

1. Числовые ряды. Критерий Коши сходимости ряда. Операции над рядами. Абсолютная и условная сходимости.
2. Ряды с неотрицательными членами. Признаки сходимости: ограниченность частичных сумм, признаки сравнения.
3. Признаки сходимости Даламбера, Коши, интегральный Коши-Маклорена.
4. Признаки сходимости Куммера, Раабе и Гаусса.
5. Ряды с членами произвольных знаков и ряды комплексных чисел. Признак сходимости Лейбница.
6. Преобразование Абеля. Признаки сходимости Абеля и Дирихле.
7. Теорема Коши о перестановках членов ряда.
8. Теорема Римана о перестановках членов ряда.
9. Умножение числовых рядов. Теоремы Коши и Мертенса.
10. Бесконечные произведения, условия сходимости.
11. Разложение функции $\sin x$ в бесконечное произведение.
12. Метод суммирования Чезаро (средних арифметических), его вполне регулярность и необходимое условие суммируемости.
13. Метод суммирования Абеля. Теорема Фробениуса о суммируемости методом Абеля рядов, суммируемых методом Чезаро. Вполне регулярность метода Абеля.
14. Критерий Маркова-Гордона перестановки предельных переходов.
15. Функциональные последовательности и ряды. Равномерная сходимост. Операции с равномерной сходимостью. Критерий Коши равномерной сходимости.
16. Признаки Вейерштрасса и Дини равномерной сходимости.
17. Признаки Лейбница, Абеля и Дирихле равномерной сходимости.
18. Теорема об изменении порядка пределов и следствия из неё. Полнота пространства $C(K)$.
19. Почленное дифференцирование и интегрирование функциональных последовательностей и рядов.
20. Критерий компактности Хаусдорфа.
21. Равностепенная непрерывность. Теорема Арцеля-Асколи.
22. Степенные ряды. Теорема Коши-Адамара. Непрерывность суммы степенного ряда.
23. Дифференцируемость и интегрируемость суммы степенного ряда.
24. Степенной ряд как ряд Тейлора своей суммы. Теорема единственности. Теорема Абеля о равномерной сходимости на отрезке $[0, z_0]$, где z_0 — точка сходимости степенного ряда.

Список задач к коллоквиуму.

1. Пусть все $a_n > 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$, $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$. Доказать, что $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n} = \infty$, а для $\varepsilon > 0$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^{1+\varepsilon}} < \infty$.
2. Пусть функция $f(x)$ неотрицательна и интегрируема на любом отрезке из $[0, +\infty)$ по Риману, $\int_0^{\infty} f(x) dx = \infty$, $F(x) = \int_0^x f(t) dt + 1$. Доказать, что $\int_0^{\infty} \frac{f(x)}{F(x)} dx = \infty$, а для $\varepsilon > 0$ $\int_0^{\infty} \frac{f(x)}{F^{1+\varepsilon}(x)} dx < \infty$.
3. Пусть все $a_n > 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$, $r_{n-1} = \sum_{k=n}^{\infty} a_k$. Доказать, что $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{r_{n-1}} = \infty$, а для $\varepsilon > 0$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{r_{n-1}^{1+\varepsilon}} < \infty$.
4. Пусть функция $f(x) > 0$ и интегрируема на любом отрезке из $[0, +\infty)$ по Риману, $\int_0^{\infty} f(x) dx < \infty$, $R(x) = \int_x^{\infty} f(t) dt$. Доказать, что $\int_0^{\infty} \frac{f(x)}{R(x)} dx = \infty$, а для $\varepsilon > 0$ $\int_0^{\infty} \frac{f(x)}{R^{1+\varepsilon}(x)} dx < \infty$.
5. Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$ сходится неравномерно на $(0, 2\pi)$.
6. Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ сходится неравномерно на $[0, 2\pi]$.
7. Доказать, что частичные суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ ограничены в совокупности.
8. Доказать, что ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2 \ln n}$ дифференцируем на \mathbb{R} и его производная равна $-\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{n \ln n}$.
9. Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ интегрируем на $[0, \pi]$ по Риману и указать величину этого интеграла.
10. Доказать, что несобственный интеграл Римана $\int_{(0, \pi/2)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n} dx$ существует и вычислить его.