Лекция 11 (13.03.20)
Интегралы Стилтьеса

Определения

В этой лекции будут рассмотрены обобщения ранее введенных интегралов. Идея обобщения принадлежит Стилтьесу.

Все рассматриваемые дальше функции считаем действительнозначными, хотя можно считать их и комплекснозначными. Те места, где различие между действительным и комплексным случаями существенно, будем отмечать особо.

Обозначение 1. Если дан отрезок $\Delta = [a, b]$ и определенная в его концах функция g, то приращение $g(b) - g(a)$ функции g на отрезке Δ будем обозначать $g(\Delta)$.

Определение 1. Пусть на отрезке $[a, b]$ определены функции f и g. **Интегральной суммой Римана–Стилтьеса** или просто **суммой Римана–Стилтьеса** функции f по функции g на отрезке $[a, b]$, соответствующей отмеченному разбиению $\mathbb{T} = \{(\Delta_i, \xi_i)\}_{i=1}^n$, называют сумму

$$\mathfrak{S}(f\,dg, \mathbb{T}) = \sum_{\mathbb{T}} f(\xi_i) g(\Delta_i) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) g(\Delta_i),$$

где $g(\Delta_i)$ — приращение функции g на отрезке Δ_i.

Интеграл Римана–Стилтьеса

Определение 2. Функция f **интегрируема по функции** g на отрезке $[a, b]$ **в смысле Римана–Стилтьеса** и ее интеграл равен числу $\boldsymbol{I}$, если f и g определены на $[a, b]$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что для любого разбиения $\mathbb{T} = \{(\Delta_i, \xi_i)\}_{i=1}^n$ мельче δ верно неравенство $|\mathfrak{S}(f\,dg, \mathbb{T}) - \boldsymbol{I}| < \varepsilon$, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \text{число } \delta > 0\ \forall \mathbb{T},\ \xi_i \in \Delta_i \text{ и } |\Delta_i| < \delta \text{ для всех } i:$$
$$|\mathfrak{S}(f\,dg, \mathbb{T}) - \boldsymbol{I}| < \varepsilon.$$

Число $\boldsymbol{I}$ называют **определенным интегралом Римана–Стилтьеса** от функции f по функции g на отрезке $[a, b]$ (по отрезку $[a, b]$).

Обозначение 2. Определенный интеграл Римана–Стилтьеса от функции f по функции g на отрезке $[a, b]$ (по отрезку $[a, b]$) обозначают как $\int\limits_a^b f\,dg$ или $\int\limits_{[a,b]} f\,dg$, а если хотят подчеркнуть, что это интеграл Римана–Стилтьеса (в смысле Римана–Стилтьеса), то как $(\mathcal{R} - \mathcal{S}) \int\limits_a^b f\,dg$ или $(\mathcal{R} - \mathcal{S}) \int\limits_{[a,b]} f\,dg$.

Интеграл Курцвейля–Хенстока–Стилтьеса

Определение 3. Функция f **интегрируема по функции** g на отрезке $[a, b]$ (по отрезку $[a, b]$) **в смысле Курцвейля–Хенстока–Стилтьеса** и ее интеграл равен числу $\boldsymbol{I}$, если f и g определены на $[a, b]$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует такой масштаб

δ на $[a,b]$, что для любого согласованного с масштабом δ разбиения $\mathbb{T} = \{(\Delta_i, \xi_i)\}_{i=1}^n$ верно неравенство $|\mathfrak{S}(f\,dg, \mathbb{T}) - \boldsymbol{I}| < \varepsilon$, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \text{масштаб } \delta \text{ на } [a,b]\ \forall \mathbb{T},\ \xi_i \in \Delta_i \text{ и } |\Delta_i| < \delta(\xi_i) \text{ для всех } i: \\ |\mathfrak{S}(f\,dg, \mathbb{T}) - \boldsymbol{I}| < \varepsilon.$$

Число $\boldsymbol{I}$ называют **определенным интегралом Курцвейля–Хенстока–Стилтьеса** от функции f по отрезку $[a,b]$ (на отрезке $[a,b]$).

Обозначение 3. Определенный интеграл Курцвейля–Хенстока–Стилтьеса от функции f по функции g на отрезке $[a,b]$ (по отрезку $[a,b]$) обозначают как $\int\limits_a^b f\,dg$ или $\int\limits_{[a,b]} f\,dg$, а если хотят подчеркнуть, что это интеграл Курцвейля–Хенстока–Стилтьеса (в смысле Курцвейля–Хенстока–Стилтьеса), то как $(\mathcal{H}-\mathcal{S})\int\limits_a^b f\,dg$ или $(\mathcal{H}-\mathcal{S})\int\limits_{[a,b]} f\,dg$.

Интегралы Стилтьеса как пределы по базе

Заметим, что оба определения интеграла фактически определяют интеграл как предел интегральных сумм Римана по базе.

Действительно, пусть $M = \{\mathbb{T}\}$ — множество отмеченных разбиений отрезка $[a,b]$. На M по функциям f и g определена функция $\mathfrak{S}(f\,dg, \mathbb{T})$, сопоставляющая каждому отмеченному разбиению $\mathbb{T}$ интегральную сумму Римана–Стилтьеса $\sum\limits_i f(\xi_i)g(\Delta_i)$. По определениям интегралов Римана–Стилтьеса и Курцвейля–Хенстока–Стилтьеса

$$(\mathcal{R}-\mathcal{S})\int\limits_a^b f\,dg = \lim_{\mathfrak{B}_\mathcal{R}} \mathfrak{S}(f\,dg, \mathbb{T}),$$

$$(\mathcal{H}-\mathcal{S})\int\limits_a^b f\,dg = \lim_{\mathfrak{B}_\mathcal{H}} \mathfrak{S}(f\,dg, \mathbb{T}).$$

Из свойств предела по базе сразу следуют некоторые простейшие свойства обоих обобщенных интегралов Римана.

Простейшие свойства интегралов Стилтьеса

Свойство 1 (взаимоотношение интегралов). *Если функция f интегрируема по функции g на $[a,b]$ в смысле Римана–Стилтьеса и $\boldsymbol{I}$ — ее интеграл, то f интегрируема по g на $[a,b]$ в смысле Курцвейля–Хенстока–Стилтьеса и ее интеграл то же число $\boldsymbol{I}$.*

▼ Действительно, так как $\mathfrak{B}_\mathcal{R} \subset \mathfrak{B}_\mathcal{H}$, то по теореме о пределах по разным базам свойство верно. ▲

Свойство 2 (единственность интегралов). *Если интеграл Римана–Стилтьеса или Курцвейля–Хенстока–Стилтьеса от f по g на $[a,b]$ существует, то он единственен.*

▼ Это непосредственное следствие теоремы о единственности предела по базе. ▲

Свойство 3 (линейность по функциям). *Если функция f интегрируема по функции g на $[a,b]$ в смысле Римана–Стилтьеса или Курцвейля–Хенстока–Стилтьеса, а c — число (действительное или комплексное), то cf интегрируема по g на $[a,b]$ в том же смысле и $\int\limits_a^b cf\,dg = c\int\limits_a^b f\,dg$; также f интегрируема по cg на $[a,b]$ в том же смысле и $\int\limits_a^b f\,d(cg) = c\int\limits_a^b f\,dg$.*

Если функции f_1 и f_2 интегрируемы по функции g на $[a,b]$ в смысле Римана–Стилтьеса или Курцвейля–Хенстока–Стилтьеса, то функция $f_1 \pm f_2$ интегрируема по функции g на $[a,b]$ в том же смысле и $\int\limits_a^b f_1 \pm f_2\,dg = \int\limits_a^b f_1\,dg \pm \int\limits_a^b f_2\,dg$; если функция f интегрируема по функциям g_1 и g_2 на $[a,b]$ в смысле Римана–Стилтьеса или Курцвейля–Хенстока–Стилтьеса, то функция f интегрируема по функции $g_1 \pm g_2$ на $[a,b]$ в том же смысле и $\int\limits_a^b f\,d(g_1 \pm g_2) = \int\limits_a^b f\,dg_1 \pm \int\limits_a^b f\,dg_2$.

▼ Действительно, функциям cf и g на множестве отмеченных разбиений $\mathbb{T}$ соответствует функция $\mathfrak{S}(cf\,dg,\mathbb{T}) = c\mathfrak{S}(f\,dg,\mathbb{T})$ и если $\mathfrak{B}$ — любая из двух баз, то по теореме о пределе произведения существует $\int\limits_a^b cf\,dg = \lim\limits_{\mathfrak{B}} \mathfrak{S}(cf\,dg,\mathbb{T}) = \lim\limits_{\mathfrak{B}} c\mathfrak{S}(f\,dg,\mathbb{T}) = c\lim\limits_{\mathfrak{B}} \mathfrak{S}(f\,dg,\mathbb{T}) = c\int\limits_a^b f\,dg$.

Аналогично, функциям f и cg на множестве отмеченных разбиений $\mathbb{T}$ соответствует функция $\mathfrak{S}(f\,dcg,\mathbb{T}) = c\mathfrak{S}(f\,dg,\mathbb{T})$ и если $\mathfrak{B}$ — любая из двух баз, то теореме о пределе суммы-разности существует $\int\limits_a^b f\,d(cg) = \lim\limits_{\mathfrak{B}} \mathfrak{S}(f\,dcg,\mathbb{T}) = \lim\limits_{\mathfrak{B}} c\mathfrak{S}(f\,dg,\mathbb{T}) = c\lim\limits_{\mathfrak{B}} \mathfrak{S}(f\,dg,\mathbb{T}) = c\int\limits_a^b f\,dg$.

Функциям $f_1 \pm f_2$ и g на множестве отмеченных разбиений соответствует функция $\mathfrak{S}((f_1 \pm f_2)dg,\mathbb{T}) = \mathfrak{S}(f_1 dg,\mathbb{T}) \pm \mathfrak{S}(f_2 dg,\mathbb{T})$ и если $\mathfrak{B}$ — любая из двух указанных баз, то по теореме о пределе суммы-разности существует $\int\limits_a^b f_1 \pm f_2\,dg = \lim\limits_{\mathfrak{B}} \mathfrak{S}((f_1 \pm f_2)dg,\mathbb{T}) = \lim\limits_{\mathfrak{B}} (\mathfrak{S}(f_1 dg,\mathbb{T}) \pm \mathfrak{S}(f_2 dg,\mathbb{T})) = \lim\limits_{\mathfrak{B}} \mathfrak{S}(f_1 dg,\mathbb{T}) \pm \lim\limits_{\mathfrak{B}} \mathfrak{S}(f_2 dg,\mathbb{T}) = \int\limits_a^b f_1\,dg \pm \int\limits_a^b f_2\,dg$.

