.е. функция пары точек из M со значениями в множестве действительных чисел) со следующими свойствами:

1)$\forall x, y \in M: \quad \rho(x, y) \geqslant 0$ и $\rho(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$;

2) $\forall x, y \in M: \quad \rho(x, y) = \rho(y, x)$ — симметричность;

3) $\forall x, y, z \in M: \quad \rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z)$ — неравенство треугольника.

Примеры. 1) M — любое множество, $\rho(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = y, \\ 1, & \text{если } x \neq y, \end{cases}$ — тривиальная метрика;

2) $M = \mathbb{R}$, $\rho(x, y) = |x - y|$;

3) $M = \mathbb{R}^2$, $\rho((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$;

4) $M = \mathbb{R}^2$, $\rho((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$.

В дальнейшем в соответствии с традицией часто будем называть метрическим пространством само множество M, подразумевая при этом наличие связанной с M метрики ρ.

Отметим такой очевидный факт: подмножество метрического пространства — метрическое пространство с той же метрикой (т.е. если (M, ρ) — метрическое пространство, $M' \subset M$, то (M', ρ) также метрическое пространство).

В дальнейшем нам понадобится лемма.

Лемма (обобщение неравенства треугольника). *Для любых точек x_k, $k = 1, \ldots, n$, метрического пространства*

$$\rho(x_1, x_n) \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \rho\left(x_k, x_{k+1}\right).$$

▼ Для $n = 1$ имеем верное неравенство $0 \leqslant 0$, для $n = 2$ также имеем верное неравенство $\rho\left(x_1, x_2\right) \leqslant \rho\left(x_1, x_2\right)$, для $n = 3$ имеем верное неравенство треугольника $\rho\left(x_1, x_3\right) \leqslant \rho\left(x_1, x_2\right) + \rho\left(x_2, x_3\right)$. Теперь проведем индукцию по n. Предположим, что неравенство верно для $n = m \geqslant 3$ и докажем, что оно верно для $n = m + 1$. В самом деле, $\rho\left(x_1, x_n\right) \leqslant \rho\left(x_1, x_m\right) + \rho\left(x_m, x_{m+1}\right) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{m-1} \rho\left(x_k, x_{k+1}\right) + \rho\left(x_m, x_{m+1}\right) = \sum\limits_{k=1}^{m} \rho\left(x_k, x_{k+1}\right)$. ▲

Нормированное пространство

Определение 2. Нормированным пространством называется пара $(N, \|\cdot\|)$, где N — линейное пространство над полем $\mathbb{R}$ действительных или $\mathbb{C}$ комплексных чисел, а $\|\cdot\|$ — **норма** или **длина** вектора, функция из N в $\mathbb{R}$ (т.е. функция точки из N со значениями в множестве действительных чисел) со следующими свойствами:

1)$\forall x, \in N: \ \|x\| \geqslant 0$ и $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$;

2) $\forall x \in N$ $\forall \alpha$ из $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ (в зависимости от того, над каким полем N является линейным пространством): $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$;

3) $\forall x, y \in N : \|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ — неравенство треугольника.

Утверждение. *Всякое нормированное пространство является метрическим пространством с метрикой* $\rho(x, y) = \|x - y\|$.

▼ Действительно, свойство 1) метрики сразу следует из свойства 1) нормы. Из свойства 2) нормы следует выполнение свойства 2) метрики: $\rho(x, y) = \|x - y\| = \|-1 \cdot (y - x)\| = |-1| \cdot \|y - x\| = \|y - x\| = \rho(y, x)$. Из свойства 3) нормы следует выполнение свойства 3) метрики: $\rho(x, z) = \|x - z\| = \|(x - y) + (y - z)\| \leqslant \|x - y\| + \|y - z\| = \rho(x, y) + \rho(y, z)$. ▲

Пространство $\mathbb{R}^n$

Определение 1. Пространство $\mathbb{R}^n$ — множество упорядоченных наборов из n действительных чисел $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, \ldots, n$. Его можно рассматривать как векторное пространство над полем действительных чисел $\mathbb{R}$ с определенными следующим образом операциями сложения векторов и умножения вектора на число: для любых $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$

$$\vec{x} + \vec{y} = (x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n),$$

для любого $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, для любого $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\alpha \cdot \vec{x} = \alpha(x_1, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n).$$

В этом пространстве вектора

$$\vec{e}_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0),\ \vec{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0),\ \ldots,\ \vec{e}_n = (0, \ldots, 0, 1)$$

образуют стандартный базис, а числа $x_1, \ldots, x_n$ называют **координатами** вектора $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$.

Теперь докажем одно полезное неравенство.

Теорема 1 (неравенство Коши–Буняковского). *Для любых действительных чисел* a_k *и* b_k, $k = 1, \ldots, n$, *справедливо неравенство*

$$\left| \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \right| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2},$$

причем равенство возможно лишь в случае, если один из наборов $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_n$ *пропорционален другому (т.е. получается из него умножением всех членов на одно и то же число).*

▼ Это неравенство является частным случаем неравенства Гёльдера из первого семестра. Здесь дадим его независимое доказательство.

Если все a_k равны нулю, то написанное неравенство превращается в равенство, при этом $a_k = 0 \cdot b_k$, $k = 1, \ldots, n$. Если не все a_k равны нулю, то рассмотрим квадратный относительно x трехчлен

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k x - b_k)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right) x^2 - \left(2\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right) x + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right).$$

Очевидно, он не имеет двух различных корней (ведь квадратный трехчлен неотрицателен), а единственный корень x_0 существует лишь в случае, если $a_k x_0 - b_k = 0$, $k = 1, \ldots, n$, что означает пропорциональность чисел b_k числам a_k. Значит, дискриминант уравнения

$$D = 4\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 - 4\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) \leqslant 0,$$

причем равенство имеет место лишь в случае пропорциональности чисел b_k числам a_k. Но последнее — лишь несколько иначе написанное утверждение теоремы, которая тем самым доказана. ▼

Теорема 2. *Пространство $\mathbb{R}^n$ — нормированное пространство с нормой*

$$\|\vec{x}\| = \|(x_1, \ldots, x_n)\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}.$$

▼ Очевидно выполнение всех свойств нормы, кроме неравенства треугольника. поэтому остается только доказать, что

$$\|\vec{x} + \vec{y}\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k^2} = \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|.$$

Так как обе части неравенства неотрицательны, то возводя их в квадрат получаем эквивалентное неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 + 2\sum_{k=1}^{n} x_k y_k + \sum_{k=1}^{n} y_k^2 \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} x_k^2 + 2\sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k^2} + \sum_{k=1}^{n} y_k^2,$$

которое после уничтожения одинаковых в обеих частях неравенства членов становится неравенством

$$2\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \leqslant 2\sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k^2},$$

которое после сокращения на 2 отличается от доказанного в предыдущей теореме неравенства Коши-Буняковского лишь отсутствием модуля в левой части. Значит, неравенство треугольника выполняется. ▲

Из теоремы следует, что все дальнейшие результаты, относящиеся к метрическим и нормированным пространствам, справедливы и для $\mathbb{R}^n$.

Классификация точек

Вернемся к метрическому пространству (M, ρ).

Определение 2. Открытым шаром радиуса $r > 0$ с центром в точке x называется множество

$$B_r(x) = \{y \in M:\ \rho(x, y) < r\}.$$

Определение 3. Замкнутым шаром радиуса $r \geqslant 0$ с центром в точке x называется множество

$$\overline{B}_r(x) = \{y \in M:\ \rho(x, y) \leqslant r\}.$$

Определение 4. Под **ε-окрестностью** (иногда в дальнейшем называемой просто **окрестностью**) точки $x \in M$, где $\varepsilon > 0$, понимается открытый шар $B_r(x)$.

Определение 5. Под **проколотой ε-окрестностью** точки $x \in M$, где $\varepsilon > 0$, понимается множество $B'_\varepsilon(x) = B_\varepsilon(x) \setminus \{x\} = \{y \in M:\ 0 < \rho(x, y) < r\}$.

Определение 6. Точка x метрического пространства M называется **внутренней** точкой множества $E \subset M$, если существует $B_\varepsilon(x) \subset E$.

Определение 7. Точка x метрического пространства M называется **внешней** точкой множества $E \subset M$, если существует $B_\varepsilon(x) \subset M \setminus E$ — дополнению множества E.

Определение 8. Точка x метрического пространства M называется **граничной** точкой множества $E \subset M$, если для любой ε-окрестности x $B_\varepsilon(x) \cap E \neq \varnothing$ и $B_\varepsilon(x) \cap (M \setminus E) \neq \varnothing$.

По отношению к множеству E метрического пространства любая точка является точкой одного вида из этих трех.

Определение 9. Внутренностью множества E метрического пространства называется множество внутренних точек E.

Определение 10. Внешностью множества E метрического пространства называется множество внешних точек E.

Определение 11. Границей множества E метрического пространства называется множество граничных точек E.

Открытые и замкнутые множества

Определение 12. Множество E метрического пространства называется **открытым**, если оно совпадает со своей внутренностью (т.е., если все его точки внутренние).

Определение 13. Множество E метрического пространства называется **замкнутым**, если $M \setminus E$ открытое множество.

Множества $\varnothing$ и M открыты и замкнуты одновременно. Другие множества из M могут быть открытыми, могут быть замкнутыми (в том числе одновременно и открытыми и замкнутыми), могут быть и не открытыми и не замкнутымы.

Теорема 3. *Открытый шар — открытое множество, замкнутый шар — замкнутое множество.*

▼ Пусть $y \in B_r(x)$, т.е. $\rho(x, y) < r$. Найдем такое $\varepsilon > 0$, что $\rho(x, y) + \varepsilon < r$ (можно взять $\varepsilon = \frac{1}{2}(r - \rho(x, y))$). Покажем, что $B_\varepsilon(y) \subset B_r(x)$ и, значит, все точки $B_r(x)$ внутренние. Если $z \in B_\varepsilon(y)$, то по неравенству треугольника $\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z) < \rho(x, y) + \varepsilon < r$ и, значит, $z \in B_r(x)$, следовательно, $B_\varepsilon(y) \subset B_r(x)$. Доказано, что открытый шар — открытое множество.

