СОДЕРЖАНИЕ И ТЕХНОЛОГИИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ В ВУЗЕ

УДК 517.52; 511.42

О ПРИМЕНЕНИИ ТЕОРЕТИКО-ЧИСЛОВЫХ МЕТОДОВ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ СХОДИМОСТИ ЧИСЛОВЫХ РЯДОВ*

А. В. Бегунц, Д. В. Горяшин

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Россия, 119991, г. Москва, Ленинские горы;
e-mail: ab@rector.msu.ru, goryashin@mech.math.msu.su

На примерах, доступных широкому кругу математиков, показывается, каким образом методы и результаты теории чисел и, в частности, теоремы о приближении иррациональных чисел рациональными, применяются при исследовании сходимости числовых рядов. Кратко описывается история вопроса от классических работ до наших дней и указывается возможное направление дальнейших исследований.

Ключевые слова: числовой ряд, сходимость, теория чисел, диофантовы приближения, мера иррациональности.

Начнём с двух примеров числовых рядов, предлагаемых студентам младших курсов в качестве упражнений на применение основных методов исследования рядов на сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \cdot \sin n^2}{n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \sin n^2$$

(см., например, [1, гл. V, задачи 2690 и 2691 соответственно]). Эти задачи вполне стандартны, хотя и решаются с помощью специальных приёмов. Так, для исследования первого ряда нужно заметить, что из равенства

$$\sin n \cdot \sin n^2 = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{n(n-1)}{2} - \cos\frac{n(n+1)}{2}\right)$$

следует равенство

$$\sum_{n=1}^{N} \sin n \cdot \sin n^2 = \frac{1}{2}\left(1 - \cos\frac{N(N+1)}{2}\right),$$

так что данная сумма ограничена при всех N, и поэтому ряд сходится по признаку Дирихле. Чтобы показать, что второй из приведённых рядов расходится, достаточно убедиться в нарушении необходимого условия сходимости, т. е. показать, что $\sin n^2 \not\to 0$, $n \to \infty$.

Однако подобные рассуждения уже не срабатывают в случае естественных обобщений этих рядов, например,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \alpha n \cdot \sin \beta n^2}{n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n^2}{n^p}$$

*Работа выполнена при поддержке гранта НШ-1096.2014.1.

и похожих рядов с косинусами. Более того, в исследовании сходимости таких рядов важную роль начинают играть арифметические свойства параметров (их иррациональность, возможность хорошего приближения рациональными числами и т. д.). В 1914 г. Г. Харди и Дж. Литтлвуд [2] опубликовали исследование рядов вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n^2\pi x)\cos(2\pi n\theta)}{n^p}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^2\pi x)\cos(2\pi n\theta)}{n^p}.$$

Случай рациональных значений x относительно несложен, так как тогда $\cos(n^2\pi x)$ принимает конечное число значений. Если же число x иррационально, то авторы обнаружили, что ответ зависит от того, насколько хорошо x приближается рациональными числами. Для «плохо приближаемых» чисел x (какими, например, являются квадратичные иррациональности) они доказали сходимость таких рядов при $p > \dfrac{1}{2} + \varepsilon$ для любого $\varepsilon > 0$, а среди «хорошо приближаемых» нашли такие значения x, что указанные ряды расходятся даже при $p = 1$. Аналогичная ситуация имеет место для рядов такого же вида, в которых вместо n^2 стоит другая чётная степень n. Интересно отметить, что для нечётных степеней n под знаком синуса или косинуса ситуация совершенно иная: так, Г. И. Архипов и К. И. Осколков [3] доказали, что для нечётных значений k ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^k\pi x)}{n}$$

сходится при *всех* действительных x.

Можно привести и другие примеры рядов вполне классического вида, при исследовании которых не обойтись без применения теоретико-числовых методов (см. [4, 5]):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\cos n\right)^n}{n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2+\cos n}}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^n(\pi x n)}{n^{\alpha}}.$$

Таким образом, небольшие и естественные изменения условий стандартных упражнений по математическому анализу могут приводить к весьма трудным и интересным задачам, актуальность которых сохраняется и в наши дни. Отметим, что, по нашему мнению, упоминание подобных задач на занятиях со студентами наглядно показывает взаимосвязь различных разделов математики и может способствовать росту интереса к предмету.

Цель настоящей статьи — на примерах, доступных широкому кругу математиков, продемонстрировать, каким образом вопросы приближения иррациональных чисел рациональными возникают при решении подобного рода задач и как аппарат теории чисел может применяться при исследовании числовых рядов на сходимость. Мы рассмотрим примеры, связанные с рациональными приближениями знаменитых чисел e и π. В стандартных университетских курсах теории чисел доказывается, что они не только иррациональны, но и трансцендентны (см., например, [6, гл. 4]).

