СОДЕРЖАНИЕ И ТЕХНОЛОГИИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ В ВУЗЕ

УДК 517.31

ОБ АКТУАЛЬНЫХ ПОДХОДАХ К ПРЕПОДАВАНИЮ ТЕМЫ «НЕОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ»

А. В. Бегунц, Д. В. Горяшин

Механико-математический факультет МГУ имени М. В. Ломоносова
Россия, 119991, г. Москва, Ленинские горы, Главное здание МГУ;
e-mail: ab@rector.msu.ru, goryashin@mech.math.msu.su

В статье описывается подход к преподаванию темы «неопределённый интеграл», основанный на понимании сути интегрирования, а не на отработке стандартных алгоритмов. На примерах демонстрируется зависимость формы ответа от метода интегрирования и области, в которой ищется первообразная. Подчёркивается важность понимания этих особенностей при применении программных средств к задачам интегрирования.

Ключевые слова: математическое образование, неопределённый интеграл, первообразная, интегрирование.

Методы отыскания первообразной функции действительной переменной являются неотъемлемой частью любого курса высшей математики и основой для нахождения точного значения определённого интеграла. Понятие неопределённого интеграла вводится ещё в старших классах средней школы, но наполняется содержательным смыслом именно в высшей школе. Студентам доказывают основные свойства первообразной, учат ключевым приёмам интегрирования, рассматривают конкретные методы отыскания первообразных, применимые к функциям из определённых классов. Многие выполняемые задачи на интегрирование носят алгоритмический, далеко не творческий характер. По нашему мнению, с появлением современных программных продуктов, позволяющих буквально за доли секунды найти первообразную, а также вычислить определённый интеграл, на первый план при работе со студентами выходят задачи, показывающие необходимость понимания сути понятия первообразной и владения основными приёмами интегрирования вне зависимости от наличия или отсутствия возможности для использования современной вычислительной техники, а также исследовательские задачи, позволяющие студентам глубже проникнуть в данную тему и раскрыть свои творческие способности. Кроме того, даже при решении с помощью компьютера задач, требующих громоздких вычислений (например, нахождения большого количества неопределенных коэффициентов), необходимо уметь анализировать и правильно интерпретировать выданный программой ответ, а также понимать, что форма его представления не обязательно оптимальна для тех или иных целей.

Начнём с одного примера на интегрирование рациональных функций (см. [1, задача 1920; 2, задача 199, с. 204]):

$$\int \frac{x^4+1}{x^6+1}\,dx.$$

Студенты, «выполнившие» интегрирование при помощи вычислительной техники (например, с помощью программы Mathematica), без колебаний напишут ответ

$$F(x)=\frac{2}{3}\,\operatorname{arctg} x+\frac{1}{3}\,\operatorname{arctg}\,\frac{x}{1-x^2}$$

(аддитивную константу C мы опустим) и, возможно, приведут правдоподобные выкладки. С другой стороны, для несобственного интеграла по лучу $[0;\,+\infty)$ та же программа даёт следующий ответ:

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{x^4+1}{x^6+1}\,dx=\frac{2\pi}{3}\,.$$

Возникает проблема, ставящая в тупик неподготовленных студентов: с одной стороны, $F'(x)$ и в самом деле равна $\dfrac{x^4+1}{x^6+1}$, а, с другой стороны,

$$F(x)\Big|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{3}\,,$$

поэтому данный несобственный интеграл не мог быть вычислен по формуле Ньютона – Лейбница для указанной функции $F(x)$.