Аналогично, функциям f и $g_1 \pm g_2$ на множестве отмеченных разбиений соответствует функция $\mathfrak{S}(f\,d(g_1 \pm g_2),\mathbb{T}) = \mathfrak{S}(f\,dg_1,\mathbb{T}) \pm \mathfrak{S}(f\,dg_2,\mathbb{T})$ и если $\mathfrak{B}$ — любая из двух указанных баз, то по теореме о пределе суммы-разности существует $\int\limits_a^b f\,d(g_1 \pm g_2) = \lim\limits_{\mathfrak{B}} \mathfrak{S}(f\,d(g_1 \pm g_2),\mathbb{T}) = \lim\limits_{\mathfrak{B}} (\mathfrak{S}(f\,dg_1,\mathbb{T}) \pm \mathfrak{S}(f\,dg_2,\mathbb{T})) = \lim\limits_{\mathfrak{B}} \mathfrak{S}(f\,dg_1,\mathbb{T}) \pm \lim\limits_{\mathfrak{B}} \mathfrak{S}(f\,dg_2,\mathbb{T}) = \int\limits_a^b f\,dg_1 \pm \int\limits_a^b f\,dg_2$. ▼

Свойство 4 (сохранение неравенств). *Если функция f интегрируема по функции g на $[a,b]$ в любом из двух смыслов, функция h интегрируема по функции g на $[a,b]$ в любом из двух смыслов и $f(x) \leqslant h(x)$ на $[a,b]$, а функция g неубывает на $[a,b]$, то для их интегралов (возможно, в разных смыслах) справедливо неравенство*

$\int\limits_a^b f\,dg \leqslant \int\limits_a^b h\,dg$.

▼ Действительно, в силу свойства взаимоотношения интегралов можно ограничиться случаем интегрируемости f по g и h по g в смысле Курцвейля–Хенстока–Стилтьеса. Если $f(x) \leqslant h(x)$ на $[a,b]$, а функция g неубывает на $[a,b]$, то на множестве отмеченных разбиений

$$\mathfrak{S}(f\,dg, \mathbb{T}) = \sum_i f(\xi_i) g(\Delta_i) \leqslant \sum_i h(\xi_i) g(\Delta_i) = \mathfrak{S}(h\,dg, \mathbb{T})$$

и, значит, в силу теоремы о переходе к пределу в неравенствах (для пределов по базе)

$$\int_a^b f\,dg = \lim_{\mathfrak{B}_{\mathcal{H}}} \mathfrak{S}(f\,dg, \mathbb{T}) \leqslant \lim_{\mathfrak{B}_{\mathcal{H}}} \mathfrak{S}(h\,dg, \mathbb{T}) = \int_a^b h\,dg. \blacktriangle$$

Критерии Коши существования интегралов Стилтьеса

Теперь вспомним критерий Коши существования предела по базе.

Конечный предел функции f по базе $\mathfrak{B}$ существует тогда и только тогда, когда для функции f выполняется условие: для любого $\varepsilon > 0$ существует такой элемент $B \in \mathfrak{B}$, что для любых $x, x' \in B$ верно неравенство $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$.

Используя критерий Коши получаем два следующих критерия интегрируемости.

Критерий Коши интегрируемости по Риману–Стилтьесу. *Если функции f и g определены на отрезке $[a,b]$, то функция f интегрируема по функции g на $[a,b]$ в смысле Римана–Стилтьеса тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что для любых разбиений $\mathbb{T}, \mathbb{T}' \in \boldsymbol{B}_\delta$ верно неравенство $|\mathfrak{S}(f\,dg, \mathbb{T}) - \mathfrak{S}(f\,dg, \mathbb{T}')| < \varepsilon$, т.е.*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall \mathbb{T}, \mathbb{T}' \in \boldsymbol{B}_\delta :$$
$$|\mathfrak{S}(f\,dg, \mathbb{T}) - \mathfrak{S}(f\,dg, \mathbb{T}') < \varepsilon.$$

Критерий Коши интегрируемости по Курцвейлю–Хенстоку–Стилтьесу. *Если функции f и g определены на отрезке $[a,b]$, то функция f интегрируема по функции g на $[a,b]$ в смысле Курцвейля–Хенстока–Стилтьеса тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует такой масштаб δ, что для любых разбиений Хенстока $\mathbb{T}, \mathbb{T}' \in \boldsymbol{B}_\delta$ верно неравенство $|\mathfrak{S}(f\,dg, \mathbb{T}) - \mathfrak{S}(f\,dg, \mathbb{T}')| < \varepsilon$, т.е.*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \textit{масштаб } \delta \textit{ на } [a,b]\ \forall \mathbb{T}, \mathbb{T}' \in \boldsymbol{B}_\delta :$$
$$|\mathfrak{S}(f\,dg, \mathbb{T}) - \mathfrak{S}(f\,dg, \mathbb{T}')| < \varepsilon.$$

Приведенные критерии Коши интегрируемости позволяют доказать следующее свойство.

Свойство 5 (интегрируемость на подотрезках). *Если функция f интегрируема по функции g на отрезке $[a,b]$ в смысле Римана–Стилтьеса или Курцвейля–Хенстока–Стилтьеса, то она интегрируема в том же смысле и на любом отрезке $[\overline{a}, \overline{b}] \subset [a,b]$.*

▼ Аналогично введенным для отрезка $[a,b]$ классам отмеченных разбиений $\boldsymbol{B}_\delta$, $\boldsymbol{B}_\delta^{\mathcal{M}}$ и $\boldsymbol{B}_\delta^{\mathcal{H}}$ введем для отрезка $[\overline{a},\overline{b}]$ такие же классы отмеченных разбиений $\overline{\boldsymbol{B}}_\delta$, $\overline{\boldsymbol{B}}_\delta^{\mathcal{M}}$ и $\overline{\boldsymbol{B}}_\delta^{\mathcal{H}}$. Пусть для заданного $\varepsilon > 0$ найдено такое число $\delta > 0$ (масштаб δ на $[a,b]$), что вышенаписанное условие критерия Коши выполнено. Покажем, что при тех же ε и δ (масштабе δ) условие критерия Коши выполнено на $[\overline{a},\overline{b}]$. Рассмотрим два произвольных разбиения$\overline{\mathbb{T}}$ и $\overline{\mathbb{T}}'$ из $\overline{\boldsymbol{B}}_\delta$ (из $\overline{\boldsymbol{B}}_\delta^{\mathcal{M}}$, из $\overline{\boldsymbol{B}}_\delta^{\mathcal{H}}$). Если $a \neq \overline{a}$, то дополним их одним и тем же разбиением отрезка $[a,\overline{a}]$ мельче δ (согласованным с масштабом δ на$[a,\overline{a}]$); если $\overline{b} \neq b$, то дополним их одним и тем же разбиением отрезка $[\overline{b},b]$ мельче δ (согласованным с масштабом δ на $[\overline{b},b]$). В результате из отмеченных разбиений $\overline{\mathbb{T}}$ и $\overline{\mathbb{T}}'$ отрезка $[\overline{a},\overline{b}]$ получим разбиения отрезка $[a,b]$ $\mathbb{T}$ и $\mathbb{T}'$ из $\boldsymbol{B}_\delta$ (из $\boldsymbol{B}_\delta^{\mathcal{M}}$, из $\boldsymbol{B}_\delta^{\mathcal{H}}$). Так как дополнялись разбиения $\overline{\mathbb{T}}$ и $\overline{\mathbb{T}}'$ одинаковым образом, то разность интегральных сумм $\mathfrak{S}(f\,dg,\overline{\mathbb{T}}) - \mathfrak{S}(f\,dg,\overline{\mathbb{T}}')$ на отрезке $[\overline{a},\overline{b}]$ равна разности интегральных сумм $\mathfrak{S}(f\,dg,\mathbb{T}) - \mathfrak{S}(f\,dg,\mathbb{T}')$ на отрезке $[a,b]$ и, значит, (в силу критерия Коши) меньше ε по абсолютной величине. Следовательно, условие критерия Коши на отрезке $[\overline{a},\overline{b}]$ выполнено и f интегрируема на $[\overline{a},\overline{b}]$ в смысле Римана–Стилтьеса (Курцвейля–Хенстока–Стилтьеса). ▲

В заключение отметим, что интеграл Римана–Стилтьеса широко известен. Интеграл Курцвейля–Хенстока–Стилтьеса известен мало.

Аддитивность по отрезкам

Свойством аддитивности по отрезкам интеграл Римана–Стилтьеса не обладает, что показывает следующий пример.

Пример. Функция

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in [-1,0], \\ 1, & \text{если } x \in (0,1] \end{cases}$$

интегрируема по функции

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in [-1,0), \\ 1, & \text{если } x \in [0,1] \end{cases}$$

на отрезках $[-1,0]$ и $[0,1]$ в смысле Римана–Стилтьеса, но не интегрируема на отрезке $[-1,1]$ в том же смысле.

▼ Поскольку $f(x) = 0$ на $[-1,0]$, то для любого отмеченного разбиения отрезка $[-1,0]$ интегральная сумма функции f по функции g равна 0, предел интегральных сумм по базе Римана $\mathfrak{B}_{\mathcal{R}}$ равен 0, т.е. $(\mathcal{R}-\mathcal{S})\int\limits_{-1}^{0} f\,dg = 0$.

Поскольку $g(x)$ постоянна на $[0,1]$, то на любом отрезке $\Delta \subset [0,1]$ приращение функции g будет равно 0, значит для любого отмеченного разбиения отрезка $[0,1]$ интегральная сумма функции f по функции g равна 0, предел интегральных сумм по базе Римана $\mathfrak{B}_{\mathcal{R}}$ равен 0, т.е. $(\mathcal{R}-\mathcal{S})\int\limits_{0}^{1} f\,dg = 0$.

Теперь рассмотрим любое такое отмеченное разбиение отрезка $[-1,1]$, что точка 0 лежит внутри одного из отрезков разбиения Δ_k. Тогда $g(\Delta_k) = 1$, а при $i \neq k$ $g(\Delta_i) = 0$. Если отмеченная точка $\xi_k \leqslant 0$, то $f(\xi_k) = 0$ и интегральная сумма функции f по функции g равна 0, а если отмеченная точка $\xi_k > 0$, то $f(\xi_k) = 1$ и интегральная сумма функции f по функции g равна 1. На любом элементе $\boldsymbol{B}_\delta \in \mathfrak{B}_{\mathcal{R}}$ интегральные суммы принимают значения 0 и 1, критерий Коши интегрируемости в смысле Римана–Стилтьеса не выполняется. ▲

Лекция 12 (17.03.20) Интегралы Стилтьеса. Функции ограниченной вариации

Интеграл Курцвейля–Хенстока–Стилтьеса обладает свойством аддитивности по отрезкам.