Пусть $y \in M$ и $y \notin \overline{B}_r(x)$, т.е. $\rho(x,y) > r$. Найдем такое $\varepsilon > 0$, что $\rho(x,y) - \varepsilon > r$ (можно взять $\varepsilon = \frac{1}{2}(\rho(x,y) - r)$). Покажем, что $B_\varepsilon(y) \cap \overline{B}_r(x) = \varnothing$ и, значит, все точки $M \setminus \overline{B}_r(x)$ внутренние. Если $z \in B_\varepsilon(y)$, то по неравенству треугольника $\rho(x,z) \geqslant \rho(x,y) - \rho(y,z) > \rho(x,y) - \varepsilon > r$ и, значит, $z \notin \overline{B}_r(x)$, следовательно, $B_\varepsilon(y) \cap \overline{B}_r(x) = \varnothing$. Доказано, что $M \setminus E$ — открытое множество, т.е., что замкнутый шар — замкнутое множество. ▲

Лекция 18 (14.04.20)
Открытые и замкнутые множества.
Компакты в метрических пространствах

Открытые и замкнутые множества

Теорема 1. *Любые объединения и конечные пересечения открытых множеств — открытые множества. Любые пересечения и конечные объединения замкнутых множеств — замкнутые множества.*

▼ Сначала докажем, что любое объединение открытых множеств является открытым множеством. Пусть G_λ, $\lambda \in \Lambda$, — открытые множества. Проверим, что $\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$ — открытое множество, т.е., что любая точка $x \in \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$ — внутренняя точка $\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$. Действительно, если $x \in \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$, то существует такое $\lambda' \in \Lambda$, что $x \in G_{\lambda'}$. Так как $G_{\lambda'}$ — открытое множество, то существует $B_\varepsilon(x) \subset G_{\lambda'} \subset \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$ и, значит, x — внутренняя точка $\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$.

Теперь докажем, что конечное пересечение открытых множеств является открытым множеством. Пусть $G_1, \ldots, G_n$ — открытые множества. Проверим, что их пересечение $\bigcap\limits_{k=1}^{n} G_k$ — открытое множество, т.е., что любая точка $x \in \bigcap\limits_{k=1}^{n} G_k$ — внутренняя точка $\bigcap\limits_{k=1}^{n} G_k$. Действительно, если $x \in \bigcap\limits_{k=1}^{n} G_k$, то $x \in G_k$, $k = 1, \ldots, n$. Так как G_k, $k = 1, \ldots, n$, — открытые множества, то существуют $B_{\varepsilon_k}(x) \subset G_k$, $k = 1, \ldots, n$. Возьмем $\varepsilon = \min\limits_{1\leqslant k\leqslant n} \varepsilon_k$, тогда $B_\varepsilon(x) \subset B_{\varepsilon_k}(x) \subset G_k$ для $k = 1, \ldots, n$ и, следовательно, $B_\varepsilon(x) \subset \bigcap\limits_{k=1}^{n} G_k$, т.е. x — внутренняя точка $\bigcap\limits_{k=1}^{n} G_k$.

Теперь покажем, что любое пересечение замкнутых множеств является замкнутым множеством. Пусть F_λ, $\lambda \in \Lambda$, — замкнутые множества. Тогда $M \setminus F_\lambda$ открытые множества и по законам Моргана и уже доказанной части теоремы $M \setminus \bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda = \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} (M \setminus F_\lambda)$ — открытое множество, а значит, $\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda$ — замкнутое множество.

Покажем, что конечное объединение замкнутых множеств является замкнутым множетсвом. Пусть $F_1, \ldots, F_n$ — замкнутые множества. Тогда $M \setminus F_k$ открытые множества и по законам Моргана и уже доказанной части теоремы $M \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{n} F_k = \bigcap\limits_{k=1}^{n} (M \setminus F_k)$ — открытое множество, а значит, $\bigcup\limits_{k=1}^{n} F_k$ — замкнутое множество. ▲

В предыдущей лекции нами было введено понятие ε-окрестности. В дальнейшем будем под окрестностью точки всегда понимать некоторую ε-окрестность точки (хотя часто окрестностью точки называют любое содержащее эту точку открытое множество).

Определение 1. Точка x называется **предельной точкой** множества E метрического пространства, если в любой ее проколотой ε-окрестности $B'_\varepsilon(x)$ найдется точка множества E (т.е. $B'_\varepsilon(x) \cap E \neq \varnothing$).

Теорема 2. *Точка x является предельной точкой множества E метрического пространства тогда и только тогда, когда в любой ее ε-окрестности $B_\varepsilon(x)$ содержится бесконечно много точек множества E (т.е. $B_\varepsilon(x) \cap E$ — бесконечное множество).*

▼ Если в любой ε-окрестности x $B_\varepsilon(x)$ бесконечно много точек E, то они есть и в проколотой ε-окрестности $B'_\varepsilon(x)$ и, значит, x — предельная точка E.

Если найдется ε-окрестность точки x $B_\varepsilon(x)$ в которой содержится только конечное множество точек E, то в случае, если отличных от x точек множества E в $B_\varepsilon(x)$ нет, то $B'_\varepsilon(x) \cap E = \varnothing$ и, значит, x не является предельной точкой E, а если отличные от x точки множества E в $B_\varepsilon(x)$ есть, то возьмем в качестве $\delta > 0$ расстояние до точки x от ближайшей из них к x. Тогда в проколотой δ-окрестности точки x $B'_\delta(x)$ не будет точек E и, значит, x не является предельной точкой E и в этом случае. ▲

Определение 2. Точка x называется точкой **прикосновения** множества E метрического пространства, если в любой ее ε-окрестности $B_\varepsilon(x)$ найдется точка множества E (т.е. $B_\varepsilon(x) \cap E \neq \varnothing$).

Определение 3. Точка x называется **изолированной** точкой множества E метрического пространства, если существует такая ε-окрестность x $B_\varepsilon(x)$, пересечение которой с множеством E содержит одну точку x (т.е. $B_\varepsilon(x) \cap E = \{x\}$).

Всякая точка прикосновения внутренняя или граничная, а также предельная или изолированная.

Теорема 3. *Следующие утверждения эквивалентны:*

1) множество E замкнуто;

2) множество E содержит все свои граничные точки;

3) множество E содержит все свои точки прикосновения;

4) множество E содержит все свои предельные точки.

▼ Проведем его по схеме: 1)⇒2)⇒3)⇒4)⇒1).

Сначала покажем, что из 1) следует 2).

Если E замкнуто, то его дополнение $M \setminus E$ открыто и, значит, все точки $M \setminus E$ внутренние точки $M \setminus E$ и внешние точки E. Если $M \setminus E$ — внешность E, то E содержит все свои граничные точки.

Теперь докажем, что из 2) следует 3).

Действительно, любая точка прикосновения E — внутренняя или граничная точка E. Все внутренние точки E принадлежат E. Если E содержит все свои граничные точки, то E содержит все свои точки прикосновения.

Теперь покажем, что из 3) следует 4).

Так как любая предельная точка E является точкой прикосновения E, то если E содержит все свои точки прикосновения, то E содержит все свои предельные точки.

И, наконец, докажем, что из 4) следует 1).

Пусть $x \in M \setminus E$, значит, x не является предельной точкой E. Тогда существует такая $B'_\varepsilon(x)$, что $B'_\varepsilon(x) \cap E = \varnothing$, а значит, и $B_\varepsilon(x) \cap E = \varnothing$, т.е. $B_\varepsilon(x) \subset M \setminus E$. Итак, $M \setminus E$ — открытое множество, а E — замкнутое множество. ▲

Определение и простейшие свойства компактов

Напомним, что система множеств $\{U_\lambda\}$ образует покрытие множества E, если $\bigcup\limits_\lambda U_\lambda \supset E$.

В случае, когда все множества системы открытые, покрытие называют открытым.

Определение 4. Множество K метрического пространства называется **компактом** (или **компактным множеством**), если из любой покрывающей его системы открытых множеств можно выделить также покрывающую K конечную подсистему множеств (из любого открытого покрытия K можно выделить конечное подпокрытие).

Определение 5. Множество E метрического пространства называется **ограниченным**, если оно заключается (включается) в некоторый шар.

Теорема 4. *Любой компакт — ограниченное и замкнутое множество.*

▼ Первое следует из того, что взяв любую точку x метрического пространства M из покрытия компакта K (а фактически, всего M) открытыми множествами $\{B_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ можно выделить конечное подпокрытие K, а т.к. $B_1(x) \subset B_2(x) \subset B_3(x) \subset \ldots$, то найдется $B_n(x) \supset K$.

Второе следует из того, что если $x \notin K$, то из покрытия компакта K (а фактически, $M \setminus \{x\}$) открытыми множествами $\left\{M \setminus \overline{B}_{\frac{1}{n}}(x)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ можно выделить конечное подпокрытие K, а т.к. $M \setminus \overline{B}_1(x) \subset M \setminus \overline{B}_{\frac{1}{2}}(x) \subset M \setminus \overline{B}_{\frac{1}{3}}(x) \subset \ldots$, то найдется $M \setminus \overline{B}_{\frac{1}{n}}(x) \supset K$, значит, $B_{\frac{1}{n}}(x) \subset \overline{B}_{\frac{1}{n}}(x) \subset M \setminus K$, $M \setminus K$ — открытое, а K — замкнутое множество. ▲

Теорема 5. *Любое замкнутое подмножество компакта — компакт.*

▼ Пусть K компакт в метрическом пространстве M и F его замкнутое подмножество. Покажем, что F также компакт. Пусть система открытых множеств $\{G_\alpha\}$ покрывает F. Система $\{G_\alpha\}$ вместе с открытым множеством $M \setminus F$ покрывает M, а значит, и K. Выделим из этого покрытия конечное подпокрытие K. Если $M \setminus F$ входит в это подпокрытие, то удалив из него $M \setminus F$ получим искомое конечное подпокрытие F множествами системы $\{G_\alpha\}$. Если $M \setminus F$ не входит в выделенное конечное подпокрытие, то это подпокрытие является искомым конечным подпокрытием F множествами системы $\{G_\alpha\}$. Значит, F — компакт. ▲

Критерий компактности в $\mathbb{R}^n$

Теорема 6. *Любой n-мерный брус (параллелепипед)*

$$\prod_{k=1}^{n}[a_k, b_k] = \{\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) : \ a_k \leqslant x_k \leqslant b_k, \ k = 1, \ldots, n\}$$

— компакт в $\mathbb{R}^n$.