На этом месте как раз уместно подчеркнуть необходимость понимания того, что первообразная функции, непрерывной на промежутке, существует на всём этом промежутке, а значит, мы должны были найти первообразную на всей числовой прямой. Очевидно, функция $F(x)$ таковой не является. Тем не менее, после некоторой «доработки» можно получить верный ответ. В точках ± 1 функция $F(x)$ имеет разрывы первого рода, причём

$$F(1+0)=\frac{2}{3}\cdot\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{2}\,,\quad F(1-0)=\frac{2}{3}\cdot\frac{\pi}{4}+\frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{2}$$

и

$$F(-1+0)=-\frac{2}{3}\cdot\frac{\pi}{4}+\frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{2}\,,\quad F(-1-0)=-\frac{2}{3}\cdot\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{2}\,.$$

Таким образом, функция $F(x)$ в этих точках совершает два скачка величин $\mp\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{\pi}{2}$ соответственно. Значит, если доопределить функцию $F(x)$, положив

$$F(1)=\frac{2}{3}\cdot\frac{\pi}{4}\quad\text{и}\quad F(-1)=-\frac{2}{3}\cdot\frac{\pi}{4}\,,$$

и ввести функцию скачков $\varphi(x)$, равную $\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{\pi}{2}$ на интервале $(-1;\,1)$ и равную нулю вне этого интервала, то ответ к задаче нахождения первообразной функции $\dfrac{x^4+1}{x^6+1}$ на всей числовой прямой можно записать в виде

$$F(x)+\varphi(x)+C,$$

где C — произвольная постоянная. Нестрого говоря, мы «склеили» три первообразные, определённые на промежутках $(-\infty;\,-1)$, $(-1;\,1)$ и $(1;\,+\infty)$, воспользовавшись тем, что каждая из них имела свою произвольную аддитивную постоянную, а разрыв точках ± 1 был именно первого рода.

Конечно, ответ, требующий «склейки» (правда, только в одной точке), мог получиться не только при использовании компьютера, но и при решении задачи вручную, например, следующим образом:

$$\int \frac{x^4+1}{x^6+1}\,dx = \int \frac{(x^2+1)^2-2x^2}{(x^2+1)(x^4-x^2+1)}\,dx =$$

$$= \int \frac{x^2+1}{x^4-x^2+1}\,dx - \int \frac{2x^2\,dx}{x^6+1} = \int \frac{1+\dfrac{1}{x^2}}{x^2-1+\dfrac{1}{x^2}}\,dx - \frac{2}{3}\int \frac{dx^3}{x^6+1} =$$

$$= \int \frac{d\left(x-\dfrac{1}{x}\right)}{\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2+1}\,dx - \frac{2}{3}\operatorname{arctg} x^3 = \operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{x} - \frac{2}{3}\operatorname{arctg} x^3 + C.$$

В любом случае, имеет смысл предложить студентам найти элементарную функцию, являющуюся первообразной на всей числовой прямой. Это можно сделать, например, стандартным методом интегрирования рациональных функций, основанном на разложении её на простейшие дроби. Для данной подынтегральной функции такое разложение имеет вид

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{x^2+\sqrt{3}\,x+1} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{x^2-\sqrt{3}\,x+1}$$

(и, кстати, подсчет коэффициентов в этом разложении как раз и можно поручить компьютеру как сугубо техническую процедуру с однозначным ответом), а интегрирование полученного выражения даёт

$$\frac{2}{3}\operatorname{arctg} x + \frac{1}{3}\left(\operatorname{arctg}(2x+\sqrt{3}) + \operatorname{arctg}(2x-\sqrt{3})\right).$$

Отметим, что первоначальная форма ответа, найденная с помощью компьютера, является «упрощением» этой формы ответа — сумма арктангенсов в скобках заменена на $\operatorname{arctg}\dfrac{x}{1-x^2}$. Понятно, что такая замена (с точностью до константы) возможна отдельно на промежутках, не содержащих точек ± 1, но не на всей числовой прямой. При желании можно попытаться записать сумму всех трёх арктангенсов в виде одного — в результате получится, вероятно, самая экзотическая форма ответа:

$$\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{3x(1-x^2)}{x^4-4x^2+1}\,.$$

Она приводится в книге [3, с. 128] в качестве демонстрации эффекта, который мы уже видели выше: если формально воспользоваться этой первообразной и формулой Ньютона – Лейбница для вычисления определённого интеграла по отрезку [0; 1], то получится 0, в то время как подынтегральная функция положительна.