Теорема 1 (аддитивность по отрезкам). *Пусть $a < b < c$ и функция f интегрируема по функции g на отрезках $[a,b]$ и $[b,c]$ в смысле Курцвейля–Хенстока–Стилтьеса. Тогда f интегрируема по функции g на $[a,c]$ в том же смысле и*

$$\int\limits_a^c f\,dg = \int\limits_a^b f\,dg + \int\limits_b^c f\,dg.$$

▼ Обозначим для краткости $I_1 = \int\limits_a^b f\,dg$, $I_2 = \int\limits_b^c f\,dg$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и сначала найдем такой масштаб δ_1 на $[a,b]$, что для любого согласованного с ним разбиения $\mathbb{T}^1$ отрезка $[a,b]$ верно неравенство

$$|\mathfrak{S}(f\,dg, \mathbb{T}^1) - I_1| < \varepsilon;$$

а затем найдем такой масштаб δ_2 на $[b,c]$, что для любого согласованного с ним разбиения $\mathbb{T}^2$ отрезка $[a,b]$ верно неравенство

$$|\mathfrak{S}(f\,dg, \mathbb{T}^2) - I_2| < \varepsilon.$$

Положим

$$\delta(x) = \begin{cases} \min\{\delta_1(x), b-x\} & \text{при } x \in [a,b), \\ \min\{\delta_1(x), \delta_2(x)\} & \text{при } x = b, \\ \min\{\delta_2(x), x-b\} & \text{при } x \in (b,c]. \end{cases}$$

Тогда в любом согласованном с $\delta(x)$ разбиении $\mathbb{T}$ отрезка $[a,c]$, $\mathbb{T} = \{(\Delta_i, \xi_i)\}_{i=1}^n$, присутствуют один или два отрезка разбиения $\Delta_j \ni b$ с отмеченной точкой $\xi_j = b$, так как для любого отрезка разбиения Δ_i с $\xi_i \neq b$ из определения масштаба δ следует, что $b \notin B_{\delta(\xi_i)}(\xi_i)$, а значит, $b \notin \Delta_i$. В случае присутствия в разбиении $\mathbb{T}$ двух содержащих точку b отрезков разбиения она является их общим концом, а также отмеченной точкой для обоих отрезков. Тогда $\mathbb{T}^1 = \{(\Delta_i, \xi_i) \in \mathbb{T} :\ \Delta_i \subset [a,b]\}$ — разбиение отрезка $[a,b]$, согласованное с $\delta(x) \leqslant \delta_1(x)$ и $|\mathfrak{S}(f\,dg, \mathbb{T}^1) - I_1| < \varepsilon$, а $\mathbb{T}^2 = \{(\Delta_i, \xi_i) \in \mathbb{T} :\ \Delta_i \subset [b,c]\}$ — разбиение отрезка $[b,c]$, согласованное с $\delta(x) \leqslant \delta_2(x)$ и $|\mathfrak{S}(f\,dg, \mathbb{T}^2) - I_2| < \varepsilon$. А так как $\mathfrak{S}(f\,dg, \mathbb{T}) = (f\,dg, \mathbb{T}^1) + \mathfrak{S}(f\,dg, \mathbb{T}^2)$, то $|\mathfrak{S}(f\,dg, \mathbb{T}) - (I_1 + I_2)| \leqslant |\mathfrak{S}(f\,dg, \mathbb{T}^1) - I_1| + |\mathfrak{S}(f\,dg, \mathbb{T}^2) - I_2| < 2\varepsilon$. Если же только один отрезок $\Delta_j = [a_{j-1}, a_j]$ разбиения T содержит точку b, $b \in (a_{j-1}, a_j)$, $\xi_j = b$, где $1 \leqslant j \leqslant n$, то перейдем от разбиения $\mathbb{T}$ к разбиению $\overline{\mathbb{T}} = (\mathbb{T} \setminus \{(\Delta_j, \xi_j)\}) \cup \{([a_{j-1}, b], b), ([b, a_j], b)\}$. Очевидно

$$\mathfrak{S}(f\,dg, \mathbb{T}) = \mathfrak{S}(f\,dg, \overline{\mathbb{T}}),$$

а $\overline{\mathbb{T}}$ — согласованное с масштабом δ разбиение отрезка $[a, c]$ уже рассмотренного типа и

$$|\mathfrak{S}(f\,dg, \overline{\mathbb{T}}) - (I_1 + I_2)| < 2\varepsilon.$$

В итоге получаем, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такой масштаб δ на $[a, c]$, что для любого отмеченного разбиения $\mathbb{T}$ отрезка $[a, c]$ верно неравенство $|\mathfrak{S}(f\,dg, \mathbb{T}) - (I_1 + I_2)| < 2\varepsilon$. Следовательно, f интегрируема на $[a, c]$ в смысле Курцвейля–Хенстока–Стилтьеса и $\int\limits_a^c f\,dx = I_1 + I_2$. ▲

Для интеграла Римана–Стилтьеса свойство аддитивности верно при дополнительном требовании существования интегралов по всем трем отрезкам.

Теорема 2 (аддитивность по отрезкам). *Пусть $a < b < c$ и функция f интегрируема по функции g на отрезках $[a, b]$, $[b, c]$ и $[a, c]$ в смысле Римана–Стилтьеса. Тогда*

$$\int\limits_a^c f\,dg = \int\limits_a^b f\,dg + \int\limits_b^c f\,dg.$$

▼ По свойству взаимосвязи интегралов, если существует интеграл Римана–Стилтьеса, то существует равный ему интеграл Курцвейля–Хенстока–Стилтьеса. А последний аддитивен по отрезкам, поэтому

$$(\mathcal{R} - \mathcal{S})\int\limits_a^c f\,dg = (\mathcal{H} - \mathcal{S})\int\limits_a^c f\,dg = (\mathcal{H} - \mathcal{S})\int\limits_a^b f\,dg +$$

$$+(\mathcal{H} - \mathcal{S})\int\limits_b^c f\,dg = (\mathcal{R} - \mathcal{S})\int\limits_a^b f\,dg + (\mathcal{R} - \mathcal{S})\int\limits_b^c f\,dg. \blacktriangle$$

В заключение отметим (без доказательства), что если потребовать чуть большую интегрируемость в смысле Римана–Стилтьеса, интегрируемость f по g на $[a, d]$ и $[b, c]$, $a < b < d < c$, то f будет интегрируема по g в смысле Римана–Стилтьеса на $[a, c]$.

Определения вариации

Вопрос интегрируемости конкретной функции f по конкретной функции g в каком-либо смысле может оказаться весьма сложным и зависит от особенностей каждой из функций. Обычно ищут такую пару классов функций, что каждая функция первого класса интегрируема по каждой функции второго класса. Одну такую пару укажем в данном разделе.

Определение 1. Пусть E — подмножество $\mathbb{R}$, φ — определенная на E функция. Через $D = \{a_i\}_{i=0}^n$ будем обозначать упорядоченный в порядке возрастания конечный набор точек из E, $I_i = [a_{i-1}, a_i]$, $i = 1, \ldots, n$. Точная верхняя грань сумм

$$\sum_{i=1}^n |\varphi(I_i)| = \sum_{i=1}^n |\varphi(a_i) - \varphi(a_{i-1})|,$$

взятая по всем конечным упорядоченным наборам D точек множества E, называется **вариацией** функции φ на множестве E.

Обозначение 1. Вариация функции φ на множестве E обозначается $\operatorname*{Var}_E \varphi$.

Определение 2. Если $\operatorname*{Var}_E \varphi < \infty$, то φ называют **функцией ограниченной вариации** (с **ограниченным изменением**, VB-**функцией**) на множестве E.

Обозначение 2. Пространство функций ограниченной вариации на множестве E обозначается $\mathrm{VB}(E)$.

Часто встречается другое определение вариации эквивалентное определению 1. Приведем его.

Определение 3. Точная верхняя грань сумм $\sum\limits_i |\varphi(I_i)|$, взятая по всем не более чем счетным наборам неперекрывающихся отрезков $\{I_i\}$ с концами из множества E, называется **вариацией** функции φ на множестве E и обозначается также $\operatorname*{Var}_E \varphi$.

Теорема 3. *Два приведенных определения вариации* $\operatorname*{Var}_E \varphi$ *эквивалентны.*

▼ Чтобы обозначать в доказательстве, о каком определении идет речь, будем добавлять к вариации по определению 1 индекс 1, а к вариации по определению 3 индекс 2 т.е. будем писать соответственно $\operatorname*{Var}_E^1 \varphi$ или $\operatorname*{Var}_E^2 \varphi$.

Если $D = \{a_i\}_{i=0}^n$ — упорядоченный в порядке возрастания конечный набор точек из E, то отрезки $I_i = [a_{i-1}, a_i]$, $i = 1, \ldots, n$, образуют конечную систему неперекрывающихся отрезков. Значит, $\sup\limits_D \sum\limits_{i=1}^n |\varphi(I_i)| = \operatorname*{Var}_E^1 \varphi \leqslant \operatorname*{Var}_E^2 \varphi$.

Покажем теперь, что $\operatorname*{Var}_E^2 \varphi \leqslant \operatorname*{Var}_E^1 \varphi$. Действительно, в определении 3 можно ограничиться конечными наборами неперекрывающихся отрезков, т.к. бесконечная сумма $\sum\limits_i |\varphi(I_i)|$ — предел конечных сумм (по определению). Если $\{I_k\}$ — конечный набор неперекрывающихся отрезков с концами из множества E, то, обозначив через a_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, их концы, занумерованные в порядке возрастания, получим, что среди отрезков $[a_{i-1}, a_i]$, $i =, 1, \ldots, n$, содержатся все отрезки I_k и, значит, $\sum\limits_k |\varphi(I_k)| \leqslant \sum\limits_{i=1}^n |\varphi([a_{i-1}, a_i])|$, откуда следует, что $\operatorname*{Var}_E^2 \varphi \leqslant \operatorname*{Var}_E^1 \varphi$, что и требовалось.

В итоге имеем: $\operatorname*{Var}_E^1 \varphi = \operatorname*{Var}_E^2 \varphi$. ▲

Свойства функций ограниченной вариации

Свойство 1. *Если φ определена на E и $H \subset E$, то* $\operatorname*{Var}_H \varphi \leqslant \operatorname*{Var}_E \varphi$.

▼ Это непосредственное следствие любого определения вариации. ▲

Свойство 2. *Если φ — VB-функция на E, $c \in \mathbb{R}(\in \mathbb{C}$, то $c\varphi$ — VB-функция на E и $\operatorname*{Var}_E c\varphi = |c| \operatorname*{Var}_E \varphi$. Если φ и ψ— VB-функции на E, то $\varphi \pm \psi$ — VB-функция на E и $\operatorname*{Var}_E(\varphi \pm \psi) \leqslant \operatorname*{Var}_E \varphi + \operatorname*{Var}_E \psi$.*

▼ Для любого отрезка I $|c\varphi(I)| = |c| \cdot |\varphi(I)|$, поэтому $\operatorname*{Var}_E c\varphi = |c| \operatorname*{Var}_E \varphi$.

Для любого отрезка I $|(\varphi \pm \psi)(I)| \leqslant |\varphi(I)| + |\psi(I)|$, поэтому $\operatorname*{Var}_E(\varphi \pm \psi) \leqslant \operatorname*{Var}_E \varphi + \operatorname*{Var}_E \psi$. ▲

Свойство 3. *Если φ — VB-функция на E, то φ ограничена на E.*

▼ Действительно, если точка $x_0 \in E$, то для любой точки $x \in E$ верно неравенство $|\varphi(x)| \leqslant |\varphi(x) - \varphi(x_0)| + |\varphi(x_0)| \leqslant \operatorname*{Var}_E \varphi + |\varphi(x_0)|$, значит, φ ограничена на E. ▲

Свойство 4. *Если φ — VB-функция на $[a,b]$ и $[b,c]$, то φ — VB-функция на $[a,c]$ и* $\operatorname*{Var}_{[a,c]}\varphi=\operatorname*{Var}_{[a,b]}\varphi+\operatorname*{Var}_{[b,c]}\varphi$.