▼ Предположим обратное, брус $\Pi^1 = \prod\limits_{k=1}^{n}[a_k^1, b_k^1] = \prod\limits_{k=1}^{n}[a_k, b_k]$ покрыт системой открытых множеств $\{G_\alpha\}$ и из нее нельзя выбрать конечной подсистемы, также покрывающей Π^1. Тогда разделив этот брус пополам по каждому ребру $[a_k^1, b_k^1]$, $k = 1, \ldots, n$, получим 2^n брусов $\prod\limits_{k=1}^{n}[\alpha_k, \beta_k]$, где $[\alpha_k, \beta_k]$ — правая или левая половина отрезка $[a_k^1, b_k^1]$, т.е. или отрезок $\left[a_k^1, \frac{a_k^1+b_k^1}{2}\right]$ или отрезок $\left[\frac{a_k^1+b_k^1}{2}, b_k^1\right]$. Хотя бы для одного из этих 2^n

брусов также нельзя выбрать из системы $\{G_\alpha\}$ конечной покрывающей его подсистемы. Обозначим такой брус $\Pi^2 = \prod\limits_{k=1}^{n}[a_k^2, b_k^2]$. Разделим его пополам по каждому ребру $[a_k^2, b_k^2]$, $k = 1, \ldots, n$, и получим 2^n брусов, хотя бы для одного из которых также нельзя выбрать из системы $\{G_\alpha\}$ конечной покрывающей его подсистемы. Обозначим такой брус $\Pi^3 = \prod\limits_{k=1}^{n}[a_k^3, b_k^3]$. Разделим его пополам по каждому ребру $\ldots$. Продолжая далее рассуждения, получим последовательность вложенных брусов

$$\Pi^1 \supset \Pi^2 \supset \Pi^3 \supset \cdots \supset \Pi^m \supset \ldots, \quad \Pi^m = \prod_{k=1}^{n}[a_k^m, b_k^m],$$

каждый из которых нельзя покрыть конечной подсистемой системы $\{G_\alpha\}$. Длина k-го ребра $[a_k^m, b_k^m]$ бруса Π^m равна $2^{1-m}(b_k^1 - a_k^1)$ и стремится к 0 при возрастании m. Так как

$$[a_k^1, b_k^1] \supset [a_k^2, b_k^2] \supset [a_k^3, b_k^3] \supset \cdots \supset [a_k^m, b_k^m] \supset \ldots,$$

то по принципу вложенных отрезков Кантора существует единственная точка c_k принадлежащая всем $[a_k^m, b_k^m]$, $m \in \mathbb{N}$. Так как $\vec{c} = (c_1, \ldots, c_n) \in \Pi^1$, то $\vec{c} = (c_1, \ldots, c_n) \in \bigcup\limits_{\alpha} G_\alpha$ и, значит, найдется такое α', что $\vec{c} = (c_1, \ldots, c_n) \in G_{\alpha'}$. Множество $G_{\alpha'}$ — открытое, следовательно, найдется $B_\varepsilon(\vec{c}) \subset G_{\alpha'}$. Найдем такое m, что $\sqrt{n}2^{1-m} \cdot \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}(b_k^1 - a_k^1) < \varepsilon$. Тогда для любой точки $\vec{x} \in \Pi^m$

$$\rho(\vec{x}, \vec{c}) = \|\vec{x} - \vec{c}\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k - c_k)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(b_k^m - a_k^m)^2} \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{n} \max_{1\leqslant k\leqslant n}(b_k^m - a_k^m) = \sqrt{n}2^{1-m} \cdot \max_{1\leqslant k\leqslant n}(b_k^1 - a_k^1) < \varepsilon$$

и, значит, $\Pi^m \subset B_\varepsilon(\vec{c}) \subset G_{\alpha'}$, что противоречит невозможности покрытия Π^m конечной подсистемой системы $\{G_\alpha\}$. Полученное противоречие доказывает теорему. ▲

Теорема 7. *Множество в $\mathbb{R}^n$ компактно тогда и только тогда, когда оно ограничено и замкнуто.*

▼ Если множество компактно, то по теореме 2 оно ограничено и замкнуто. Остается только доказать, что если множество $K \subset \mathbb{R}^n$ ограничено и замкнуто, то оно компактно. Так как K ограничено, то существует шар $\overline{B}_r(\vec{x}) \supset K$, брус $\Pi = \prod\limits_{k=1}^{n}[x_k - r, x_k + r] \supset \overline{B}_r(\vec{x}) \supset K$ $(\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n))$. По предыдущей теореме Π компакт, K его замкнутое подмножество и, значит, по теореме 3 также компакт. ▲

Существование предельной точки у компакта

Теорема 6. *Любое бесконечное подмножество компакта имеет хотя бы одну предельную точку принадлежащую этому компакту.*

▼ Предположим обратное. Пусть K — компакт, A — его бесконечное подмножество, не имеющее предельных точек, принадлежащих K. Тогда для любого $x \in K$ найдется такая $B'_{\varepsilon_x}(x)$, что $A \cap B'_{\varepsilon_x}(x) = \varnothing$, а значит, $A \cap B_{\varepsilon_x}(x)$ пусто или равно $\{x\}$.

Система открытых множеств $\{B_{\varepsilon_x}(x)\}_{x\in K}$ покрывает компакт K, но из нее нельзя выделить конечного подпокрытия K, ведь иначе получили бы, что A конечно. Полученное противоречие доказывает теорему. ▲

Следствие. *В $\mathbb{R}^n$ любое ограниченное бесконечное множество имеет хотя бы одну предельную точку.*

▼ В самом деле, ограниченное множество принадлежит какому-то шару $\overline{B}_r(x)$, компакту по критерию компактности, и, значит, если оно бесконечно, то обязательно имеет хотя бы одну предельную точку. ▲

Лекция 19 (17.04.20)
Предел последовательности. Полные метрические пространства

Предел последовательности. Определения

Определение 1. Последовательностью в метрическом пространстве M (точнее, (M,ρ)) называется отображение множества натуральных чисел $\mathbb{N}$ в M: $n \to a_n \in M$.

Определение 2. Подпоследовательностью последовательности $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ будем называть отображение $k \to a_{n_k}$, где $\{n_k\}$ — строго возрастающая последовательность натуральных чисел (т.е. подпоследовательность — это последовательность $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$).

Определение 3. Элемент a метрического пространства M называется **пределом последовательности** $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ элементов M (или $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ или $\{a_n\}$ или просто a_n), если

$$\rho(a_n,a) \longrightarrow 0 \text{ при } n\to\infty.$$

Пишут $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ или $\lim a_n = a$ или $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ или $a_n \to a$.

Данное определение можно было записать иначе:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists N_\varepsilon\in\mathbb{R}\ \forall n>N_\varepsilon: \quad \rho(a_n,a)<\varepsilon$$

или

$$\forall B_\varepsilon(a)\ \exists N_\varepsilon\in\mathbb{R}\ \forall n>N_\varepsilon: \quad a_n\in B_\varepsilon(a).$$

Определение 4. Последовательность называют **сходящейся**, если она имеет предел (т.е. найдется a, удовлетворяющее предыдущему определению).

Определение 5. Последовательность называют **расходящейся**, если она не является сходящейся.

Свойства предела

Свойство 1 (о подпоследовательности). *Если последовательность имеет предел, то любая ее подпоследовательность имеет тот же предел.*

▼ Если числовая последовательность $\rho(a_n,a)\to 0$ при $n\to\infty$, то по свойству сходимости подпоследовательности (для числовых последовательностей) и ее подпоследовательность $\rho(a_{n_k},a)\to 0$ при $n\to\infty$. ▲

Замечание. И эту и последующие теоремы можно доказывать так же, как они были доказана в в предыдущем семестре, но мы будем сокращать доказательства, используя уже известные свойства числовых последовательностей.

Свойство 2 (о единственности предела). *Если последовательность имеет предел, то он единственен.*

▼ Если $\rho(a_n, a) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ и $\rho(a_n, b) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, то переходя к пределу (при $n \to \infty$) в неравенстве $\rho(a, b) \leqslant \rho(a_n, a) + \rho(a_n, b)$ получаем, что $\rho(a, b) \leqslant 0$, т.е. $\rho(a, b) = 0$ и, значит, $a = b$. ▲

Определение 6. Последовательность $\{a_n\}$ называют **ограниченной**, если множество значений последовательности $\{x \in M : \ x = a_n, \ n \in \mathbb{N}\}$ ограничено (т.е. лежит в некотором шаре).

Свойство 3 (об ограниченности). *Если последовательность сходится, то она ограничена.*

▼ Если $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, то $\rho(a_n, a) \to 0$ и, значит, числовая последовательность $\{\rho(a_n, a)\}$ ограничена, т.е. существует $r \geqslant \rho(a_n, a)$ при $n \in \mathbb{N}$, тогда $a_n \in \overline{B}_r(a)$ при всех $n \in \mathbb{N}$. ▲

Свойство 4 (об отделимости). *Если последовательность $\{a_n\}$ сходится и $b \neq \lim a_n$, то $\exists \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{R} \ \forall n > N : \ a_n \notin B_\varepsilon(b)$.*

▼ Пусть $a = \lim a_n$, возьмем $\varepsilon = \frac{1}{2}\rho(a, b)$, а N таким, что при $n > N \ \ a_n \in B_\varepsilon(a)$. Так как $B_\varepsilon(a) \cap B_\varepsilon(b) = \varnothing$, то окрестность $B_\varepsilon(b)$ и найденное N — искомые, т.е. при $n > N \ \ a_n \notin B_\varepsilon(b)$. ▲

В метрическом пространстве вообще говоря не определены операции сложения, вычитания, умножения и деления элементов, нет отношения порядка, поэтому основанные на этих операциях теоремы о числовых последовательностях не имеют аналогов в общих метрических пространствах. В нормированных пространствах некоторые аналоги таких теорем есть.