Другой, более короткий, но и более изобретательный способ нахождения первообразной на всей числовой прямой таков:

$$\int \frac{x^4+1}{x^6+1}\,dx = \int \frac{x^4-x^2+1+x^2}{(x^2+1)(x^4-x^2+1)}\,dx = \\ = \int \frac{dx}{x^2+1} + \int \frac{x^2\,dx}{x^6+1} = \operatorname{arctg} x + \frac{1}{3}\operatorname{arctg} x^3 + C.$$

Здесь мы действовали «в обход» стандартной схемы интегрирования рациональной функции и быстрее получили ответ.

Отметим, что попутно нами было получено, что на каждом из лучей $x<0$ и $x>0$ функция $\operatorname{arctg}\dfrac{x^2-1}{x}$ отличается от суммы $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} x^3$ на некоторую константу. На самом деле, при $x \neq 0$ справедливо равенство

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} x^3 = \operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{x} + \frac{\pi}{2}\operatorname{sgn} x.$$

Аналогично, при $x \neq \pm 1$ выполнено соотношение

$$\operatorname{arctg}(2x+\sqrt{3}) + \operatorname{arctg}(2x-\sqrt{3}) = \operatorname{arctg}\frac{x}{1-x^2} + \frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}(x+1) + \frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}(x-1).$$

Однако эти и иные подобные им формулы для сумм аркфункций выпадают из современных курсов математики, поэтому рассчитывать на их знание даже сильными студентами не приходится. Тем не менее, студентам можно предложить такую задачу: при всех $a>0$ научиться подобным образом выражать функцию $\operatorname{arctg}\dfrac{x^2-1}{ax}$ через арктангенсы и функцию скачков. Зачем это может потребоваться, покажем на примере ещё одной классической задачи, без рассмотрения которой (или её аналога) изучение темы интегрирования обычно не обходится:

$$\int \frac{dx}{x^4+1}$$

(см. 1, задача 1884; 2, задача 189, с. 203; 4, задача 2.6.2]). В книгах [1] и [4] ответ к этой задаче имеет вид

$$\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2},$$

а в книге [2] вместо $\operatorname{arctg}\dfrac{x\sqrt{2}}{1-x^2}$ значится $\operatorname{arctg}\dfrac{x^2-1}{x\sqrt{2}}$. Расширить работу со студентами можно, например, обсудив следующие дополнительные интересные вопросы.

1. Существует ли первообразная подынтегральной функции на всей числовой прямой? (Да.)

2. Являются ли указанные функции первообразными подынтегральной функции на всей числовой прямой? (Нет.)

3. Как следует «скорректировать» каждую из этих первообразных для того, чтобы исправить ситуацию? (Надо доопределить в точках разрыва и прибавить подходящую функцию, компенсирующую скачки в точках разрыва: 2 скачка в первом случае и 1 скачок во втором).

4. Какие методы решения данной задачи приводят к указанным ответам? (Вопрос не такой простой.)

5. Можно ли найти такую элементарную функцию, чтобы она была первообразной подынтегральной функции на всей числовой прямой?

Конечно, ответ на последний вопрос несложен: достаточно просто «честно» взять интеграл методом разложения на простейшие дроби. Полученный ответ будет иметь вид

$$\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\bigl(\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x+1)+\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x-1)\bigr).$$

Также можно обсудить со студентами вопрос о том, почему при любой попытке соединения двух арктангенсов в один происходит потеря этого важного свойства.