▼ Пусть $\{a_i\}_{i=0}^n$ — упорядоченный в порядке возрастания конечный набор точек из $[a,b]$, а $\{b_j\}_{j=0}^m$ — упорядоченный в порядке возрастания конечный набор точек из $[b,c]$. Объединив их, получим упорядоченный в порядке возрастания конечный набор точек из $[a,c]$ и

$$\sum_{i=1}^n|\varphi(a_i)-\varphi(a_{i-1})|+\sum_{j=1}^m|\varphi(b_j)-\varphi(b_{j-1})|\leqslant$$
$$\leqslant\sum_{i=1}^n|\varphi(a_i)-\varphi(a_{i-1})|+|\varphi(b_0)-\varphi(a_n)|+\sum_{j=1}^m|\varphi(b_j)-\varphi(b_{j-1})|,$$

значит,

$$\sum_{i=1}^n|\varphi(a_i)-\varphi(a_{i-1})|+\sum_{j=1}^m|\varphi(b_j)-\varphi(b_{j-1})|\leqslant\operatorname*{Var}_{[a,c]}\varphi,$$

и, следовательно,

$$\operatorname*{Var}_{[a,b]}\varphi+\operatorname*{Var}_{[b,c]}\varphi\leqslant\operatorname*{Var}_{[a,c]}\varphi.$$

Если $\{c_i\}_{i=0}^n$ — упорядоченный в порядке возрастания конечный набор точек из $[a,c]$, содержащий точку c, $c=c_j$, $0<j<n$, то $\{c_i\}_{i=0}^j$ — упорядоченный в порядке возрастания конечный набор точек из $[a,b]$, а $\{c_i\}_{i=j}^j$ — упорядоченный в порядке возрастания конечный набор точек из $[b,c]$. Так как $\sum\limits_{i=1}^n|\varphi(c_i)-\varphi(c_{i-1})|=\left(\sum\limits_{i=1}^j+\sum\limits_{i=j+1}^n\right)|\varphi(c_i)-\varphi(c_{i-1})|$, то

$$\sum_{i=1}^n|\varphi(c_i)-\varphi(c_{i-1})|\leqslant\operatorname*{Var}_{[a,b]}\varphi+\operatorname*{Var}_{[b,c]}\varphi.$$

Поскольку к любому набору точек из $[a,c]$ можно добавить точку c и точку, которая меньше c, а также точку, которая больше c, только увеличив при этом сумму модулей приращений φ по парам соседних точек, то

$$\operatorname*{Var}_{[a,c]}\varphi\leqslant\operatorname*{Var}_{[a,b]}\varphi+\operatorname*{Var}_{[b,c]}\varphi.$$

В итоге имеем равенство $\operatorname*{Var}_{[a,c]}\varphi=\operatorname*{Var}_{[a,b]}\varphi+\operatorname*{Var}_{[b,c]}\varphi$. ▲

Свойство 5. *Если φ и ψ — VB-функции на E, то их произведение $\varphi\psi$ — VB-функция на E и* $\operatorname*{Var}_E\varphi\psi\leqslant\sup\limits_E|\varphi|\cdot\operatorname*{Var}_E\psi+\sup\limits_E|\psi|\cdot\operatorname*{Var}_E\varphi$.

▼ Для любого отрезка $I=[a,b]$ с концами $a,b\in E$ верна оценка $|(\varphi\psi)(I)|=|\varphi(b)\psi(b)-\varphi(a)\psi(a)|=|\varphi(b)(\psi(b)-\psi(a))+\psi(a)(\varphi(b)-\varphi(a))|\leqslant|\varphi(b)|\cdot|\psi(I)|+|\psi(a)|\cdot|\varphi(I)|\leqslant\sup\limits_E|\varphi|\cdot|\psi(I)|+\sup\limits_E|\psi|\cdot|\varphi(I)|$, поэтому $\operatorname*{Var}_E\varphi\psi\leqslant\sup\limits_E|\varphi|\cdot\operatorname*{Var}_E\psi+\sup\limits_E|\psi|\cdot\operatorname*{Var}_E\varphi$. ▲

Свойство 6. *Если φ — VB-функция на E и $m=\inf\limits_E|\varphi|>0$, то $\frac{1}{\varphi}$ — VB-функция на E и* $\operatorname*{Var}_E\frac{1}{\varphi}\leqslant\frac{1}{m^2}\operatorname*{Var}_E\varphi$.

▼ Для любого отрезка $I = [a,b]$ с концами $a, b \in E$ верна оценка $\left|\frac{1}{\varphi}(I)\right| = \left|\frac{1}{\varphi(b)} - \frac{1}{\varphi(a)}\right| = \left|\frac{\varphi(a)-\varphi(b)}{\varphi(a)\varphi(b)}\right| \leqslant \frac{|\varphi(I)|}{m^2}$, поэтому $\operatorname*{Var}_E \frac{1}{\varphi} \leqslant \frac{1}{m^2} \operatorname*{Var}_E \varphi$. ▲

Свойство 7. *Если φ — VB-функция на E, $\psi \in \mathrm{Lip}(\varphi(E))$, то $\psi(\varphi)$ — VB-функция на E и $\operatorname*{Var}_E \psi(\varphi) \leqslant C \operatorname*{Var}_E \varphi$, где C — постоянная из определения класса Липшица.*

▼ Для любого отрезка $I = [a,b]$ с концами $a, b \in E$ верна оценка $|\psi(\varphi)(I)| = |\psi(\varphi(b)) - \psi(\varphi(a)) \leqslant C|\varphi(b) - \varphi(a)| = C|\varphi(I)|$, поэтому $\operatorname*{Var}_E \psi(\varphi) \leqslant C \operatorname*{Var}_E \varphi$. ▲

Лекция 13 (20.03.20)
Функции ограниченной вариации. Интегрирование непрерывных функций по функциям ограниченной вариации. Интегрирование по частям для интеграла Римана–Стилтьеса

Функции ограниченной вариации — разность монотонных функций

Обозначение. Пусть φ определена на $[a,b]$, $a \leqslant b$, тогда полагаем $\operatorname*{Var}_a^b \varphi = \operatorname*{Var}_{[a,b]} \varphi$, $\operatorname*{Var}_b^a \varphi = -\operatorname*{Var}_{[a,b]} \varphi$.

Тогда из свойства 4 следует, что при любом расположении точек a, b, c на $\mathbb{R}$, если функция φ определена на $[\min\{a,b,c\}, \max\{a,b,c\}]$, то

$$\operatorname*{Var}_a^c \varphi = \operatorname*{Var}_a^b \varphi + \operatorname*{Var}_b^c \varphi.$$

Теорема 1. *Если φ — VB-функция на промежутке I, точка $x_0 \in I$, то $\operatorname*{Var}_{x_0}^x \varphi$ — неубывающая функция на I, а если φ еще и действительнозначна, то неубывающими являются также функции $\operatorname*{Var}_{x_0}^x \varphi + \varphi(x)$ и $\operatorname*{Var}_{x_0}^x \varphi - \varphi(x)$.*

▼ Из свойства аддитивности вариации по отрезкам функций ограниченной вариации следует, что для любых x_1, x_2 из I

$$\operatorname*{Var}_{x_0}^{x_2} \varphi - \operatorname*{Var}_{x_0}^{x_1} \varphi = \operatorname*{Var}_{x_1}^{x_2} \varphi,$$

а при $x_2 \geqslant x_1$ $\operatorname*{Var}_{x_1}^{x_2} \varphi \geqslant |\varphi(x_2) - \varphi(x_1)|$. Значит, $\operatorname*{Var}_{x_0}^x \varphi$ — неубывающая функция на I и, при действительнозначности φ, $\operatorname*{Var}_{x_0}^x \varphi + \varphi(x)$ и $\operatorname*{Var}_{x_0}^x \varphi - \varphi(x)$ — неубывающие функции на I. ▲

Теорема 2 (Жордана). *Действительнозначная функция φ является VB-функцией на отрезке I тогда и только тогда, когда φ является разностью двух неубывающих на I функций, причем эти функции можно выбрать такими, что сумма их вариаций на любом отрезке $J \subset I$ будет равна вариации φ на J.*

▼ Пусть $I = [a,b]$. Ограниченная неубывающая функция ψ на I — VB-функция на I и

$$\operatorname*{Var}_I \psi = \psi(b) - \psi(a),$$

поскольку для любого набора точек $D = \{a_i\}_{i=0}^n \subset I$, $a \leqslant a_0 < a_1 < \cdots < a_n \leqslant b$, имеем $\sum\limits_{i=1}^n |\psi(a_i) - \psi(a_{i-1}| = \psi(a_n) - \psi(a_0) \leqslant \psi(b) - \psi(a)$ и, значит, $\operatorname*{Var}\limits_I \psi \leqslant \psi(b) - \psi(a)$, а с другой стороны, $\operatorname*{Var}\limits_I \psi \geqslant \psi(b) - \psi(a)$. Поэтому, если φ — разность двух неубывающих на I функций, то по свойству 2 φ — VB-функция на I.

Если действительнозначная функция φ является VB-функцией на отрезке $I \neq \varnothing$, то, взяв $x_0 \in I$, укажем три представления φ в виде разности ограниченных неубывающих на I функций

$$\varphi(x) = \left(\operatorname*{Var}_{x_0}^{x} \varphi + \varphi(x)\right) - \operatorname*{Var}_{x_0}^{x} \varphi,$$

$$\varphi(x) = \operatorname*{Var}_{x_0}^{x} \varphi - \left(\operatorname*{Var}_{x_0}^{x} \varphi - \varphi(x)\right),$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\left(\operatorname*{Var}_{x_0}^{x} \varphi + \varphi(x)\right) - \frac{1}{2}\left(\operatorname*{Var}_{x_0}^{x} \varphi - \varphi(x)\right).$$

Покажем, что в последнем случае сумма вариацией функций разности на любом отрезке $J \subset I$ равна вариации φ на J. Действительно, если $J = [c, d]$, то имеем равенство

$$\operatorname*{Var}_{c}^{d} \frac{1}{2}\left(\operatorname*{Var}_{x_0}^{x} \varphi \pm \varphi(x)\right) = \frac{1}{2}\left(\operatorname*{Var}_{x_0}^{d} \varphi \pm \varphi(d)\right) - \frac{1}{2}\left(\operatorname*{Var}_{x_0}^{c} \varphi \pm \varphi(c)\right) =$$
$$\frac{1}{2}\left(\operatorname*{Var}_{c}^{d} \varphi \pm (\varphi(d) - \varphi(c))\right).$$

Из него следует, что

$$\operatorname*{Var}_{c}^{d} \frac{1}{2}\left(\operatorname*{Var}_{x_0}^{x} \varphi + \varphi(x)\right) + \operatorname*{Var}_{c}^{d} \frac{1}{2}\left(\operatorname*{Var}_{x_0}^{x} \varphi - \varphi(x)\right) = \operatorname*{Var}_{c}^{d} \varphi,$$

сумма вариацией функций разности на J равна вариации φ на J. ▲

Интегрируемость непрерывных функций по функциям ограниченной вариации

Лемма. *Пусть $T = \{I_i\}_{i=1}^n$ — разбиение отрезка $[a, b]$. Тогда для любого отрезка $I = [c, d] \subset [a, b]$ и любой определенной на нем функции g верно равенство*

$$g(I) = g(d) - g(c) = \sum_{i=1}^n g(I \cap I_i),$$

где $g(I \cap I_i)$ — приращение функции g на отрезке $I \cap I_i$, причем приращение на пустом или одноточечном множестве равно нулю.