Бесконечно малые последовательности

Определение 7. Последовательность $\{a_n\}$ в нормированном пространстве называют **бесконечно малой**, если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ — нулю линейного пространства или, что по определению предела то же самое, $\lim\limits_{n\to\infty} \|a_n\| = 0$.

Обозначение 1. Если последовательность $\{a_n\}$ бесконечно малая, то пишут $a_n = o(1)$.

Обозначение 2. Если пишут $a_n = O(1)$, то это означает, что последовательность $\{a_n\}$ ограничена.

Теорема 1. *В нормированном пространстве $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ тогда и только тогда, когда $a_n = a + o(1)$ (т.е., когда $a_n - a = o(1)$).*

▼ Утверждение, что $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ означает, что $\rho(a_n, a) = \|a_n - a\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, но это же означает, что $a_n - a = o(1)$. ▲

Теорема 2. *Если в нормированном пространстве $a_n = o(1)$ и $b_n = o(1)$, то $a_n \pm b_n = o(1)$. Если $a_n = o(1)$, а α_n — ограниченная числовая последовательность, то $\alpha_n a_n = o(1)$. Если $a_n = O(1)$, а α_n — бесконечно малая числовая последовательность, то $\alpha_n a_n = o(1)$.*

▼ Так как $a_n = o(1)$ и $b_n = o(1)$, то $\|a_n\| = o(1)$ и $\|b_n\| = o(1)$, а так как $\|a_n \pm b_n\| \leqslant \|a_n\| + \|b_n\| = o(1) + o(1) = o(1)$, то $\|a_n \pm b_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ и, значит, $a_n \pm b_n = o(1)$. В двух оставшихся утверждениях из числовых последовательностей $|\alpha_n, \ \|a_n\|$ одна ограничена, а другая бесконечно малая и, значит, по теореме о сумме бесконечно малых числовых последовательностей $\|\alpha_n a_n\| = |\alpha_n| \cdot \|a_n\| = o(1) \cdot O(1) = o(1)$, т.е. $\alpha_n a_n = o(1)$. ▲

Теорема 3. *Если в нормированном пространстве* $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ *и* $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} b$, *то* $a_n \pm b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a \pm b$. *А если* $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$, *числовая последовательность* $\alpha_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha$, *то* $\alpha_n a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha a$.

▼ Так как $a_n - a = o(1)$ и $b_n - b = o(1)$, то $(a_n \pm b_n) - (a \pm b) = o(1) \pm o(1) = o(1)$ по предыдущей теореме и, значит, $a_n \pm b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a \pm b$.

Далее, так как $a_n - a = o(1)$ и $\alpha_n - \alpha = o(1)$, то $\alpha_n a_n - \alpha a = \alpha_n(a_n - a) + (\alpha_n - \alpha)a = O(1) \cdot o(1) + o(1) \cdot O(1) = o(1)$ по предыдущей теореме и, значит, $\alpha_n a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha a$. ▲

Замечание. Мы не касаемся деления $\frac{a_n}{\alpha_n}$, т.к. оно сводится к умножению $\frac{1}{\alpha_n} \cdot a_n$.

Теперь перейдем к пространствам $\mathbb{R}^n$.

Теорема 4. *В* $\mathbb{R}^n$ $\vec{x}^m \xrightarrow[m\to\infty]{} \vec{x}$ *тогда и только тогда, когда для любого натурального* k, $1 \leqslant k \leqslant n$, $x_k^m \xrightarrow[m\to\infty]{} x_k$ *(т.е. в* $\mathbb{R}^n$ *последовательность сходится тогда и только тогда, когда она сходится покоординатно).*

▼ Необходимость. Если $\vec{x}^m \xrightarrow[m\to\infty]{} \vec{x}$, то $\|\vec{x}^m - \vec{x}\| \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$. А так как для любого k, $1 \leqslant k \leqslant n$, $|x_k^m - x_k| \leqslant \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k^m - x_k|^2} = \|\vec{x}^m - \vec{x}\|$, то $|x_k^m - x_k| \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$ и, значит, $x_k^m \xrightarrow[m\to\infty]{} x_k$.

Достаточность. Если для любого k, $1 \leqslant k \leqslant n$, $x_k^m \xrightarrow[m\to\infty]{} x_k$, то $(x_k^m - x_k)^2 = o(1)$ для всех k, $1 \leqslant k \leqslant n$, и значит, $\|\vec{x}^m - \vec{x}\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} (x_k^m - x_k)^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} o(1) = o(1)$, т.е. $\|\vec{x}^m - \vec{x}\| \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$, а $\vec{x}^m \xrightarrow[m\to\infty]{} \vec{x}$. ▲

Полные метрические пространства

Вернемся к метрическим пространствам.

Определение 8. Последовательность $\{a_n\}$ элементов метрического пространства называется **фундаментальной** или **последовательностью Коши**, если

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \; \forall i > N \; \forall j > N : \quad \rho(a_i, a_j) < \varepsilon.$$

Утверждение 1. *В метрическом пространстве любая сходящаяся последовательность является последовательностью Коши.*

▼ Если $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$, то $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \; \forall n > N : \; \rho(a_n, a) < \frac{\varepsilon}{2}$. Но тогда $\forall i > N \; \forall j > N :$ $\rho(a_i, a_j) \leqslant \rho(a_i, a) + \rho(a, a_j) < \varepsilon$. ▲

Как мы уже знаем, в $\mathbb{R}$ верно и обратное утверждение, всякая последовательность Коши сходится. В произвольном метрическом пространстве последовательность Коши не обязана быть сходящейся, но особый интерес вызывают пространства, в которых любая последовательность Коши сходится.

Определение 9. Метрическое пространство называется **полным**, если в нем любая последовательность Коши сходится.

Определение 10. Полное нормированное пространство (полное, как метрическое с метрикой $\rho(x, y) = \|x - y\|$) называется **банаховым**.

Теорема 5. *Пространство* $\mathbb{R}^n$ *является банаховым.*

▼ Если $\{\vec{x}_m\}_{m=1}^{\infty}$ — последовательность Коши в $\mathbb{R}^n$, то в силу неравенства $|x_k^i - x_k^j| \leqslant \|\vec{x}^i - \vec{x}^j\|$ она является последовательностью Коши покоординатно, по критерию Коши в $\mathbb{R}$ она сходится покоординатно, а тогда по теореме о покоординатной сходимости она сходится в $\mathbb{R}^n$. ▲

Замечание. Укажем (без доказательства), что любое метрическое пространство можно считать подмножеством полного метрического пространства с той же метрикой (т.е. для любого данного метрического пространства найдется полное метрическое пространство, подмножеством которого является данное пространство и метрика на нем совпадает с метрикой этого полного пространства).

Теорема 6 (Больцано-Вейерштрасса). *Из любой последовательности точек компакта (в метрическом пространстве) можно выбрать сходящуюся к точке компакта подпоследовательность.*

▼ Если множество значений последовательности конечно, то хотя бы одно значение встречается в последовательности бесконечно много раз и тогда члены последовательности, равные ему, образуют постоянную, а значит, сходящуюся к точке компакта подпоследовательность.

Если множество значений последовательности $\{a_n\}$ бесконечно, то теореме о существовании предельной точки на компакте оно имеет предельную точку принадлежащую компакту. Обозначим ее через a. Найдём такое n_1, что $a_{n_1} \in B_1(a)$. Если уже выбраны $n_1, n_2, \ldots, n_m$ так, что $n_1 < n_2 < \cdots < n_m$ и $a_{n_k} \in B_{\frac{1}{k}}(a)$, $k = 1, \ldots, m$, то n_{m+1} выбираем таким, что $n_{m+1} > n_m$ и $a_{m+1} \in B_{\frac{1}{m+1}}(a)$. Так будет построена подпоследовательность $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, которая сходится к a. Действительно, $\forall \varepsilon > 0\ \exists N > \frac{1}{\varepsilon}$, но тогда $\forall k > N:\ a_{n_k} \in B_{\frac{1}{k}}(a) \subset B_{\frac{1}{N}}(a) \subset B_{\varepsilon}(a)$ и, значит, $a_{n_k} \to a \in K$ при $k \to \infty$. ▲

Следствие 1. *В $\mathbb{R}^n$ из любой ограниченной последовательности можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.*

▼ Действительно, члены ограниченной последовательности принадлежат некоторому замкнутому шару, который по критерию компактности является компактом. ▲

В метрических пространствах существует аналог принципа вложенных отрезков Кантора. Приведем его формулировку.

Теорема 7. *Метрическое пространстве полно тогда и только тогда, когда в нем любая последовательность вложенных замкнутых шаров $\overline{B}_{r_1}(x_1) \supset \overline{B}_{r_2}(x_2) \supset \overline{B}_{r_3}(x_3) \supset \ldots$ с радиусами r_n, стремящимися к нулю, имеет общую точку.*

В приведенной теореме условие, что радиусы r_n стремятся к нулю, существенно.

Теперь перейдем к нормированным пространствам и отметим, что в полном нормированном пространстве (в отличие от метрического) любая последовательность вложенных замкнутых шаров имеет общую точку.

В $\mathbb{R}^n$ любая последовательность вложенных замкнутых шаров имеет общую точку.

Лекция 20 (21.04.20)
Предел функции в метрическом пространстве

Определения

Пусть есть два метрических пространства (M, ρ_M) и (N, ρ_N) и пусть функции — отображения из M в N (т.е. отображения M или подмножества M в N).