Если подынтегральная функция определена не на всей прямой, то возникает вопрос о нахождении первообразных на непересекающихся промежутках, объединение которых совпадает с областью определения подынтегральной функции. В качестве иллюстрации рассмотрим интеграл [2, задача 391, с. 223]

$$\int\frac{dx}{\cos^2 x+\cos x\sqrt{\sin x\cos x}}\,.$$

Программы Maple и Mathematica выдают в качестве ответа весьма громоздкие выражения, содержащие эллиптические функции. Прежде чем приступать к нахождению первообразной, необходимо сначала проанализировать, на каких участках числовой прямой определено подынтегральное выражение. Если $\sin x\cos x\geqslant 0$, $\cos x\neq 0$, то либо

$$2\pi n\leqslant x<\frac{\pi}{2}+2\pi n,$$

либо

$$\pi+2\pi n\leqslant x<\frac{3\pi}{2}+2\pi n,$$

где $n\in\mathbb{Z}$; в первом случае $\sin x$ и $\cos x$ оба неотрицательны, а во втором — неположительны. Кроме того, из второй серии также следует исключить точки $x=\dfrac{5\pi}{4}+2\pi n$, в которых обнуляется знаменатель. Эти серии промежутков не пересекаются, и на каждом из них первообразная находится отдельно.

Полагая $t = \operatorname{tg} x$ при $2\pi n \leqslant x < \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$, имеем

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x + \cos x\sqrt{\sin x\cos x}} = \int \frac{dx}{\cos^2 x(1+\sqrt{\operatorname{tg} x})} = \int \frac{dt}{1+\sqrt{t}} =$$
$$= 2\sqrt{t} - \ln(1+\sqrt{t}) + C,$$

если же $\pi + 2\pi n \leqslant x < \dfrac{3\pi}{2} + 2\pi n$, $x \neq \dfrac{5\pi}{4} + 2\pi n$, то получаем

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x + \cos x\sqrt{\sin x\cos x}} = \int \frac{dx}{\cos^2 x(1-\sqrt{\operatorname{tg} x})} = \int \frac{dt}{1-\sqrt{t}} =$$
$$= -2\sqrt{t} + \ln|1-\sqrt{t}| + C.$$

Мы видим, что на разных участках вид первообразной существенно различается. Схожая ситуация типична и для интегралов, содержащих корень из квадратного трёхчлена, имеющего два корня. Например, в случае интеграла

$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{3x^2+4x}}$$

[2, задача 309, с. 220] первообразные на участках $x < -\dfrac{4}{3}$ и $x > 0$ имеют вид $\arcsin\dfrac{x+2}{2(x+1)}$ и $-\arcsin\dfrac{x+2}{2(x+1)}$ соответственно. В данном случае можно записать общий для всей области определения ответ в следующем виде: $-\arcsin\dfrac{x+2}{2|x+1|} + C$.

Таким образом, рассмотренные задачи являются несложными с технической точки зрения, а на первый план при их решении выходят вопросы анализа области существования подынтегральной функции и учёта этой области при проведении выкладок.

Особую роль при работе со студентами математических специальностей играют исследовательские задачи, позволяющие каждому заинтересовавшемуся данной темой уже на первом курсе совершить маленькое открытие и, возможно, представить результат исследования в качестве краткого доклада на семинаре.

Примером подобной задачи является следующая. Задана элементарная функция $f(x)$. Возможно ли, чтобы на различных промежутках из её области определения первообразные имели существенно различный вид? Более строго говоря, пусть $F_1'(x) = f(x)$ при $x \in (a;\, b)$ и $F_2'(x) = f(x)$ при $x \in (c;\, d)$, причём $F_1(x)$ и $F_2(x)$ также элементарные функции. Может ли быть так, что эти функции принадлежат разным классам (например, одна — тригонометрическая, а другая нет). Опыт показывает, что студенты, придумавшие примеры подобных функций, выходят на более высокий уровень понимания данной темы.