▼ Можно считать, что отрезки I_i занумерованы в порядке их расположения на $\mathbb{R}$. Пусть $I_i = [a_{i-1}, a_i]$, $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$, $c \in I_k$, $d \in I_l$, то есть $a_{k-1} \leqslant c \leqslant a_k < \cdots < a_{l-1} \leqslant d \leqslant a_l$. Тогда $g(I) = g(d) - g(c) = g(d) - g(a_{l-1}) + \sum\limits_{i=k+1}^{l-1} (g(a_i) - g(a_{i-1})) + g(a_k) - g(c) = g\left([c, d] \cap I_l\right) + \sum\limits_{i=k+1}^{l-1} g\left([c, d] \cap I_i\right) + g\left([c, d] \cap I_k\right) = \sum\limits_{i=1}^n g\left(I \cap I_i\right)$. ▲

Теорема 3. *Если* $f \in \mathrm{C}[a,b]$ *(— пространству непрерывных на* $[a,b]$ *функций), а* $g \in \mathrm{VB}[a,b]$, *то* f *интегрируема по* g *на* $[a,b]$ *в смысле Римана–Стилтьеса.*

▼ Так как функция f равномерно непрерывна на $[a,b]$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta > 0$, что если $x, y \in [a,b]$ и $|x-y| < 2\delta$, то $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Пусть $\mathbb{T} = \{(\Delta_i, \xi_i)\}$ и $\mathbb{T}' = \{(\Delta'_j, \xi'_j)\}$ отмеченные разбиения отрезка $[a,b]$ мельче δ, тогда $\mathfrak{S}(f\,dg, \mathbb{T}) - \mathfrak{S}(f\,dg, \mathbb{T}') = \sum\limits_i f(\xi_i) g(\Delta_i) - \sum\limits_j f(\xi'_j) g(\Delta'_j) = \sum\limits_i \sum\limits_j \big(f(\xi_i) - f(\xi'_j)\big)\, g(\Delta_i \cap \Delta'_j)$, где $g(\Delta_i \cap \Delta'_j) = 0$, если $\Delta_i \cap \Delta'_j$ пусто или одноточечно, а если $\Delta_i \cap \Delta'_j \neq \varnothing$, то имеем $|f(\xi_i) - f(\xi'_j)| < \varepsilon$. Поэтому $\Big|\mathfrak{S}(f\,dg, \mathbb{T}) - \mathfrak{S}(f\,dg, \mathbb{T}')\Big| = \Big|\sum\limits_i \sum\limits_j \big(f(\xi_i) - f(\xi'_j)\big)\, g(\Delta_i \cap \Delta'_j)\Big| \leqslant \varepsilon \sum\limits_i \sum\limits_j \big|g(\Delta_i \cap \Delta'_j)\big| \leqslant \varepsilon \operatorname*{Var}\limits_{[a,b]} g$.

По критерию Коши интегрируемости по Риману–Стилтьесу существует $(\mathcal{R} - \mathcal{S}) \int\limits_a^b f\,dg$. ▲

Для интеграла Римана–Стилтьеса в теореме нельзя расширить ни один из классов с сохранением другого. Достаточно просто проверяется невозможность расширения класса функций f: если функция g ограниченной вариации на $[a,b]$ разрывна в точке $c \in [a,b]$ (относительно $[a,b]$), то необходимым условием интегрируемости f по g на $[a,b]$ является непрерывность f в точке c (для простоты можно ограничиться функциями $g_c(x) = \operatorname{sign}(x-c)$, где $\operatorname{sign} x = 1$ при $x > 0$, $= 0$ при $x = 0$ и $= -1$ при $x < 0$). Невозможность расширения класса функций g требует более тонких рассуждений.

Добавим к свойствам интегралов еще одно свойство.

Свойство 8. *Если* f *интегрируема по* g *на* $[a,b]$ *в любом из двух смыслов,* $g \in \mathrm{VB}[a,b]$, *то верна оценка*

$$\left|\int\limits_a^b f\,dg\right| \leqslant \sup_{[a,b]} |f| \cdot \operatorname*{Var}_{[a.b]} g.$$

▼ Действительно, для любого отмеченного разбиения $\mathbb{T} = \{(\Delta_i, \xi_i)\}$ имеем

$$|\mathfrak{S}(f\,dg, \mathbb{T})| = \left|\sum_i f(\xi_i) g(\Delta_i)\right| \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{[a,b]} |f| \cdot \sum_i |g(\Delta_i)| \leqslant \sup_{[a,b]} |f| \cdot \operatorname*{Var}_{[a.b]} g.$$

По теореме о переходе к пределу в неравенствах (для пределов по базе) оценка верна. ▲

Теорема 1. *Если функция* g *интегрируема по функции* f *на* $[a,b]$ *в смысле Римана–Стилтьеса, то и* f *интегрируема по* g *на* $[a,b]$ *в том же смысле и*

$$(\mathcal{R} - \mathcal{S}) \int\limits_a^b f\,dg = f \cdot g\Big|_a^b - (\mathcal{R} - \mathcal{S}) \int\limits_a^b g\,df =$$
$$= f(b)g(b) - f(a)g(a) - (\mathcal{R} - \mathcal{S}) \int\limits_a^b g\,df.$$

▼ Пусть $\mathbb{T}=\{(\Delta_i,\xi_i)\}$ — разбиение отрезка $[a,b]$, $\xi_i\in\Delta_i=[a_{i-1},a_i]$, $i=1,\ldots,n$, $a=a_0<a_1<\cdots<a_n=b$. Тогда $\mathfrak{S}(f\,dg,\mathbb{T})=\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\big(g(a_i)-g(a_{i-1})\big)=\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)g(a_i-\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)g(a_{i-1})=\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)g(a_i)-\sum\limits_{i=0}^{n-1}f(\xi_{i+1})g(a_i)=f(\xi_{n+1})g(a_n)-f(\xi_0)g(a_0)-\sum\limits_{i=0}^{n}g(a_i)\big(f(\xi_{i+1})-f(\xi_i)\big)$, где $\xi_0=a$, $\xi_{n+1}=b$, $\xi_i\leqslant a_i\leqslant\xi_{i+1}$. Тогда $\tilde{\mathbb{T}}=\{([\xi_i,\xi_{i+1}],a_i)\}_{i=0}^{n}$ — отмеченное разбиение отрезка $[a,b]$ (пары с вырожденными отрезками $[\xi_i,\xi_{i+1}]$ можно удалить из разбиения $\tilde{\mathbb{T}}$) и выполняется равенство

$$\mathfrak{S}(f\,dg,\mathbb{T})=f(\xi_{n+1})g(a_n)-f(\xi_0)g(a_0)-\mathfrak{S}(g\,df,\tilde{\mathbb{T}}). \qquad (*)$$

Поскольку $a=\xi_0=a_0\leqslant\xi_1\leqslant a_2\leqslant\ldots\xi_n\leqslant a_n=\xi_{n+1}=b$, то из неравенств $|\Delta_i|=a_i-a_{i-1}<\delta$ для $i=1,\ldots,n$ следуют неравенства $|\xi_{i+1}-\xi_i|<2\delta$ для $i=0,\ldots,n$. Значит, если в равенстве (*) выражение справа имеет предел по базе $\mathfrak{B}_{\mathcal{R}}$, то и выражение слева имеет предел по той же базе и

$$\int\limits_a^b f\,dg=f(b)g(b)-f(a)g(a)-\int\limits_a^b g\,df.\blacktriangle$$

Следствие. *Если $f\in\mathrm{VB}[a,b]$, а $g\in\mathrm{C}[a,b]$, то f интегрируема по g на $[a,b]$ в смысле Римана–Стилтьеса.*

▼ Действительно, по теореме об интегрируемости непрерывной функции по функции ограниченной вариации g интегрируема по f на $[a,b]$ в смысле Римана–Стилтьеса, а тогда и f интегрируема по g на $[a,b]$ в смысле Римана–Стилтьеса. ▲

Примечание. Ситуация с интегрированием по частям для интеграла Курцвейля–Хенстока более сложная. Существуют примеры, когда в формуле интегрирования по частям один из интегралов существует, а другой не существует, или оба существуют, но формула не верна. Для интеграла Курцвейля-Хенстока формула интегрирования по частям верна при дополнительных условиях.

Лекция 14 (24.03.20) Сведение интеграла Римана–Стилтьеса к интегралу Римана. Замена переменной в интегралах

Сведение интеграла Римана–Стилтьеса к интегралу Римана

Теорема 1. *Если f ограничена на $[a,b]$, g непрерывна на $[a,b]$ и fg интегрируема по Риману на $[a,b]$, а функция G — неопределенный интеграл от функции g, то f интегрируема по G на $[a,b]$ в смысле Римана–Стилтьеса и*

$$(\mathcal{R}-\mathcal{S})\int\limits_a^b f\,dG=(\mathcal{R})\int\limits_a^b f\cdot g\,dx.$$

▼ Функция g непрерывна, а значит, равномерно непрерывна на $[a,b]$. Для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta>0$, что если $x,t\in[a,b]$ и $|x-t|<\delta$, то $|g(x)-g(t)|<\varepsilon$. Если отрезок $\Delta\subset[a,b]$ и $|\Delta|<\delta$, то для любой точки $\xi\in\Delta$

$$|G(\Delta)-g(\xi)|\Delta||=\left|\int\limits_{\Delta}(g(t)-g(\xi))dt\right|\leqslant\varepsilon|\Delta|.$$

Тогда для любого отмеченного разбиения $\mathbb{T}=\{(\Delta_i,\xi_i)\}$ мельче δ имеем

$$|\mathfrak{S}(fdG,\mathbb{T})-\mathfrak{S}(f\cdot g,\mathbb{T})|\leqslant\sum_i|f(\xi_i)|\cdot|G(\Delta_i)-g(\xi_i)|\Delta_i||\leqslant\sup_{[a,b]}|f|(b-a)\varepsilon.$$

Следовательно, $\mathfrak{S}(fdG,\mathbb{T})-\mathfrak{S}(f\cdot g,\mathbb{T})=o(1)$ по базе Римана $\mathfrak{B}_{\mathcal{R}}$. Так как

$$\int\limits_a^b fgdx=\lim_{\mathfrak{B}_{\mathcal{R}}}\mathfrak{S}(f\cdot g,\mathbb{T})=\lim_{\mathfrak{B}_{\mathcal{R}}}\mathfrak{S}(fdG,\mathbb{T}),$$

то

$$\int\limits_a^b f\,dG=\lim_{\mathfrak{B}_{\mathcal{R}}}\mathfrak{S}(fdG,\mathbb{T})=\int\limits_a^b fgdx.$$