Определение 1 (предел функции по Коши). Элемент b метрического пространства N называется **пределом функции** $f(x)$ при x стремящемся к $a \in M$ по множеству $A \subset M$, если a — предельная точка A, f определена в некоторой проколотой Δ-окрестности точки a на множестве A (т.е. на $B'_\Delta(a) \cap A$ для некоторго $\Delta > 0$) и

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in B'_\delta(a) \cap A : \quad f(x) \in B_\varepsilon(b)$$

или, что эквивалентно,

$$\forall B_\varepsilon(b) \ \exists B'_\delta(a) \ \forall x \in B'_\delta(a) \cap A : \quad f(x) \in B_\varepsilon(b).$$

или, что эквивалентно,

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in A, \ 0 < \rho_M(x,a) < \delta : \quad \rho_N(f(x), b) < \varepsilon.$$

Обозначение 1. Пишут: $\lim\limits_{A \ni x \to a} f(x) = b$ или $f(x) \xrightarrow[A \ni x \to a]{} b$ и говорят: **предел функции f в точке a по множеству A равен b** или $f(x)$ **стремится к b при стремлении x к a по множеству A.**

Определение 2 (предел функции по Гейне). Элемент b метрического пространства N называется **пределом функции** $f(x)$ при x стремящемся к $a \in M$ по множеству $A \subset M$, если a — предельная точка A, f определена в некоторой проколотой Δ-окрестности точки a на множестве A (т.е. на $B'_\Delta(a) \cap A$ для некоторго $\Delta > 0$) и для любой последовательности аргументов x_n из $A \setminus \{a\}$, стремящейся к a, последовательность значений $f(x_m)$ стремится к b, то есть

$$\forall \{x_n\} \in \Big\{ \{t_n\} : \ t_n \in A \setminus \{a\} \text{ и } \lim_{n\to\infty} t_n = a \Big\} : \ \lim_{n\to\infty} f(x_n) = b$$

или, эквивалентно,

$$\forall x_n \in A \setminus \{a\} : \quad (x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} b).$$

Иначе говоря, предел функции f (из M в N) в точке $a \in M$ по множеству A это такой элемент $b \in N$, который является пределом любой последовательности значений функции, если последовательность аргументов стремится к a по множеству $A \setminus \{a\}$.

Как и в случае предыдущего определения Коши, пишут: $\lim\limits_{A \ni x \to a} f(x) = b$ или $f(x) \xrightarrow[A \ni x \to a]{} b$.

Замечание. Отметим, что если рассматривать $A \cup \{a\}$ как метрическое пространство (с той же метрикой, что и в M), то вышеприведенные определения пределов по A и те же определения пределов по всему метрическому пространству $A \cup \{a\}$ очевидно равносильны. Поэтому вместо предела по подмножеству можно расссматривать предел по метрическому пространству, что упрощает формулировки и доказательства.

Теорема 1. *Определения предела функции по Коши и по Гейне эквивалентны.*

▼ В соответствии с замечанием выше считаем, что в определениях пределов $A = M$. Покажем, что оба определения одновременно выполняются или одновременно не выполняются. Сначала докажем, что если выполняется определение по Коши, то выполняется и определение по Гейне.

Итак, пусть выполняется определение по Коши, a — предельная точка M, функция f определена в некоторой проколотой Δ-окрестности $B'_\Delta(a)$ точки a и

$$\forall B_\varepsilon(b) \quad \exists B'_\delta(a)\, \forall x \in B'_\delta(a): \quad f(x) \in B_\varepsilon(b). \tag{*}$$

Проверим, что если $x_n \neq a$, $n \in \mathbb{N}$, и $x_n \to a$, то $f(x_n) \to b$. Так как $x_n \to a$, то $\forall B_\delta(a)\ \exists N \in \mathbb{R}\ \forall n > N: \quad x_n \in B_\delta(a)$. Так как $x_n \neq a$, то, значит, $\forall n > N\ x_n \in B'_\delta(a) \cap A$ и, следовательно, по (*) $\forall n > N\ f(x_n) \in B_\varepsilon(b)$. Получаем:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{R}\ \forall n > N: \quad f(x_n) \in B_\varepsilon(b),$$

то есть $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = b$. Значит, выполняется определение по Гейне.

Теперь докажем, что если не выполняется определение по Коши, то не выполняется и определение по Гейне. В начале обоих определений формулируются некоторые одинаковые требования, естественно, что их невыполнение в одном определении означает их невыполнение в другом. Поэтому пусть a — предельная точка M, функция f определена в некоторой проколотой Δ-окрестности $B'_\Delta(a)$ точки a, но определение по Коши не выполняется, то есть

$$\exists B_\varepsilon(b)\, \forall B'_\delta(a)\, \exists x \in B'_\delta(a): \quad f(x) \notin B_\varepsilon(b).$$

Возьмем последовательность $\delta_n = \frac{1}{n}$ и найдем соответствующую последовательность точек $x_n \in B'_{\delta_n}(a)$, $f(x_n) \notin B_\varepsilon(b)$. Точки $x_n \neq a$, $x_n \to a$ (т.к. $\delta_n \to 0$), но $f(x_n) \notin B_\varepsilon(b)$, а значит, b не является пределом последовательности $f(x_n)$. Определение по Гейне не выполняется. Теорема доказана. ▲

Так как определения предела функции по Коши и по Гейне эквиваленты, то в дальнейшем мы будем говорить просто, что b является пределом f в точке a или что f имеет предел в точке a равный b.

Определение 3. Функция f **имеет предел** в точке a, если существует такое $b \in N$, что $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$.

Свойства предела

Свойство 1 (о пределе по подмножеству). *Если* $\lim\limits_{A\ni x\to a} f(x) = b$, *а* $A' \subset A$ *и* a *— предельная точка* A', *то* $\lim\limits_{A'\ni x\to a} f(x) = b$.

▼ Если $x_n \in A' \setminus \{a\}$ и $x_n \to a$, то $f(x_n) \to b$, т.е. по Гейне $\lim\limits_{A'\ni x\to a} f(x) = b$. ▲

Свойство 2 (о единственности предела). *Если* $\lim\limits_{A\ni x\to a} f(x)$ *существует, то он единственен.*

▼ Возьмем любую последовательность точек $x_n \neq a$, $x_n \to a$. Тогда $f(x_n) \to \lim\limits_{x\to a} f(x)$ и, значит, в силу единственности предела для последовательностей, $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ единственен. ▲

Свойство 3 (об ограниченности). *Если существует предел* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, *то существует такая проколотая* δ*-окрестность точки* a, *на которой функция* f *ограничена (т.е.* $f\left(B'_\delta(a)\right)$ *— ограниченное множество).*

▼ Пусть $b = \lim\limits_{x\to a} f(x)$, тогда $\exists B'_\delta(a)\ \forall x \in B'_\delta(a): \ f(x) \in B_1(b)$, т.е. $f\left(B'_\delta(a)\right) \subset B_1(b)$, значит, $f\left(B'_\delta(a)\right)$ — ограниченное множество. ▲

Свойство 4 (об отделимости). *Если* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b \neq c$, *то* $\exists B_\varepsilon(c)\ \exists B_\delta(a)$: $f\left(B'_\delta(a)\right) \cap B_\varepsilon(c) = \varnothing$ *(т.е.* $\forall x \in B_\delta(a) :\ f(x) \notin B_\varepsilon(c)$*).*

▼ Возьмем $\varepsilon = \frac{1}{2}\rho(b, c)$. Ясно, что $B_\varepsilon(b) \cap B_\varepsilon(c) = \varnothing$. Затем найдем такую $B'_\delta(a)$, что $\forall x \in B'_\delta(a) :\ f(x) \in B_\varepsilon(b)$, т.е. $f\left(B'_\delta(a)\right) \subset B_\varepsilon(b)$. Но тогда $f\left(B'_\delta(a)\right) \cap B_\varepsilon(c) = \varnothing$. ▲

Так как в метрическом пространстве вообще говоря нет операций сложения, вычитания, умножения, деления и нет отношения порядка, то ряд теорем о пределах функций не имеют аналогов в общих метрических пространствах. Приведем некоторые аналоги таких теорем для нормированных пространств.

Определение 4. Функцию f из метрического пространства M в нормированное пространство N называют **бесконечно малой** в точке $a \in M$ (при $x \to a$), если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ — нулю линейного пространства N или, что по определению предела то же самое, $\lim\limits_{x\to a} \|f(x)\| = 0$.

Обозначение 2. Про бесконечно малую функцию пишут $f(x) = o(1)$ при $x \to a$.

Обозначение 3. Если пишут $f(x) = O(1)$ при $x \to a$, то это означает, что f **ограничена** в некоторой проколотой окрестности точки a.

Обозначение 4. Пусть f и g функции из метрического пространства M в нормированное пространство N. Функция $f(x) = o(g(x))$ при $x \to a$, если функции f и g определены в некоторой проколотой окрестности точки a и существует такая бесконечно малая функция $h(x)$ (из M в $\mathbb{R}$ (или в $\mathbb{C}$)) при $x \to a$, что $f(x) = h(x)g(x)$ на некоторой $B'_\delta(a)$, т.е. $f(x) = o(1)g(x)$ на $B'_\delta(a)$ (при $x \to a$).

Обозначение 5. Пусть f и g функции из метрического пространства M в нормированное пространство N, $f(x) = O(g(x))$ при $x \to a$, если f и g определены в некоторой проколотой окрестности точки a и существует такая функция $h(x)$ (из M в $\mathbb{R}$ (или в $\mathbb{C}$)) ограниченная при $x \to a$, что $f(x) = h(x)g(x)$ на некоторой $B'_\delta(a)$, т.е. $f(x) = O(1)g(x)$ на $B'_\delta(a)$ (при $x \to a$).

Теорема 2. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f(x) = b + o(1)$ *при* $x \to a$.