Начнём с примера, использующего рациональные приближения к числу e. Известно (см., например, [1, задача 72]), что для любого натурального числа n справедливо равенство

$$e = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{\theta_n}{n!\,n},$$

где $0 < \theta_n < 1$. Из этого представления числа e, в частности, следует, что оно иррационально. Действительно, в противном случае $e = \dfrac{m}{n}$ при некоторых натуральных m и n, но тогда число $n!\left(e - 2 - \dfrac{1}{2!} - \dfrac{1}{3!} - \ldots - \dfrac{1}{n!}\right) = \dfrac{\theta_n}{n}$ — целое, что невозможно, так как $0 < \theta_n < 1$. Покажем, как это равенство может быть использовано при исследовании сходимости числовых рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\pi n! e), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \sin(2\pi n! e).$$

Взяв в приближении числа e на одно слагаемое больше, имеем

$$\pi n! e = \pi \left(2n! + \frac{n!}{2!} + \frac{n!}{3!} + \ldots + \frac{n!}{(n-2)!} + n + 1 + \frac{1}{n+1} + \frac{\theta_{n+1}}{(n+1)^2} \right)$$

и, обозначая $2M = 2n! + \dfrac{n!}{2!} + \dfrac{n!}{3!} + \ldots + \dfrac{n!}{(n-2)!}$ для некоторого целого M, получаем

$$\begin{aligned} \sin(\pi n! e) &= \sin\left(2\pi M + \pi(n+1) + \frac{\pi}{n+1} + \frac{\pi\theta_{n+1}}{(n+1)^2}\right) = \\ &= (-1)^{n+1} \sin\left(\frac{\pi}{n+1} + \frac{\pi\theta_{n+1}}{(n+1)^2}\right) = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{n+1} + O\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

Таким образом, первый из приведённых рядов сходится условно. Аналогично,

$$\sin(2\pi n! e) = \sin\left(4\pi M + 2\pi(n+1) + \frac{2\pi}{n+1} + \frac{2\pi\theta_{n+1}}{(n+1)^2}\right) = \frac{2\pi}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

поэтому ряд с таким общим членом расходится как гармонический. Отметим, что похожая задача содержится в книге [7] (гл. I, задача 295), однако в ней общий член ряда имеет вид $n \sin(2\pi n! e)$ и стремится к 2π, поэтому ряд, очевидно, расходится, так как не выполнено необходимое условие сходимости. В рассмотренном примере мы фактически заменили число e его рациональным приближением, а погрешность вошла в остаточный член, дав абсолютно сходящийся ряд.

Прежде чем перейти к примеру числового ряда, при исследовании которого естественным образом возникают рациональные приближения к числу π, приведём классический теоретико-числовой факт, известный как теорема Дирихле (см., например, [6, гл. 4, § 2]).

Теорема Дирихле. *Пусть α — действительное число, а τ — натуральное число. Тогда существуют такие целые числа m и n, что выполняются неравенства*

$$\left|\alpha - \frac{m}{n}\right| \leqslant \frac{1}{n\tau}\,, \quad 0 < n \leqslant \tau.$$

В частности, отсюда следует, что для любого иррационального числа α существуют рациональные числа $\frac{m}{n}$ со сколь угодно большими знаменателями, для которых

$$\left|\alpha - \frac{m}{n}\right| \leqslant \frac{1}{n^2}\,.$$

Зачастую необходимость изучения вопроса, насколько хорошо число π может быть приближено рациональными числами, возникает при работе с рядами, содержащими тригонометрические функции. Хорошо известно, что последовательность $|\cos n|$, $n \in \mathbb{N}$, всюду плотна на отрезке $[0;1]$, причём не попадает в его концы. При возведении членов этой последовательности в положительную степень они уменьшаются, поэтому возникает вопрос о таком выборе показателя степени $f(n)$, чтобы ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\cos n)^{f(n)}$ сходился.

Сначала исследуем на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos^n n.$$

Покажем, что его общий член не стремится к нулю. Для этого достаточно доказать, что существует бесконечно много натуральных чисел m, для которых выполняется неравенство

$$|\cos m| \geqslant 1 - \frac{1}{m}\,.$$

В самом деле, тогда $|\cos^m m| \geqslant \left(1 - \frac{1}{m}\right)^m$, а поскольку последовательность $\left(1 - \frac{1}{m}\right)^m$ монотонно возрастает, получаем $|\cos^m m| \geqslant \frac{1}{4}$ при $m > 1$.