▲

Интегрирование по частям для интеграла Римана

Теорема 2. *Если функции u и v интегрируемы на $[a,b]$ в смысле Римана, U и V — их неопределенные интегралы, то $u\cdot V$ и $v\cdot U$ интегрируемы на $[a,b]$ в смысле Римана и*

$$(\mathcal{R})\int\limits_a^b u\cdot V\,dx=U\cdot V\Big|_a^b-(\mathcal{R})\int\limits_a^b v\cdot U\,dx=$$

$$=U(b)V(b)-U(a)V(a)-(\mathcal{R})\int\limits_a^b v\cdot U\,dx.$$

▼ По предыдущей теореме $(\mathcal{R})\int\limits_a^b u\cdot V\,dx=(\mathcal{R}-\mathcal{S})\int\limits_a^b V\,dU$, $(\mathcal{R})\int\limits_a^b v\cdot U\,dx=(\mathcal{R}-\mathcal{S})\int\limits_a^b U\,dV$,а по теореме об интегрировании по частям для интеграла Римана–Стилтьеса $(\mathcal{R}-\mathcal{S})\int\limits_a^b V\,dU=U(b)V(b)-U(a)V(a)-(\mathcal{R}-\mathcal{S})\int\limits_a^b U\,dV$. ▲

Замена переменной в интегралах

Теорема 3 (формула замены переменной). *Если $f \in \mathcal{R}[a,b]$ ($\in \mathcal{H}[a,b]$), φ — строго возрастающая непрерывно дифференцируемая функция на $[\alpha,\beta]$, $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, то $f(\varphi)\cdot\varphi' \in \mathcal{R}[\alpha,\beta]$ ($\in \mathcal{H}[\alpha,\beta]$) и*

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi)\cdot\varphi'\,dt = \int\limits_{a}^{b} f\,dx.$$

▼ Возьмем любое $\varepsilon > 0$. Функция φ' непрерывна, а значит, равномерно непрерывна на $[\alpha,\beta]$, поэтому найдется такое $\delta_1 > 0$, что для любых $t,s \in [\alpha,\beta]$ из неравенства $|t-s| < \delta_1$ следует неравенство $\sup\limits_{[a,b]}|f|\cdot|\varphi'(t)-\varphi'(s)| < \varepsilon$ (для любого $t \in [\alpha,\beta]$ найдется такое $\delta_1(t) > 0$, что для любого $s \in [\alpha,\beta]$, $|t-s| < \delta_1(t)$, верно неравенство $|f(\varphi(t))(\varphi'(t)-\varphi'(s))| < \varepsilon$).

Пусть $\boldsymbol{I} = \int\limits_a^b f\,dx$. Найдется такое число $\delta_2 > 0$ (масштаб δ_2 на $[a,b]$), что для любого разбиения $\mathbb{T}_2$ отрезка $[a,b]$ мельче δ_2 (согласованного с масштабом δ_2) выполняется неравенство

$$|\mathfrak{S}(f,\mathbb{T}_2) - \boldsymbol{I}| < \varepsilon.$$

Так как функция φ непрерывна, а значит, и равномерно непрерывна на $[\alpha,\beta]$, то найдется такое число $\delta < \delta_1$ (такой масштаб $\delta < \delta_1$ на $[\alpha,\beta]$), что для любых $t,s \in [\alpha,\beta]$ из неравенства $|s-t| < \delta$ следует неравенство $|\varphi(s)-\varphi(t)| < \delta_2$ (из неравенства $|t-s| < \delta(t)$ следует неравенство $|\varphi(t)-\varphi(s)| < \delta_2(\varphi(t))$).

Возьмем любое разбиение $\mathbb{T} = \{([\alpha_{i-1},\alpha_i],\xi_i)\}$ отрезка $[\alpha,\beta]$ мельче δ (согласованное с масштабом δ). Используя формулу Лагранжа найдем такие $\zeta_i \in [\alpha_{i-1},\alpha_i]$, что $\varphi(\alpha_i)-\varphi(\alpha_{i-1}) = \varphi'(\zeta_i)(\alpha_i-\alpha_{i-1})$. Тогда по неравенствам выше $\Big|\mathfrak{S}(f(\varphi)\varphi',\mathbb{T}) - \boldsymbol{I}\Big| = \Big|\sum\limits_i f(\varphi(\xi_i))\varphi'(\xi_i)|\alpha_i-\alpha_{i-1}| - \boldsymbol{I}\Big| \leqslant \Big|\sum\limits_i f(\varphi(\xi_i))(\varphi'(\xi_i)-\varphi'(\zeta_i))|\alpha_i-\alpha_{i-1}|\Big| + \Big|\sum\limits_i f(\varphi(\xi_i))\varphi'(\zeta_i)|\alpha_i-\alpha_{i-1}| - \boldsymbol{I}\Big| < \sum_i \varepsilon|\alpha_i-\alpha_{i-1}| + \Big|\sum\limits_i f(\varphi(\xi_i))|\varphi(\alpha_i)-\varphi(\alpha_{i-1})| - \boldsymbol{I}\Big| < (\beta-\alpha+1)\varepsilon$, откуда и следует утверждение теоремы. ▲

Следствие 1 (формула замены переменной). *Если $f \in \mathcal{R}[a,b]$ ($\in \mathcal{H}[a,b]$), φ — строго убывающая непрерывно дифференцируемая функция на $[\alpha,\beta]$, $\varphi(\alpha) = b$, $\varphi(\beta) = a$, то $f(\varphi)\cdot\varphi' \in \mathcal{R}[\alpha,\beta]$ ($\in \mathcal{H}[\alpha,\beta]$) и*

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi)\cdot -\varphi'\,dt = \int\limits_{a}^{b} f\,dx.$$

▼ Действительно, рассматривая функцию $f(-x)$ на отрезке $[-b,-a]$ видим, что каждому отмеченному разбиению $\mathbb{T} = \{([a_{i-1},a_i],\xi_i)\}$ отрезка $[a,b]$ соответствует разбиение $\mathbb{T}^- = \{([-a_i,-a_{i-1}],-\xi_i)\}$ отрезка $[-b,-a]$ и $\mathfrak{S}(f(x),\mathbb{T}) = \mathfrak{S}(f(-x),\mathbb{T}^-)$, поэтому $\int\limits_{-b}^{-a} f(-x)\,dx$ и $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ одновременно существуют и равны или не существуют, а по теореме $\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(-(-\varphi(t)))\cdot -(\varphi'(t))\,dt = \int\limits_{-b}^{-a} f(-x)\,dx$. ▲

Для функций, имеющих точную первообразную, легко получить другую теорему о замене переменной.

Теорема 4 (формула замены переменной). *Если $f \in \mathcal{H}[a,b]$) и имеет точную первообразную F на $[a,b]$, φ — дифференцируемая функция на $[\alpha,\beta]$, $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$, $\varphi([\alpha,\beta])=[a,b]$, то $f(\varphi)\cdot\varphi' \in \mathcal{H}[\alpha,\beta]$) и*

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi)\cdot\varphi'\,dt = \int\limits_{a}^{b} f\,dx = F(b)-F(a).$$

▼ По следствию из формулы Ньютона–Лейбница $\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$.

Функция $F(\varphi(t))$ — точная первообразная функции $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ на $[\alpha,\beta]$, по тому же следствию $\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(\beta))-F(\varphi(\alpha)) = F(b)-F(a)$. ▲

Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме

Теорема 5 (формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме). *Если функция f $n+1$ раз дифференцируема на отрезке с концами x_0 и x, а f^{n+1} интегрируема по Риману на нём, то*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{1}{n!}(\mathcal{R})\int\limits_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt,$$

(то есть остаток $r_n(x) = \frac{1}{n!}(\mathcal{R})\int\limits_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt,$).

▼ Проведем его индукцией по n. При $n=0$ $f(x) = f(x_0) + \int\limits_{x_0}^{x} f'(t)\,dt = f(x_0) + f(x) - f(x_0)$, что верно.

Предположим, что утверждение верно при $n=m$. Докажем его для $n=m+1$. Так как остаточный член $r_{m+1}(x) = \frac{1}{n!}(\mathcal{H})\int\limits_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt = \frac{1}{n!}(\mathcal{R}-\mathcal{S})\int\limits_{x_0}^{x}(x-t)^n\,df^{(n)}(t) = \frac{1}{n!}(x-t)^n f^{(n)}(t)\Big|_{x_0}^{x} - \frac{1}{n!}(\mathcal{R}-\mathcal{S})\int\limits_{x_0}^{x} f^{(n)}(t)\,d(x-t)^n = -\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n + \frac{1}{m!}(\mathcal{R})\int\limits_{x_0}^{x}(x-t)^m f^{(m+1)}(t)\,dt = -\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n + r_m(x)$, согласно формулам сведения интеграла Римана к интегралу Римана-Стилтьеса, а его к интегралу Римана, то

$$r_m(x) = \frac{f^{(m+1)}(x_0)}{(m+1)!}(x-x_0)^{m+1} + r_{m+1}(x).$$

В итоге получаем, что $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{m}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{1}{m!}(\mathcal{R})\int\limits_{x_0}^{x}(x-t)^m f^{(m+1)}(t)\,dt = \sum\limits_{k=0}^{m+1}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{1}{(m+1)!}(\mathcal{R})\int\limits_{x_0}^{x}(x-t)^{m+1}f^{(m+2)}(t)\,dt$. Значит, утверждение теоремы верно для всех $n \in \mathbb{Z}^+$. ▲

Лекция 15 (27.03.20)
Первая и вторая
теоремы о среднем

Первая теорема о среднем

Теорема 1 (для интеграла Римана). *Если функция f ограничена на $[a,b]$, функции fg и g интегрируемы на $[a,b]$ в смысле Римана, g сохраняет знак на $[a,b]$ (т.е. $g(x) \geqslant 0$ на $[a,b]$ или $g(x) \leqslant 0$ на $[a,b]$), то существует λ, $\inf\limits_{[a,b]} f \leqslant \lambda \leqslant \sup\limits_{[a,b]} f$, такое что*

$$\int\limits_a^b fg\,dx = \lambda \int\limits_a^b g\,dx.$$

▼ Рассмотрим случай $\int\limits_a^b g\,dx > 0$. Тогда по свойству сохранения неравенств

$$\inf_{[a,b]} f \cdot \int\limits_a^b g\,dx \leqslant \int\limits_a^b fg\,dx \leqslant \sup_{[a,b]} f \cdot \int\limits_a^b g\,dx$$

и значит,

$$\inf_{[a,b]} f \leqslant \lambda = \frac{\int\limits_a^b fg\,dx}{\int\limits_a^b g\,dx} \leqslant \sup_{[a,b]} f.$$

Если $\int\limits_a^b g\,dx < 0$, то переходя от функции g к функции $-g$ сводим этот случай к предыдущему.

Если же $\int\limits_a^b g\,dx = 0$, то в силу сохранения знака $g = 0$ почти всюду на $[a,b]$, $\int\limits_a^b fg\,dx = 0$ и λ можно брать любым. ▲

Следствие 1. *Если $f \in \mathrm{C}[a,b]$, то существует $\theta \in [a,b]$, такое что $f(\theta) = \lambda$, т.е. в этом случае $\int\limits_a^b fg\,dx = f(\theta) \int\limits_a^b g\,dx$.*

Замечание. В частном случае $g(x) \equiv 1$ теорему 1 и следствие из нее также именуют иногда первой теоремой о среднем.

Для интегралов Стилтьеса имеют место аналогичные результаты.