▼ Возьмем любую последовательность точек $x_n \neq a$, $x_n \to a$. По аналогичной теореме для последовательностей утверждения $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = b$ и $f(x_n) = b + o(1)$ (т.е $\lim\limits_{n\to\infty} (f(x_n) - b) = 0$) эквивалентны, значит, эквивалентны и утверждения $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ и $f(x) = b + o(1)$ при $x \to a$. ▲

Теорема 3. *Если f и g функции из метрического пространства M в нормированное пространство N, бесконечно малые при $x \to a$, то $f(x) \pm g(x) = o(1)$ при $x \to a$. Если из двух функций, f из метрического пространства M в нормированное пространство N и α из метрического пространства M в $\mathbb{R}$ (или в $\mathbb{C}$, если N линейное пространство над $\mathbb{C}$), одна $o(1)$, а другая $O(1)$ при $x \to a$, то их произведение $\alpha(x)f(x) = o(1)$ при $x \to a$.*

▼ Возьмем любую последовательность точек $x_n \neq a$, $x_n \to a$. Тогда $(f \pm g)(x_n) = f(x_n) \pm g(x_n) = o(1) \pm o(1) = o(1)$ по свойствам бесконечно малых последовательностей и $\alpha(x_n)f(x_n) = o(1) \cdot O(1) = o(1)$ по свойствам бесконечно малых последовательностей. Это значит (по определению Гейне), что $f(x) \pm g(x) = o(1)$ при $x \to a$ и $\alpha(x)f(x) = o(1)$ при $x \to a$. ▲

Теорема 4. *Если f и g функции из метрического пространства M в нормированное пространство N и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c$, то $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \pm g(x) = b \pm c$. Если f — функция из метрического пространства M в нормированное пространство N*

и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, *а* α *— функция из метрического пространства* M *в* $\mathbb{R}$ *(или в* $\mathbb{C}$*, если* N *линейное пространство над* $\mathbb{C}$*),* $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = \beta$*, то* $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x)f(x) = \beta b$*.*

▼ Возьмем любую последовательность точек $x_n \neq a$, $x_n \to a$. Тогда $(f \pm g)(x_n) = f(x_n) \pm g(x_n) \to b \pm c$ по свойствам пределов последовательностей и $(\alpha f)(x_n) = \alpha(x_n)f(x_n) \to \beta b$ по по свойствам пределов последовательностей. ▲

Теперь коснемся пространства $\mathbb{R}^n$.

Теорема 5. *Если* $\vec{f}$ *функция из метрического пространства* M *в* $\mathbb{R}^n$*, то* $\lim\limits_{x\to a} \vec{f}(x) = \vec{b}$ *тогда и только тогда, когда для любого натурального* k*,* $1 \leqslant k \leqslant n$*,* $\lim\limits_{x\to a} f_k(x) = b_k$*.*

▼ Это следует из теоремы о покоординатной сходимости последовательностей и определения предела по Гейне. ▲

Определение 5. Функция f из метрического пространства M в метрическое пространство N **удовлетворяет условию Коши** в точке a, если a — предельная точка M, f определена в некоторой проколотой окрестности точки a и

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists B'_\delta(a)\ \forall x, x' \in B'_\delta(a): \quad \rho_N(f(x) - f(x')) < \varepsilon.$$

Теорема 6. *Пусть* f *— функция из метрического пространства* M *в метрическое пространство* N*. Если предел функции* f *в точке* a *существует, то* f *удовлетворяет условию Коши в точке* a*. Если* f *удовлетворяет условию Коши в точке* a *и* N *полное метрическое пространство, то* f *имеет предел в точке* a*.*

▼ Проверим сначала первое утверждение. Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, тогда

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists B'_\delta(a)\ \forall x \in B'_\delta(a): \quad f(x) \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(b).$$

Но если $x \in B'_\delta(a)$ и $x' \in B'_\delta(a)$, то

$$\rho_N(f(x), f(x')) \leqslant \rho_N(f(x), b) + \rho_N(b, f(x')) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

и, следовательно, f удовлетворяет условию Коши в точке a.

Докажем теперь достаточность условия Коши в случае, если N полное метрическое пространство. Итак, a предельная точка M и

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists B'_\delta(a)\ \forall x, x' \in B'_\delta(a): \quad \rho_N(f(x) - f(x')) < \varepsilon.$$

Возьмем любую последовательность точек $x_n \neq a$, $x_n \to a$. Тогда для любого $\delta > 0\ \exists K\ \forall n > K: \quad x_n \in B'_\delta(a)$. Значит, $\forall n, m > K: \quad \rho_N(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon$. Таким образом, последовательность $f(x_n)$ является последовательностью Коши и, следовательно, в силу полноты N, сходится. Покажем теперь, что предел последовательности $f(x_n)$ один и тот же для всех последовательностей $x_n \neq a$, $x_n \to a$. В самом деле, если рассмотрим две последовательности $x_n \neq a$, $x_n \to a$, и $y_n \neq a$, $y_n \to a$. Последовательность

$$x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, \ldots, x_n, y_n, \ldots$$

сходится к a. По доказанному последовательность

$$f(x_1), f(y_1), f(x_2), f(y_2), f(x_3), f(y_3), \ldots, f(x_n), f(y_n), \ldots$$

имеет предел и, значит, по свойству сходимости подпоследовательности,

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(y_n).$$

По определению Гейне существует $\lim\limits_{x\to a} f(x)$. ▲

Лекция 21 (24.04.20)
Непрерывные функции

Непрерывность функции в точке

Пусть, как и раньше, (M, ρ_M) и (N, ρ_n) — метрические пространства и функции — отображения из M (части M) в N.

Определение 1 (непрерывности по Коши). Функция f **непрерывна в точке** $a \in M$, если f определена в некоторой окрестности точки a и

$$\forall B_\varepsilon(f(a))\ \exists B_\delta(a)\ \forall x \in B_\delta(a): \quad f(x) \in B_\varepsilon(f(a))$$

или, эквивалентно,

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x,\ \rho_M(x, a) < \delta: \quad \rho_N(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

Замечание 1. Если a изолированная точка пространства M, то условие непрерывности функции в точке a всегда выполняется при существовании $f(a)$. Если a — предельная точка M, то условие непрерывности эквивалентно утверждению, что $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Определение 2. Если f определена в некоторой окрестности точки a, но не является непрерывной в ней, то говорят, что f **разрывна в точке** a.

Замечание 2. В отличие от одномерного случая тут мы требуем, чтобы f была определена в точке a, так как других случаев точек разрыва мы рассматривать не будем.

Определение 3. Функция f **непрерывна в точке** $a \in M$ **по множеству** $E \subset M$, если f непрерывна в точке a на $E \cup \{a\}$ как метрическом пространстве — подмножестве M.

Определение 4. Функция f **разрывна в точке** $a \in M$ **по множеству** $E \subset M$, если f разрывна в точке a на $E \cup \{a\}$ как метрическом пространстве — подмножестве M.

Определение 5 (непрерывности по Гейне). Функция f **непрерывна в точке** $a \in M$, если f определена в некоторой окрестности точки a и для любой последовательности аргументов $x_n \to a$ последовательность значений $f(x_n) \to f(a)$.

Замечание 3. Обратим внимание, что фигурирующее в определении предела по Гейне условие $x_n \neq a$ здесь отсутствует.

Теорема 1. *Определения непрерывности по Коши и по Гейне эквивалентны.*

▼ Покажем сначала, что если выполняется определение по Коши, то выполняется и определение по Гейне. Итак, f определена в некоторой окрестности точки a и

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x,\ \rho_M(x, a) < \delta: \quad \rho(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

Возьмем последовательность $x_n \to a$, тогда $\forall \delta > 0\ \exists N\ \forall n > N : \quad \rho(x_n, a) < \delta$. Но тогда в силу написанного выше $\forall n > N : \quad \rho(f(x_n), f(a)) < \varepsilon$ и, значит, $f(x_n) \to f(a)$. Определение по Гейне выполняется.

Покажем теперь, что если выполняется определение по Гейне, то выполняется и определение по Коши. В силу замечания к определению по Коши при этом можно ограничиться случаем, когда a — предельная точка M. Так как для любой последовательности $x_n \neq a$, $x_n \to a$, последовательность $f(x_n) \to f(a))$, то $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, а значит, f непрерывна в точке a и по Коши. ▲

Теорема 2. *Пусть (M, ρ_M), (N, ρ_N), (L, ρ_L) — метрические пространства, функция f из M в N непрерывна в точке $a \in M$, а функция g из N в L непрерывна в точке $f(a) \in N$. Тогда функция $g(f)$ из M в L непрерывна в точке $a \in M$.*

▼ Возьмем последовательность $x_n \to a$, тогда $f(x_n) \to f(a)$ в силу непрерывности f в точке a, а $g(f(x_n)) \to g(f(a))$ в силу непрерывности g в точке $f(a)$. Значит, по определению Гейне $g(f)$ непрерывна в точке a. ▲

Для совершения операций сложения, вычитания, умножения и деления функций необходимо, чтобы эти операции были определены в пространстве значений функций. Поэтому нижеследующая теорема сформулирована только для случая, когда N — нормированное пространство.

Теорема 3. *Пусть M — метрическое, а N — нормированное пространство. Если f и g, функции из M в N, непрерывны в точке $a \in M$, то и $f \pm g$ непрерывна в точке $a \in M$. Если функция f из M в N и функция α из M в $\mathbb{R}$ (или в $\mathbb{C}$, если N линейное пространство над $\mathbb{C}$), непрерывны в точке $a \in M$, то αf (из M в N) непрерывна в точке $a \in M$, а если $\alpha(a) \neq 0$, то и $\frac{f}{\alpha}$ непрерывна в точке $a \in M$.*

▼ Возьмем любую последовательность $x_n \to a$ в M. Тогда $f(x_n) \to f(a)$ и $g(x_n) \to g(a)$, а значит по теореме о пределе суммы последовательностей и $(f \pm g)(x_n) = f(x_n) \pm g(x_n) \to f(a) \pm g(a) = (f \pm g)(a)$. Так как $f(x_n) \to f(a)$ и $\alpha(x_n) \to \alpha(a)$, то по теореме о произведении предела последовательностей и $(\alpha f)(x_n) = \alpha(x_n) f(x_n) \to \alpha(a) f(a) = (\alpha f)(a)$, а если $\alpha(a) \neq 0$, то и $\left(\frac{f}{\alpha}\right)(x_n) = \frac{f(x_n)}{\alpha(x_n)} \to \frac{f(a)}{\alpha(a)} = \left(\frac{f}{\alpha}\right)(a)$. ▲

Непрерывность функции на метрическом пространстве

Определение 6. Функция f, отображающая метрическое пространство M в метрическое пространство N, **непрерывна на** M, если f непрерывна в каждой точке M.

Определение 7. Функция f из метрического пространства M в метрическое пространство N **непрерывна на множестве** $E \subset M$, если f непрерывна на E как метрическом пространстве — подмножестве M.