Неравенство $|\cos m| \geqslant 1 - \frac{1}{m}$ выполняется тогда и только тогда, когда найдётся такое целое число n, что

$$|m - \pi n| \leqslant \arccos\left(1 - \frac{1}{m}\right).$$

Заметим, что при всех $x \in (0;1)$ справедливо двойное неравенство

$$\sqrt{x} < \arccos(1-x) < 2\sqrt{x}$$

(его правая часть потребуется нам при рассмотрении следующего примера). В самом деле, в нуле все три функции совпадают, а при $x \in (0;1)$ для их производных имеем

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} < \frac{1}{\sqrt{x(2-x)}} < \frac{1}{\sqrt{x}}\,.$$

В силу доказанного неравенства, чтобы показать расходимость ряда, достаточно доказать, что существует бесконечное множество натуральных чисел m, для которых выполнено условие

$$|m - \pi n| \leqslant \frac{1}{\sqrt{m}}\,, \quad \text{или} \quad \left|\pi - \frac{m}{n}\right| \leqslant \frac{1}{n\sqrt{m}}\,.$$

Поскольку число π иррационально, согласно следствию из теоремы Дирихле существует такая бесконечная последовательность рациональных чисел $\dfrac{m}{n}$ с растущими натуральными знаменателями, что $\left|\pi - \dfrac{m}{n}\right| \leqslant \dfrac{1}{n^2}$. Кроме того, при $n \geqslant 4$ для таких m и n выполнены неравенства

$$\frac{1}{n\sqrt{m}} \geqslant \frac{1}{n\sqrt{\pi n + 1}} \geqslant \frac{1}{2n\sqrt{n}} \geqslant \frac{1}{n^2}\,.$$

Значит, неравенство $\left|\pi - \dfrac{m}{n}\right| \leqslant \dfrac{1}{n\sqrt{m}}$ также имеет бесконечно много решений.

Как мы видим, при исследовании рассмотренного ряда существенную роль сыграла иррациональность числа π. Более тонкое теоретико-числовое свойство числа π, а именно, конечность его меры иррациональности, позволяет ответить на следующий вопрос: существуют ли такие целые $\alpha > 0$, чтобы ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \cos^{n^\alpha} n$ сходился?

Определение. *Показателем* (или *мерой*) *иррациональности* действительного числа α называется такое наименьшее число $\mu = \mu(\alpha)$, что для любого $\varepsilon > 0$ существует число $n_0 = n_0(\varepsilon) > 0$, для которого при всех целых числах $n > n_0$ и любых целых m выполнено неравенство

$$\left|\alpha - \frac{m}{n}\right| > \frac{1}{n^{\mu+\varepsilon}}\,.$$

Если такого числа μ не существует, то полагают $\mu(\alpha) = +\infty$, а иррациональное число α в этом случае называется *лиувиллевым числом.*

Знаменитая теорема Рота [8, гл. VI] утверждает, что если α — иррациональное алгебраическое число, то $\mu(\alpha) = 2$. Для трансцендентных чисел выполнено неравенство $\mu(\alpha) \geqslant 2$. Точные значения мер иррациональности многих трансцендентных чисел, в том числе числа π, неизвестны, но для них получены оценки сверху. Наилучшая известная в настоящее время оценка показателя иррациональности числа π доказана в 2010 г. В. Х. Салиховым и имеет вид $\mu(\pi) \leqslant 7{,}6063$ (см. [9]).

Вернёмся к исследованию сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \cos^{n^\alpha} n$. Рассмотрим вспомогательный ряд с общим членом $a_m = \left(1 - \dfrac{1}{m^\beta}\right)^{m^\alpha}$, где $\beta > 0$. Поскольку

$$a_m = e^{m^\alpha \ln\left(1 - \frac{1}{m^\beta}\right)} < e^{-m^{\alpha-\beta}},$$

этот ряд сходится по признаку сравнения при любых $\alpha > \beta$.