Например, рассмотрим функцию $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{x^4 - 2x^2 + 1}}$. Получим $(\arcsin x)' = f(x)$ при $x \in (0;1)$ и $\bigl(\ln(x + \sqrt{x^2-1})\bigr)' = f(x)$ при $x \in (1;\,2)$. Заметим, что для вычисления определённого интеграла от функции $f(x)$, скажем, по отрезку $[0;\,2]$ (конечно, это будет несобственный интеграл), потребуются обе первообразные, которые надо будет «склеить» в точке 1. Разумеется, две указанные действительнозначные функции фактически являются различными записями одной и той же комплекснозначной функции. В этой связи добавим, что выход в комплексную область в ряде случаев упрощает задачу нахождения первообразной, поскольку все основные элементарные функции являются или рациональными, или их можно выразить через экспоненту и логарифм. Тем не менее, в данной статье мы остаёмся в рамках стандартных курсов и обсуждаем лишь действительнозначные функции.

К исследовательским задачам, безусловно, относятся неопределённые интегралы, зависящие от параметра (см., например, [4, задачи 5.197–5.234]). Выполняя такие задания, студент учится анализировать, внимательно перебирая случаи, и не тратит сил на излишнюю техническую работу.

Ещё один пример проблемы для самостоятельного исследования — отыскание наиболее подходящего метода интегрирования для тех функций, первообразная которых может быть найдена различными способами. В ряде случаев студенты могут прийти к содержательным выводам, выраженным в конкретных указаниях, когда следует предпочесть тот или иной метод. Например, таковы задачи на применение метода неопределённых коэффициентов и метода Остроградского к одной и той же рациональной функции, задачи на интегрирование тригонометрических функций (скажем, вида $\sin^n x \cos^m x$, $n, m \in \mathbb{Z}$), применение тригонометрических и гиперболических подстановок и иных методов при отыскании первообразной функции, содержащей $\sqrt{a^2 - x^2}$, $\sqrt{x^2 - a^2}$, $\sqrt{x^2 + a^2}$.

Мы остановимся на задаче, связанной с интегрированием выражений, содержащих корень из квадратного трёхчлена. В курсы математического анализа и популярные задачники обычно входят подстановки Эйлера (см., например, [1, 4]) и подстановка Абеля (см., например, [2, 4]). Вопрос об выборе конкретной подстановки (даже только подстановки Эйлера в том случае, когда применимы две и более из них) для нахождения данного интеграла может быть весьма интересен для исследовательской работы студентов.

В качестве примера рассмотрим интегралы

$$\int \frac{\sqrt{x^2+2}}{x^2+1}\,dx \quad \text{и} \quad \int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2+x+1}}$$

(см. [1, задачи 1960 и 1966]). Для первого из них особенно эффективна подстановка Абеля, а для второго — (первая) подстановка Эйлера.

Если применить к интегралу

$$\int \frac{\sqrt{x^2+2}}{x^2+1}\,dx$$

подстановку Абеля $\left(\sqrt{x^2+2}\,\right)' = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}} = t$, то он сведётся к такому интегралу от рациональной функции:

$$2\int \frac{dt}{1-t^4} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right| + \operatorname{arctg} t + C = \ln(x+\sqrt{x^2+2}) + \operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{x^2+2}} + C.$$

Если применить к этому же интегралу подстановку Эйлера $\sqrt{x^2+2} = z - x$, то получится интеграл от другой рациональной функции, который также находится нетрудно:

$$\int \frac{z^4+4z^2+4}{z(z^4+4)}\,dz = \int \frac{dz}{z} + \int \frac{4z\,dz}{z^4+4} = \ln|z| + \operatorname{arctg}\frac{z^2}{2} + C =$$

$$= \ln(\sqrt{x^2+2}+x) + \operatorname{arctg}(x^2+1+x\sqrt{x^2+2}) + C.$$

Здесь арктангенс записан в другом виде (точнее, он отличается от арктангенса, возникшего в предыдущем случае, на $\dfrac{\pi}{4}$). Заметим, что самый простой способ найти этот интеграл — применение подстановки $x = \sqrt{2}\operatorname{tg} t$ — приводит к такому же ответу, как в первом случае.