Теорема 4 (для интеграла Римана-Стилтьеса). *Если функция f ограничена на $[a,b]$ и интегрируема по монотонной функции G на $[a,b]$ в смысле Римана-Стилтьеса, то существует λ, $\inf\limits_{[a,b]} f \leqslant \lambda \leqslant \sup\limits_{[a,b]} f$, такое что*

$$\int\limits_a^b f\,dG = \lambda \int\limits_a^b dG = \lambda(G(b) - G(a)).$$

▼ Рассмотрим случай $\int\limits_a^b dG = G(b)-G(a) > 0$. Тогда в силу сохранения неравенств

$$\inf_{[a,b]} f \cdot \int\limits_a^b dG \leqslant \int\limits_a^b f\,dG \leqslant \sup_{[a,b]} f \cdot \int\limits_a^b dG$$

и значит,

$$\inf_{[a,b]} f \leqslant \lambda = \frac{\int\limits_a^b f\,dG}{G(b)-G(a)} \leqslant \sup_{[a,b]} f.$$

Если $G(b) - G(a) < 0$, то, переходя от функции G к функции $-G$, сводим этот случай к предыдущему.

Если $G(b) - G(a) = 0$, то G постоянна, интеграл от любой функции по G равен нулю и λ можно брать любым. ▲

Следствие 2. *Если $f \in \mathrm{C}[a, b]$, то существует $\theta \in [a, b]$, такое что $f(\theta) = \lambda$, т.е. в этом случае $\int\limits_a^b f\,dG = f(\theta)\int\limits_a^b dG = f(\theta)(G(b) - G(a))$.*

Вторая теорема о среднем

Теорема 5 (для интеграла Римана). *Если функция $f \in \mathcal{R}[a, b]$, а g — монотонная функция на $[a, b]$, то существует такое $\xi \in [a, b]$, что*

$$(\mathcal{R}) \int\limits_a^b fg\,dx = g(a) \int\limits_a^\xi f\,dx + g(b) \int\limits_\xi^b f\,dx.$$

Если впридачу g неотрицательна и невозрастает, то существует такое $\zeta \in [a, b]$, что

$$(\mathcal{R}) \int\limits_a^b fg\,dx = g(a) \int\limits_a^\zeta f\,dx,$$

а если g неотрицательна и неубывает, то существует такое $\zeta \in [a, b]$, что

$$(\mathcal{R}) \int\limits_a^b fg\,dx = g(b) \int\limits_\zeta^b f\,dx.$$

Для интеграла Римана–Стилтьеса имеет место аналогичный результат.

Теорема 6 (для интеграла Римана-Стилтьеса). *Если функция $F \in \mathrm{C}[a, b]$, а g — монотонная функция на $[a, b]$, то существует такое $\xi \in [a, b]$, что*

$$(\mathcal{R}-\mathcal{S}) \int\limits_a^b g\,dF = g(a) \int\limits_a^\xi dF + g(b) \int\limits_\xi^b dF =$$
$$= g(a)(F(\xi) - F(a)) + g(b)(F(b) - F(\xi)).$$

Если вдобавок g неотрицательна и невозрастает, то существует такое $\zeta \in [a,b]$, что

$$(\mathcal{R}-\mathcal{S}) \int\limits_a^b g\,dF = g(a) \int\limits_a^\zeta dF = g(a)(F(\zeta)-F(a)),$$

а если g неотрицательна и неубывает, то существует такое $\zeta \in [a,b]$, что

$$(\mathcal{R}-\mathcal{S}) \int\limits_a^b g\,dF = g(b) \int\limits_\zeta^b dF = g(b)(F(b)-F(\zeta)).$$

▼ Докажем эти две теоремы.

Если $F(x)$ — неопределенный интеграл f, то по теореме о сведении интеграла Римана к интегралу Римана–Стилтьеса

$$(\mathcal{R}) \int\limits_a^b fg\,dx = (\mathcal{R}-\mathcal{S}) \int\limits_a^b g\,dF$$

и утверждения теоремы 5 следуют из соответствующих утверждений теоремы 6, к доказательству которой приступим.

Так как g монотонна, а F непрерывна на $[a.b]$, то g интегрируема по F на $[a.b]$ в смысле Римана–Стилтьеса. По формуле интегрирования по частям

$$\int\limits_a^b g\,dF = g(b)F(b) - g(a)F(a) - \int\limits_a^b F\,dg.$$

Если g неубывает на $[a,b]$, то по свойству сохранения неравенств

$$\min_{[a,b]} F \cdot \int\limits_a^b dg \leqslant \int\limits_a^b F\,dg \leqslant \max_{[a,b]} F \cdot \int\limits_a^b dg$$

и значит, в силу непрерывности F существует такое $\xi \in [a,b]$, что

$$\int\limits_a^b F\,dg = F(\xi) \int\limits_a^b dg = F(\xi)(g(b)-g(a)).$$

Отсюда получаем равенство

$$\int\limits_a^b g\,dF = g(b)F(b) - g(a)F(a) - \int\limits_a^b F\,dg =$$
$$= g(a)(F(\xi)-F(a)) + g(b)(F(b)-F(\xi)),$$

которое и является утверждением теоремы.

А если g невозрастает, то перейдем от g к $-g$ и сведем этот случай к предыдущему.

Если g неотрицательна и не возрастает на $[a,b]$, то $g(b) \geqslant 0$ и

$$\min_{[a,b]} F \cdot g(b) \leqslant g(b)F(b) \leqslant \max_{[a,b]} F \cdot g(b)$$

и по свойству сохранения неравенств

$$\min_{[a,b]} F \cdot (g(a) - g(b)) \leqslant \int\limits_a^b F\, d(-g) \leqslant \max_{[a,b]} F \cdot (g(a) - g(b)),$$

ведь $\int\limits_a^b d(-g) = g(a) - g(b)$. Складывая написанные неравенства, получим

$$\min_{[a,b]} F \cdot g(a) \leqslant g(b)F(b) - \int\limits_a^b F\, dg \leqslant \max_{[a,b]} F \cdot g(a).$$

Из последнего неравенства и из непрерывности F следует, что существует такое $\zeta \in [a,b]$, что

$$g(a)F(\zeta) = g(b)F(b) - \int\limits_a^b F\, dg,$$

т.е.

$$\int\limits_a^b g\, dF = g(b)F(b) - g(a)F(a) - \int\limits_a^b F\, dg == g(a)(F(\zeta) - F(a)).$$

Случай, когда g неотрицательна и неубывает рассматривается аналогично. Он также может быть сведет к предыдущему случаю рассмотрением функций $f(-x)$ и $g(-x)$ на отрезке $[-b,-a]$. ▲

Лекция 16 (07.04.20)
Несобственные интегралы

Несобственные интегралы. Определения и простейшие свойства

Определение 1. Если функция f определена на полуотрезке $[a,b)$, где $a \in \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$ (т.е. a и b из $\mathbb{R}$ и $a < b$ или $a \in \mathbb{R}$, $b = +\infty$), интегрируема в одном из двух смыслов (по Риману или по Курцвейлю–Хенстоку) на любом $[a,b']$ при $b' \in (a,b)$ и существует

$$\lim_{b' \to b-0} \int\limits_a^{b'} f\, dx,$$

то этот предел называют **несобственным интегралом** от f на (по) $[a,b)$ (или на (по) $[a,b]$ для $b \neq +\infty$) в соответствующем смысле и обозначают

$$\int\limits_a^b f\, dx \text{ или } \int\limits_{[a,b)} f\, dx.$$

Аналогично, если функция f определена на полуотрезке $(a, b]$, где $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$, интегрируема в одном из двух смыслов (по Риману или по Курцвейлю–Хенстоку) на любом $[a', b]$ при $a' \in (a, b)$ и существует

$$\lim_{a' \to a+0} \int\limits_{a'}^{b} f\, dx,$$

то этот предел называют **несобственным интегралом** от f на (по) $(a, b]$ (или на (по) $[a, b]$ для $a \neq -\infty$) в соответствующем смысле и обозначают

$$\int\limits_{a}^{b} f\, dx \text{ или } \int\limits_{(a,b]} f\, dx.$$

В первом случае говорят про несобственный интеграл **с особенностью** в b, а во втором случае про несобственный интеграл **с особенностью** в a.

О несобственном интеграле Римана

Теорема 1. *Если функция f интегрируема в несобственном смысле на $[a, b)$ (с особенностью в точке b) по Риману и ограничена на $[a, b)$, $b \neq +\infty$, то при любом ее доопределении в точке b она будет интегрируема по Риману на $[a, b]$ и интеграл Римана по $[a, b]$ будет совпадать с несобственным интегралом по $[a, b)$.*

▼ Возьмем последовательность точек $b'_n \in [a, b)$, $b'_n \to b$ при $n \to \infty$. Из условия интегрируемости f на $[a, b'_n]$ и критерия интегрируемости Лебега получаем, что f непрерывна п.в. (почти всюду) на $[a, b'_n]$, а значит, по свойству „не более чем счетное объединение множеств меры нуль — множество меры нуль, и на $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} [a, b'_n] = [a, b)$. При любом дооопределении в точке b функция f останется ограниченной и непрерывной п.в. на $[a, b)$, а значит, и на $[a, b]$. Но тогда по критерию Лебега f будет интегрируема по Риману на $[a, b]$. Из свойства непрерывности интеграла Римана с переменным верхним пределом следует совпадение интеграла Римана с несобственным интегралом. ▲

Аналогичная теорема справедлива и для интегралов с особенностью в точке a на полуотрезке $(a, b]$. То же самое можно говорить и о всех дальнейших утверждениях про несобственные интегралы, которые будут формулироваться только для интегралов с особенностью в точке b на полуотрезке $[a, b)$, но их очевидные аналоги имеют место и для несобственных интегралов с особенностью в точке a на полуотрезке $(a, b]$.

Стоит также отметить, что в случае конечной точки b по доказанной теореме представляют интерес для несобственного интегрирования только функции неограниченные на $[a, b)$, а значит, и на $[b', b)$ для любого $b' \in (a, b)$.

Критерий Коши несобственной интегрируемости

Всюду дальше считаем, что функция f определена на полуотрезке $[a, b)$, где $a \in \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$, и интегрируема на любом $[a, b']$ при $b' \in (a, b)$ по Риману.

Определение 2. Функция f удовлетворяет **условию Коши несобственной интегрируемости** на $[a, b)$ (с особенностью в b), если f определена на $[a, b)$, интегрируема на любом $[a, b']$ при $b' \in (a, b)$ по Риману и

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists B_\delta(b)\ \forall b', b'' \in B_\delta(b) \cap [a, b): \quad \left| \int\limits_{b'}^{b''} f\, dx \right| < \varepsilon$$

или, что эквивалентно,

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \tilde{b} \in [a, b)\ \forall b', b'' \in (\tilde{b}, b): \quad \left| \int\limits_{b'}^{b''} f\, dx \right| < \varepsilon.$$

Эквивалентность очевидна, если отождествить $\tilde{b}$ с левым концом промежутка $B_\delta(b) \cap [a, b)$.