Попробуем мажорировать наш ряд вспомогательным рядом. Имеем

$$|\cos m|^{m^\alpha} < a_m \Leftrightarrow |\cos m| < 1 - \frac{1}{m^\beta},$$

что выполняется тогда и только тогда, когда для некоторого натурального n будет иметь место неравенство

$$|m - \pi n| > \arccos\left(1 - \frac{1}{m^\beta}\right).$$

Поскольку при всех $x \in (0;1)$ справедливо неравенство $\arccos(1-x) < 2\sqrt{x}$, достаточно выполнения условия

$$|m - \pi n| > \frac{2}{m^{\beta/2}},$$

то есть

$$\left|\pi - \frac{m}{n}\right| > \frac{2}{m^{\beta/2}\, n}.$$

Из приведённой выше оценки показателя иррациональности числа π вытекает, что для всех натуральных чисел $n > n_0$ и любых целых m справедливо неравенство

$$\left|\pi - \frac{m}{n}\right| > \frac{2}{n^{7{,}7}}.$$

Зафиксируем произвольное натуральное число $n > n_0$. Пусть натуральное число k таково, что $\dfrac{k}{n} < \pi < \dfrac{k+1}{n}$. Тогда если $m < k-1$ или $m > k+2$, то

$$\left|\pi - \frac{m}{n}\right| > \frac{2}{n} > \frac{2}{m^{\beta/2}\, n}.$$

Если же m — одно из чисел $k-1$, k, $k+1$, $k+2$, то $\left|\pi - \frac{m}{n}\right| < \frac{2}{n}$, поэтому $\pi n - 2 < m$, откуда $m > n$, а значит,

$$\left|\pi - \frac{m}{n}\right| > \frac{2}{n^{7{,}7}} > \frac{2}{m^{\beta/2} n},$$

где последнее неравенство выполнено, например, при $\beta = 13{,}4$.

Итак, мы мажорировали исследуемый ряд вспомогательным рядом и установили, что при $\alpha > 13{,}4$ ряд сходится (абсолютно). В частности, сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos^{n^{14}} n.$$

Подчеркнём, что добавление множителя x к аргументу тригонометрической функции (как это сделано в некоторых из приведённых во введении рядов) может существенно повлиять на результат исследования. Например, очевидно, что при $x = \pi$ ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos^{n^\alpha} xn$$

не будет сходиться ни при каком α, а если $x = \dfrac{\pi}{e}$, то аналогичные рассуждения с привлечением известного равенства $\mu(e) = 2$ позволяют установить, что ряд сходится уже при $\alpha > 2$.

В заключение отметим, что на настоящий момент вопросы сходимости многих рядов, тесно связанных с диофантовыми приближениями, остаются открытыми. Возможно, самый известный среди них — ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 \sin^2 n}\,,$$

исследование которого, скорее всего, потребует привлечения более глубоких результатов о свойствах числа π (например, из его сходимости следует оценка $\mu(\pi) \leqslant 2{,}5$, см. [10]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. Любое издание.
2. Hardy G. H., Littlewood J. E. Some problems of Diophantine approximation // Acta Mathematica. 1914. V. 37. P. 155–191.
3. Архипов Г. И., Осколков К. И. Об одном специальном тригонометрическом ряде и его применениях // Мат. сборник. 1987. Т. 134, № 2. С. 147–157.
4. Laeng E., Pata V. A convergence-divergence test for series of nonnegative terms // Expositiones Mathematicae. 2011. V. 29, № 4. P. 420–424.
5. Begunts A., Goryashin D. Diophantine Approximations and the Convergence of Certain Series // Int. J. of Math. and Comp. Sci. 2015. V. 10, № 2. P. 157–173.
6. Галочкин А. И., Нестеренко Ю. В., Шидловский А. Б. Введение в теорию чисел. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984. 152 с.
7. Виноградова И. А., Олехник С. Н., Садовничий В. А. Задачи и упражнения по математическому анализу. В 2-х кн. Кн. 2. Ряды, несобственные интегралы, кратные и поверхностные интегралы: Учеб. пособие для университетов, пед. вузов. 2-е изд., перераб. — М.: Высш. шк., 2000. 712 с.
8. Касселс Дж. В. С. Введение в теорию диофантовых приближений. — М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1961. 213 с.
9. Салихов В. Х. О мере иррациональности числа π // Матем. заметки. 2010. Т. 88, вып. 4. С. 583–593.
10. Alekseyev M. A. On Convergence of the Flint Hills Series: `http://arxiv.org/abs/1104.5100`, 2011.

Поступила 08.08.2015

ON APPLICATIONS OF NUMBER-THEORETICAL METHODS TO TESTING FOR THE CONVERGENCE OF INFINITE SERIES

A. V. Begunts, D. V. Goryashin

Using examples which are intelligible to wide mathematical community we show how number-theoretical methods and in particular the theorems on approximation of irrational numbers by rational ones are applied to testing for the convergence of some infinite series. Short overview of the background of the problem from classic works to the present day is given and future perspectives of research are pointed out.

Keywords: infinite series, convergence, number theory, Diophantine approximation, irrationality measure.