К интегралу

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$$

подстановка Абеля напрямую неприменима. Применение подстановки Эйлера $\sqrt{x^2+x+1} = x + z$ сводит его к интегралу от рациональной функции

$$2\int \frac{z^2+z+1}{z(2z+1)^2}\,dz,$$

который легко находится разложением на простейшие дроби.

Отметим тот факт, что подстановки Эйлера связаны с рациональной параметризацией кривых второго порядка. Поскольку возможность рациональной параметризации кривых является одним из разделов алгебраической геометрии (см., например, [5]), рассмотрение этого аспекта может служить наглядной иллюстрацией взаимосвязи между различными областями математики.

Обсуждение неопределённого интеграла было бы неполным и без вопроса о том, что существуют элементарные функции, первообразные которых неэлементарны. В современных курсах математического анализа этот факт лишь упоминается и приводятся наиболее известные примеры, доказательство же этого утверждения относится, скорее, к алгебре. По нашему мнению, для самостоятельного изучения студентами данная тема достаточно сложна.

Заинтересованному читателю для более детального знакомства с вопросом можно порекомендовать статью [6].

Владение современными программными средствами необходимо современному исследователю (см., например, [7]), но вместе с тем он должен сознавать границы применимости этих средств и разумно относиться к их использованию. Нелишним будет упомянуть и тот факт, что такие программные продукты рассчитаны на профессионала, владеющего теорией функций комплексной переменной, знающего необходимый набор специальных функций и т. п. (зачастую программы дают ответ, содержащий комплекснозначные и специальные функции).

В заключение подчеркнём, что, по нашему мнению, понимание основных методов интегрирования и умение самостоятельно проводить письменные выкладки для нахождения первообразных по-прежнему являются обязательными для студентов математических специальностей и направлений подготовки. Поэтому отход от рутинного прохождения материала (с акцентом на технические преобразования и действия по шаблону), поиск новых постановок учебных задач в классической области, предоставление студентам возможности для самостоятельного исследования будут способствовать наиболее полному усвоению данной темы, стимулируя интерес к предмету и повышая качество математического образования в целом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. Любое издание.
2. Виноградова И. А., Олехник С. Н., Садовничий В. А. Задачи и упражнения по математическому анализу: Пособие для университетов, пед. вузов. 3-е изд., испр. — М.: Дрофа, 2001. Ч. 1: Дифференциальное и интегральное исчисление. 725 с.
3. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том II. — М.: Наука, 1969. 800 с.
4. Кудрявцев Л. Д., Кутасов А. Д., Чехлов В. И., Шабунин М. И. Сборник задач по математическому анализу: Интегралы, ряды: Учеб. пособие для вузов. — М.: Наука, 1986. 528 с.
5. Шафаревич И. Р. Основы алгебраической геометрии. — М.: МЦНМО, 2007. 589 с.
6. Прасолов В. В. Неэлементарность некоторых интегралов элементарных функций // Математическое просвещение. Третья серия. — М.: МЦНМО, 2003. Вып. 7. С. 126–135.
7. Егоров А. И. Тому ли мы учим студентов, что им потребуется в будущем? // Математика в высшем образовании. 2015. Т. 13. С. 17–30.

Поступила 03.09.2016

ON THE CONTEMPORARY APPROACH TO TEACHING OF INDEFINITE INTEGRATION

A. V. Begunts, D. V. Goryashin.

The paper considers the approach to teaching of indefinite integration based on understanding of its essence rather than working out standard algorithms. Various examples showing dependence of the answer form on the domain of integration and on the method employed are given. The importance of appreciation of these features when using software for integration is emphasized.

Keywords: mathematics education, indefinite integral, antiderivative, integration.