Теорема 2. *Для интегрируемости функции f в несобственном смысле на $[a, b)$ (с особенностью в b) по Риману необходимо и достаточно выполнения условия Коши несобственной интегрируемости для f на $[a, b)$ для интеграла Римана.*

▼ Пусть $F(x) = \int\limits_a^x f\, dx$ — неопределенный интеграл. Так как $\int\limits_{b'}^{b''} f\, dx = F(b'') - F(b')$, то приведенный критерий Коши — переформулировка критерия Коши существования предела функции F (в точке b по множеству $[a, b)$,

$$\lim_{b' \to b-0} F(b') = \lim_{b' \to b-0} \int\limits_a^{b'} f\, dt.$$

Значит, утверждение теоремы верно. ▲

Примеры

а) Интеграл с особенностью в точке $+\infty$

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-x} dx = \lim_{b' \to +\infty} \int\limits_0^{b'} e^{-x} dx = \lim_{b' \to +\infty} \left(1 - e^{-b'}\right) = 1.$$

б) Интеграл с особенностью в точке $+\infty$

$$\int\limits_1^{+\infty} x^\alpha dx = \lim_{b' \to +\infty} \int\limits_1^{b'} x^\alpha dx = \begin{cases} \lim\limits_{b' \to +\infty} \left(\frac{(b')^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+1} \right), & \alpha \neq -1, \\ \lim\limits_{b' \to +\infty} \ln b', & \alpha = -1. \end{cases}$$

Легко видеть, что при $\alpha + 1 < 0$ предел существует и равен $-\frac{1}{\alpha+1}$, при $\alpha + 1 \geqslant 0$ предел не существует.

в) Интеграл с особенностью в точке 0

$$\int\limits_0^1 x^\alpha dx = \lim_{a' \to +0} \int\limits_{a'}^1 x^\alpha dx = \begin{cases} \lim\limits_{a' \to +0} \left(\frac{1}{\alpha+1} - \frac{(a')^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right), & \alpha \neq -1, \\ \lim\limits_{a' \to +0} -\ln a', & \alpha = -1. \end{cases}$$

▼ Легко видеть, что при $\alpha + 1 > 0$ предел существует и равен $\frac{1}{\alpha+1}$, при $\alpha + 1 \leqslant 0$ предел не существует. Отметим, что при $\alpha \geqslant 0$ $x^\alpha \in \mathcal{R}[0,1]$. ▲

Еще отметим, что пользуясь теоремой о замене переменной в интеграле можно любой несобственный интеграл (даже по бесконечному полуотрезку) сводить к несобственному интегралу по $[0,1)$. Для случая конечного полуотрезка $[a,b)$ подходит замена $\varphi(t) = a + (b-a)t$, а если $b = \infty$, то замена $\varphi(t) = a - 1 + \frac{1}{1-t}$.

Определение 3. Если конечный несобственный интеграл существует, то говорят, что он **сходится**, если не существует, то говорят, что он **не сходится** или **расходится**.

Абсолютная сходимость несобственного интеграла

Определение 4. Несобственный интеграл от f на $[a,b)$ **сходится абсолютно**, если f интегрируема на любом $[a,b'] \subset [a,b]$ в соответствующем смысле и сходится интеграл от абсолютной величины подынтегральной функции $|f|$ на $[a,b)$.

Теорема 3. *Абсолютно сходящийся интеграл сходится (т.е. если несобственный интеграл от f на $[a,b)$ сходится абсолютно, то он сходится).*

▼ Если интеграл абсолютно сходится, то функция $|f|$ удовлетворяет условию Коши несобственной интегрируемости на $[a,b)$, а тогда в силу неравенства

$$\left|\int\limits_{b'}^{b''} f\,dx\right| \leqslant \int\limits_{b'}^{b''} |f|\,dx$$

при $a \leqslant b' \leqslant b'' < b$ и функция f удовлетворяет условию Коши несобственной интегрируемости на $[a,b)$ и, значит, несобственный интеграл от f на $[a,b)$ сходится. ▲

Определение 5. Если несобственный интеграл от f на $[a,b)$ сходится, но не сходится абсолютно, то говорят, что он сходится **условно**.

Признаки сравнения

Теорема 4. *Пусть функции f и g определены на $[a,b)$, интегрируемы по Риману на любом $[a,b'] \subset [a,b)$ и $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ на $[a,b)$. Тогда из сходимости несобственного интеграла $\int\limits_{[a,b)} g\,dx$ Римана следует сходимость несобственного интеграла $\int\limits_{[a,b)} f\,dx$ (в соответствующем смысле) и неравенство*

$$0 \leqslant \int\limits_{[a,b)} f\,dx \leqslant \int\limits_{[a,b)} g\,dx,$$

а из расходимости интеграла $\int\limits_{[a,b)} f\,dx$ следует расходимость интеграла $\int\limits_{[a,b)} g\,dx$.

▼ Если интеграл $\int\limits_{[a,b)} g\,dx$ сходится, то для функции g выполнено условие Коши несобственной интегрируемости на $[a,b)$, а в силу неравенства

$$0 \leqslant \int\limits_{b'}^{b''} f\,dx \leqslant \int\limits_{b'}^{b''} g\,dx,$$

при $a \leqslant b' \leqslant b'' < b$ и функция f удовлетворяет условию Коши несобственной интегрируемости на $[a,b)$ и, значит, несобственный интеграл от f на $[a,b)$ сходится. Полагая в написанном неравенстве $b' = a$ и устремляя b'' к b получаем, что

$$0 \leqslant \int\limits_{[a,b)} f\,dx \leqslant \int\limits_{[a,b)} g\,dx.$$

Из доказанного видно, что если интеграл $\int\limits_{[a,b)} f\,dx$ расходится, то интеграл $\int\limits_{[a,b)} g\,dx$ сходится не может. ▲

Замечание 1. *В теореме достаточно выполнения неравенства* $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ *на* $[a',b)$ *для некоторого* $a' \in (a,b)$.

▼ *Действительно, в силу равенства*

$$\int\limits_a^{b'} f\,dx = \int\limits_a^{a'} f\,dx + \int\limits_{a'}^{b'} f\,dx$$

при $b' \to b-0$ *пределы первого и последнего из интегралов одновременно существуют или не существуют. Значит,* f *интегрируема на* $[a,b)$ *тогда и только тогда, когда интегрируема на* $[a',b)$. *Отсюда и из аналогичного утверждения для функции* g *следует справедливость первой части замечания.* ▲

Теорема 5. *Пусть функции* f *и* g *определены и строго положительны на* $[a,b)$, *интегрируемы по Риману на любом* $[a,b'] \subset [a,b)$ *и*

$$0 < C_1 \leqslant \frac{f(x)}{g(x)} \leqslant C_2 < \infty$$

на $[a,b)$. *Тогда несобственные интегралы от этих функций одновременно сходятся или расходятся.*

▼ *Так как* $f(x) \leqslant C_2 g(x)$ *и* $g(x) \leqslant \frac{1}{C_1} f(x)$ *на* $[a,b)$, *то по предыдущей теореме несобственные интегралы от функций* f *и* g *одновременно сходятся или расходятся на* $[a,b)$. ▲

Замечание 2. *Как и в предыдущей теореме, достаточно выполнения неравенства* $0 < C_1 \leqslant \frac{f(x)}{g(x)} \leqslant C_2 < \infty$ *на* $[a',b)$ *для некоторого* $a' \in (a,b)$.

Признаки Абеля и Дирихле

Теорема 6 *(признак Абеля). Если существует несобственный интеграл Римана от функции* f *на* $[a,b)$, *а* φ — *VB-функция на* $[a,b)$, *то сходится несобственный интеграл Римана от функции* $f\varphi$ *на* $[a,b)$.

Теорема 7 *(признак Дирихле). Если интегралы Римана* $\int\limits_a^x f\,dt$ *существуют и ограничены (как функции от* x*) на* $[a,b)$, *а* φ — *VB-функция на* $[a,b)$ *и* $\lim\limits_{x\to b-0} \varphi(x) = 0$, *то сходится несобственный интеграл Римана от функции* $f\varphi$ *на* $[a,b)$.

▼ *Для обеих теорем проведем доказательство одновременно. Достаточно доказать, что существует* $\lim\limits_{b'\to b-0} (\mathcal{R}) \int\limits_a^{b'} f\varphi\,dt$. *Пусть* $a \leqslant b' \leqslant b'' < b$,

$$(\mathcal{R}) \int\limits_{b'}^{b''} f\varphi\,dx = (\mathcal{R}-\mathcal{S}) \int\limits_{b'}^{b''} \varphi\,dF = F(b'')\varphi(b'') - (\mathcal{R}-\mathcal{S}) \int\limits_{b'}^{b''} F\,d\varphi,$$

где F такая первообразная f, что $F(b')=0$.

В признаке Абеля f интегрируема на $[a,b)$, а значит, удовлетворяет признаку Коши несобственной интегрируемости, для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $\tilde{b}\in[a,b)$, что для любых $b',b''\in(\tilde{b},b)$ выполняется неравенство $\left|\int\limits_{b'}^{b''} f\,dx\right|<\varepsilon$, а значит, $F(b'')<\varepsilon$ и $F(x)<\varepsilon$ на $[b',b'']$. Получаем оценку

$$\left|(\mathcal{R})\int\limits_{b'}^{b''} f\varphi\,dx\right|<\varepsilon\sup_{[a,b)}|\varphi|+\varepsilon\operatorname*{Var}_{[a,b)}\varphi=\left(\sup_{[a,b)}|\varphi|+\operatorname*{Var}_{[a,b)}\varphi\right)\varepsilon.$$

По критерию Коши несобственный интеграл от функции $f\varphi$ по $[a,b)$ существует.

По определению вариации для любого $\varepsilon>0$ существует такой упорядоченный в порядке возрастания конечный набор точек $D=\{a_i\}_{i=0}^n$ из $[a,b)$, что $\sum\limits_{i=1}^n|\varphi(a_i)-\varphi(a_{i-1})|>\operatorname*{Var}\limits_{[a,b)}\varphi-\varepsilon$, тогда $\operatorname*{Var}\limits_{[a,a_n]}>\operatorname*{Var}\limits_{[a,b)}\varphi-\varepsilon$, а по аддитивности вариации по отрезкам для любого $b''\in[a_n,b)$ $\operatorname*{Var}\limits_{[a_n,b'']}\varphi<\varepsilon$. По условию $\lim\limits_{x\to b-0}\varphi(x)=0$. Следовательно, для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $\tilde{b}\in[a,b)$, что для любого $b''\in(\tilde{b},b)$ выполняется неравенство $\varphi(b'')<\varepsilon$ и что для любых $b',b''\in(\tilde{b},b)$ выполняется неравенство $\operatorname*{Var}\limits_{[b',b'']}\varphi<\varepsilon$. Пользуясь ограниченностью вариации по подмножеству и тем, что $F(x)=\int\limits_{b'}^{x} f\,dt=\left(\int\limits_a^x-\int\limits_a^{b'}\right)f\,dt$ и, значит, $|F(x)|\leqslant 2\sup\limits_{x\in[a,b)}\left|\int\limits_a^x f\,dt\right|$, получаем оценку

$$\left|(\mathcal{R})\int\limits_{b'}^{b''} f\varphi\,dx\right|\leqslant|F(b'')|\varepsilon+\sup_{[b',b'']}|F|\varepsilon\leqslant 4\sup_{x\in[a,b)}\left|\int\limits_a^x f\,dt\right|\varepsilon,$$

По критерию Коши несобственный интеграл от функции $f\varphi$ по $[a,b)$ существует.
▲