Теорема 4. *Функция f, отображающая метрическое пространство M в метрическое пространство N, непрерывна на M тогда и только тогда, когда для любого открытого множества G из N его прообраз $f^{-1}(G) = \{x \in M : \quad f(x) \in G\}$ — открытое множество в M.*

▼ Необходимость. Пусть f непрерывна на M и G — открытое подмножество N. Покажем, что $f^{-1}(G)$ — открытое подмножество M.

Пусть $x \in f^{-1}(G)$, т.е. $f(x) \in G$. Поскольку G — открытое множество, то найдется $B_\varepsilon(f(x)) \subset G$. Функция f непрерывна в точке x, поэтому найдется такая $B_\delta(x)$, что $f(B_\delta(x)) \subset B_\varepsilon(f(x)) \subset G$, т.е. $B_\delta(x) \subset f^{-1}(G)$ и, значит, $f^{-1}(G)$ — открытое множество.

Достаточность. Пусть для любого открытого множества $G \subset N$ $f^{-1}(G)$ — открытое множество в M. Покажем, что f непрерывна на M.

Пусть $x \in M$. Возьмем любую $B_\varepsilon(f(x))$, $f^{-1}\left(B_\varepsilon(f(x))\right)$ — открытое множество, x — его точка. Значит, найдется $B_\delta(x) \subset f^{-1}\left(B_\varepsilon(f(x))\right)$, т.е. найдется такое $B_\delta(x)$, что $f\left(B_\delta(x)\right) \subset B_\varepsilon(f(x))$. В силу произвольности $B_\varepsilon(f(x))$ получаем, что f непрерывна в точке x, а так как x — любая точка M, то f непрерывна на M. ▲

Непрерывные функции на компакте

Лемма 1. *Пусть (M, ρ) — метрическое пространство, $E \subset M$. Множество $G \subset E$ является открытым в E как метрическом пространстве с метрикой ρ тогда и только тогда, когда найдется такое открытое в M множество $\tilde{G}$, что $G = \tilde{G} \cap E$ (т.е. открытые множества в E — сужения открытых множеств в M).*

▼ Достаточность. Если $\tilde{G}$ — открытое множество в M, то $G = \tilde{G} \cap E$ — открытое множество в E, ведь если ε-окрестность точки x в M $B_\varepsilon(x) = \{y \in M : \ \rho(x, y) < \varepsilon\} \subset \tilde{G}$, то ε-окрестность точки x в E $B_\varepsilon(x) \cap E = \{y \in E : \ \rho(x, y) < \varepsilon\} \subset \tilde{G} \cap E = G$.

Необходимость. Если G — открытое множество в E, то для любой точки $x \in G$ существует в M такая ε-окрестность $B_\varepsilon(x)$, что ее пересечение с E, являющееся ε-окрестностью в E, принадлежит G, т.е. $B_\varepsilon(x) \cap E \subset G$. Объединение таких окрестностей

$$\tilde{G} = \bigcup_{B_\varepsilon(x) \cap E \subset G} B_\varepsilon(x) \supset G,$$

$$\tilde{G} \cap E = \bigcup_{B_\varepsilon(x) \cap E \subset G} B_\varepsilon(x) \cap E \subset G,$$

значит, $\tilde{G} \cap E = G$ и $\tilde{G}$ — открытое множество в M (как объединение открытых множеств). ▲

Лемма 2. *Если K — компакт в метрическом пространстве M, то K компакт в K как метрическом пространстве — подпространстве M.*

▼ Пусть $\{G_\lambda\}$ — открытые множества в K покрывающие K. Тогда по предыдущей лемме существуют такие открытые множества в M $\{\tilde{G}_\lambda\}$, что для каждого λ верно равенство $\tilde{G}_\lambda \cap K = G_\lambda$. Так как эти множества покрывают компакт K, то можно выделить конечное подпокрытие K $\{\tilde{G}_{\lambda_k}\}_{k=1}^n$. А тогда $\{G_{\lambda_k}\}_{k=1}^n = \{\tilde{G}_{\lambda_k} \cap K\}_{k=1}^n$ — конечное подпокрытие K в K как метрическом пространстве. Значит, K — компакт в K как метрическом пространстве. ▲

Образ компакта — компакт

Лемма 3. *Если функция f из метрического пространства M в метрическое пространство N непрерывна на M, K — компакт в M, то $f(K)$ — компакт в N.*

▼ Рассмотрим любое покрытие образа компакта $f(K)$ открытыми множествами G_λ. Тогда по теореме 4 о критерии непрерывности отображения $f^{-1}\left(G_\lambda\right)$ тоже открытые множества и они покрывают компакт K. Выделим конечное подпокрытие K $f^{-1}\left(G_{\lambda_1}\right), \ldots, f^{-1}\left(G_{\lambda_n}\right)$. Тогда множества $G_{\lambda_1}, \ldots, G_{\lambda_n}$ образуют конечное покрытие $f(K)$ и, значит, $f(K)$ — компакт в N. ▲

Теорема 5. *Если f — функция из метрического пространства M в метрическое пространство N, которая определена и непрерывна на компакте K из M, то $f(K)$ — компакт в N.*

▼ По лемме 2 K — компакт в K как метрическом пространстве — подпространстве M, а тогда по лемме 3 $f(K)$ — компакт в N. ▲

Теоремы Вейерштрасса

Теорема 6 (Вейерштрасса). *Если функция f из метрического пространства M в метрическое пространство N непрерывна на компакте K, то f ограничена на K.*

▼ По предыдущей теореме $f(K)$ — компакт, а значит ограниченное множество. ▲

Теорема 7 (Вейерштрасса). *Если f непрерывная действительнозначная функция на компакте K в метрическом пространстве, то f принимает на K наибольшее и наименьшее значения (достигает своего $\sup\limits_K f$ и $\inf\limits_K f$).*

▼ По предыдущей теореме существуют конечные $\sup\limits_K f$ и $\inf\limits_K f$. Это не могут быть внешние точки $f(K)$ (иначе это не точные грани), а значит, в силу замкнутости K (как компакта) это точки $f(K)$, т.е. найдутся $x_s \in K$ и $x_i \in K$, что $f(x_s) = \sup\limits_K f$ и $f(x_i) = \inf\limits_K f$. ▲

Замечание 4. Две последние теоремы можно было доказать аналогично тому, как это было сделано в одномерном случае основываясь на том, что по теореме Больцано–Вейерштрасса из любой последовательности точек компакта можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Лекция 21 (28.04.20) **Равномерная непрерывность. Связные множества и кривые**

Равномерная непрерывность

Пусть, как и раньше, (M, ρ_M) и (N, ρ_n) — метрические пространства и функции — отображения из M (части M) в N.

Определение 1. Функция f, отображающая M в N, является **равномерно непрерывной** на M, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in M\ \forall x' \in B_\delta(x) : \quad f(x') \in B_\varepsilon(f(x))$$

или, эквивалентно,

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x, x' \in M :$$
$$\rho_M(x, x') < \delta \Rightarrow \rho_N(f(x), f(x')) < \varepsilon.$$

Определение 2. Функция f из M в N **равномерно непрерывна** на $E \subset M$, если f равномерно непрерывна на E как метрическом пространстве — подпространстве M.

Теорема 1 (Кантора). *Если функция f (из M в N) непрерывна на компакте $K \subset M$, то f равномерно непрерывна на K.*

▼ Предположим обратное, f непрерывна, но не является равномерно непрерывной на K, тогда

$$\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x, x' \in K: \\ \rho_M(x, x') < \delta \text{ и } \rho_N(f(x), f(x')) \geqslant \varepsilon.$$

Возьмем последовательность $\delta_n = \frac{1}{n}$ и для каждого δ_n найдем такие точки x_n и x'_n из K, что $\rho_M(x_n, x'_n) < \delta_n$ и $\rho_N(f(x_n), f(x'_n)) \geqslant \varepsilon$. Воспользуемся теоремой Больцано-Вейерштрасса и выберем сходящуюся подпоследовательность $x_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} x_0 \in K$. Так как $\rho\left(x'_{n_k}, x_0\right) \leqslant \rho\left(x'_{n_k}, x_{n_k}\right) + \rho\left(x_{n_k}, x_0\right) < \delta_{n_k} + \rho\left(x_{n_k}, x_0\right)$, то $x'_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} x_0 \in K$. В силу непрерывности f в точке x_0 $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \lim\limits_{k\to\infty} f(x'_{n_k}) = f(x_0)$, значит, $\rho_N\left(f(x_{n_k}), f(x'_{n_k})\right) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$, что противоречит условию $\rho_N\left(f(x_{n_k}), f(x'_{n_k})\right) \geqslant \varepsilon > 0$. Следовательно, f равномерно непрерывна на K. ▲

Следствие 1. *Если действительнозначная функция f непрерывна на замкнутом ограниченном множестве $K \subset \mathbb{R}^n$, то f на K ограничена, принимает наибольшее и наименьшее значения и равномерно непрерывна.*

▼ Действительно, по критерию компактности в $\mathbb{R}^n$ K — компакт в $\mathbb{R}^n$ и, значит, по теоремам Вейерштрасса и по предыдущей теореме следствие справедливо. ▲

Связные множества

Определение 3. Метрическое пространство M называется **связным**, если его нельзя разбить на два непустых непересекающихся открытых множества или, эквивалентно, если его нельзя разбить на два непустых непересекающихся замкнутых множества (ведь если такие множества существуют, то они одновременно открыты и замкнуты) или, эквивалентно, если в метрическом пространстве не существует одновременно открытых и замкнутых подмножеств, кроме пустого множества $\varnothing$ и всего пространства M.

Определение 4. Метрическое пространство M называется **несвязным**, если его можно разбить на два непустых непересекающихся открытых множества или, эквивалентно, если его можно разбить на два непустых непересекающихся замкнутых множества (ведь если такие множества существуют, то они одновременно открыты и замкнуты) или, эквивалентно, если в метрическом пространстве существует одновременно открытое и замкнутое подмножество, отличное от пустого множества $\varnothing$ и всего пространства M.

Определение 5. Множество в метрическом пространстве называется **связным**, если оно связно как метрическое пространство (с той же метрикой).

Определение 6. Множество в метрическом пространстве называется **несвязным**, если оно несвязно как метрическое пространство (с той же метрикой).

Критерий связности

Теорема 2. *Метрическое пространство (множество в метрическом пространстве) несвязно тогда и только тогда, когда на нем существует непрерывная действительнозначная функция, принимающая ровно два значения.*

▼ Из определений следует, что достаточно рассмотреть только случай метрического пространства.

Необходимость. Покажем, что если метрическое пространство M несвязно, то на нем можно задать непрерывную функцию, принимающую ровно два значения $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$. Пусть $M = G_1 \cup G_2$, где G_1 и G_2 непустые непересекающиеся открытые множества. Определим функцию f на M следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} a, & \text{если } x \in G_1, \\ b, & \text{если } x \in G_2. \end{cases}$$

Поскольку прообраз любого множества из $\mathbb{R}$ или $\varnothing$ или G_1 или G_2 или $G_1 \cup G_2 = M$, то по критерию непрерывности функции на метрическом пространстве f — непрерывная функция на M.

Достаточность. Покажем теперь, что если на метрическом пространстве M можно задать непрерывную двузначную действительнозначную функцию, то M несвязно. Пусть функция f непрерывна на M и принимает ровно два значения a и b из $\mathbb{R}$. Найдем такое $\varepsilon > 0$, что $B_\varepsilon(a) \cap B_\varepsilon(a) = \varnothing$ (например, $\varepsilon = \frac{|b-a|}{2}$) и положим $G_1 = f^{-1}(B_\varepsilon(a)) = f^{-1}(\{a\})$ и $G_2 = f^{-1}(B_\varepsilon(b)) = f^{-1}(\{b\})$. По критерию непрерывности функции на метрическом пространстве это открытые множества. Ясно, что они непустые, непересекающиеся и $G_1 \cup G_2 = M$. ▲

Следствие 2. *Метрическое пространство (множество в метрическом пространстве) связно тогда и только тогда, когда на нем не существует непрерывной действительнозначной функции, принимающей ровно два значения.*

Теорема 3. *Множество E в метрическом пространстве M несвязно тогда и только тогда, когда в M существуют два непересекающихся открытых множества, которые покрывают E и каждое из которых пересекается с E.*

▼ Достаточность. Если такие открытые множества G_1 и G_2 в M существуют, то $G_1 \cap E$ и $G_2 \cap E$ образуют разбиение E как метрического пространства на два непустых непересекающихся открытых множества, т.е. E несвязно.

Необходимость. Если E несвязно, т.е. существуют множества $\overline{G}_1$ и $\overline{G}_2$, образующие разбиение E как метрического пространства на два непустых непересекающихся открытых множества, то положим

$$G_1 = \{x \in M : \inf_{t \in \overline{G}_1} \rho(x,t) < \inf_{t \in \overline{G}_2} \rho(x,t)\},$$
$$G_2 = \{x \in M : \inf_{t \in \overline{G}_1} \rho(x,t) > \inf_{t \in \overline{G}_2} \rho(x,t)\}.$$

Легко видеть, что $G_1 \supset \overline{G}_1$, $G_2 \supset \overline{G}_2$ и $G_1 \cap G_2 = \varnothing$. Остается показать, что это открытые множества.

По неравенству треугольника для любых точек x, y, t

$$\rho(x,t) \leqslant \rho(x,y) + \rho(y,t),$$

значит,

$$\inf_{t \in \overline{G}_1} \rho(x,t) \leqslant \rho(x,y) + \rho(y,t)$$

при любом $t \in \overline{G}_1$, откуда

$$\inf_{t \in \overline{G}_1} \rho(x,t) \leqslant \rho(x,y) + \inf_{t \in \overline{G}_1} \rho(y,t).$$

Поменяв местами x и y, получим неравенство

$$\inf_{t\in\overline{G}_1}\rho(y,t)\leqslant\rho(x,y)+\inf_{t\in\overline{G}_1}\rho(x,t).$$

Из двух последних неравенств следует, что

$$\left|\inf_{t\in\overline{G}_1}\rho(x,t)-\inf_{t\in\overline{G}_1}\rho(y,t)\right|\leqslant\rho(x,y)$$

и, значит, функция $\varphi(x)=\inf\limits_{t\in\overline{G}_1}\rho(x,t)$ непрерывна на M. Аналогично, непрерывна на M функция $\psi(x)=\inf\limits_{t\in\overline{G}_2}\rho(x,t)$. Значит, непрерывна разность этих функций $h(x)=\varphi(x)-\psi(x)$. А тогда

$$G_1=h^{-1}((0,+\infty))\text{ и }G_2=h^{-1}((-\infty,0))$$

— прообразы открытых множеств, а значит, открытые множества. ▲

Теорема о промежуточных значениях

Напомним, что промежутком называется любое подмножество $\mathbb{R}$, содержащее вместе с каждой парой точек и все точки, лежащие между ними.

Теорема 4. *Подмножество $\mathbb{R}$ связно тогда и только тогда, когда это промежуток.*

▼ Достаточность. Если непрерывная на промежутке действительнозначная функция принимает в двух его точках разные значения, то между этими точками она принимает по теореме Больцано–Коши все промежуточные значения. Значит, по следствию критерия связности, промежуток — связное множество.

Необходимость. Если подмножество $\mathbb{R}$ вместе с парой точек не содержит лежащую между ними точку c, то функция

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\leqslant c,\\ 1 & \text{при } x>c,\end{cases}$$

принимает ровно два значения на этом подмножестве и непрерывна на нем (она непрерывна во всех точках $\mathbb{R}$, кроме c), значит, по критерию несвязности, это несвязное множество. ▲

Теорема 5. *Образ связного множества при его непрерывном отображении в метрическое пространство связен.*

▼ Если образ $\varphi(D)$ связного множества D несвязен, то на $\varphi(D)$ существует непрерывная действительнозначная двузначная функция f. Но тогда $f(\varphi)$ будет непрерывной действительнозначной двузначной функцией на D, что по противоречит связности D. ▲

Теорема 6 (Больцано–Коши). *Действительнозначная непрерывная на связном множестве функция принимает все промежуточные значения (т.е., если она принимает значения a и b, $a<b$, то она принимает все значения отрезка $[a,b]$.*

▼ По теореме образ связного множества связен, по теореме 4 это промежуток, который вместе с каждой парой точек содержит и все лежащие между ними точки. ▲

Определение 7. Непрерывной кривой или просто **кривой** в метрическом пространстве будем называть непрерывный образ промежутка, т.е. образ промежутка при непрерывном отображении его в метрическое пространство.

Теорема 8. *Непрерывная кривая — связное множество.*

▼ Эта теорема непосредственно следует из теорем о связности промежутка и о том, что образ связного множества — связное множество. ▲

Определение 8. Множество в метрическом пространстве называется **линейно связным**, если любые две его точки можно соединить непрерывной кривой, принадлежащей этому множеству (т.е. через любые две его точки можно провести непрерывную кривую, принадлежащую этому множеству).

Теорема 9. *Линейно связное множество — связно.*

▼ Предположим, что это несвязное множество. Тогда на нем существует непрерывная действительнозначная двузначная функция f. Соединим пару точек, в которых эта функция принимает различные значения, непрерывной кривой, принадлежащей множеству, и получим непрерывную кривую, на которой непрерывная действительнозначная функция принимает ровно два значения, что невозможно по предыдущей теореме. ▲

Определение 9. Отрезком в нормированном пространстве N с концами в точках x и y называется множество $\{t \in N : \ t = (1-\alpha)x + \alpha y, \ \text{где } 0 \leqslant \alpha \leqslant 1\}$. Обозначается отрезок $[x, y]$.

Отрезок — непрерывная кривая (ведь t как функция от α непрерывна).

Определение 4. Ломаной в нормированном пространстве называется кривая, состоящая из конечной последовательности отрезков $[a_{k-1}, a_k]$, $k = 1, \ldots, n$.

Это непрерывная кривая, что является очевидны, если отрезок $[a_{k-1}, a_k]$ рассматривать как непрерывное отображение отрезка $[k-1, k] \subset \mathbb{R}$ по формуле $\alpha \longrightarrow (k-\alpha)a_{k-1} + (\alpha - k + 1)a_k$, а всю ломаную как отображение отрезка $[0, n]$ складывающееся из приведенных отображений.

Теорема 10. *В нормированном пространстве открытое множество связно тогда и только тогда, когда любые две его точки можно соединить принадлежащей этому множеству ломаной.*

▼ Достаточность очевидна из предыдущей теоремы, ведь открытое множество в этом случае линейно связно.

Докажем необходимость. Пусть G — открытое связное множество в нормированном пространстве N, x_0 — произвольная точка G и $G_0 = \{x \in G : \ x \text{ и } x_0 \text{ соединяются принадлежащей } G \text{ ломаной}\}$. Очевидно, $x_0 \in G_0$. Если $x \in G_0$, то существует $B_\varepsilon(x) \subset G$, для любой точки $y \in B_\varepsilon(x)$ отрезок $[x, y] \subset B_\varepsilon(x) \subset G$ (ведь если $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, то $\|(1-\alpha)x + \alpha y - x\| = \|\alpha(y - x)\| = \alpha\|y - x\| < \alpha\varepsilon$), значит, все точки $B_\varepsilon(x)$ соединяются с x_0 ломаной и $B_\varepsilon(x) \subset G_0$. Следовательно, G_0 открытое множество в N, а значит, и в G как метрическом пространстве — подпространстве N. Покажем, что $G \setminus G_0$ открытое множество. Если $x \in G \setminus G_0$, то существует $B_\varepsilon(x) \subset G$, для любой точки $y \in B_\varepsilon(x)$ отрезок $[x, y] \subset B_\varepsilon(x) \subset G$, значит, $B_\varepsilon(x) \cap G_0 = \varnothing$, т.е. $B_\varepsilon(x) \subset G \setminus G_0$. В силу связности G или G_0 или $G \setminus G_0$ пусто, но $x_0 \in G_0$, значит, $G \setminus G_0 = \varnothing$, т.е. $G = G_0$. Теорема доказана. ▲