Теория ортогональных рядов
и её обобщения

Свойства ортоподобных разложений

2017 г. Т.П. Лукашенко

Лекции 2 семестра 2020г.

СОДЕРЖАНИЕ
прочитанных лекций

Базисы в банаховых пространствах и их свойства

Нормированное пространство

Определение 1. Нормированным пространством называется пара $(N, \|\cdot\|)$, где N — линейное пространство над полем $\mathbb{R}$ действительных или $\mathbb{C}$ комплексных чисел, а $\|\cdot\|$ — **норма** или **длина** вектора, функция из N в $\mathbb{R}$ (т.е. функция точки из N со значениями в множестве действительных чисел) со следующими свойствами:

1)$\forall x, \in N: \ \|x\| \geqslant 0$ и $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$;

2) $\forall x \in N \ \forall \alpha$ из $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ (в зависимости от того, над каким полем N является линейным пространством): $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$;

3) $\forall x, y \in N: \|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ — неравенство треугольника.

Всякое нормированное пространство является метрическим пространством с метрикой $\rho(x, y) = \|x - y\|$.

Определение 2. Последовательность $\{a_n\}$ элементов нормированного пространства называется **фундаментальной** или **последовательностью Коши**, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall i, j > N: \quad \rho(a_i, a_j) = \|a_i - a_j\| < \varepsilon.$$

Утверждение 1. *В нормированном пространстве любая сходящаяся последовательность является последовательностью Коши.*

Определение 3. Нормированное пространство называется **банаховым**, если в нем любая последовательность Коши сходится.

Определение 4. Система элементов $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ банахова пространства X называется **базисом**, если для любого элемента $x \in X$ существует единственный ряд

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k(x)e_k = x, \quad a_k(x) \text{ из } \mathbb{R} \text{ или } \mathbb{C}, \ k \in \mathbb{N}.$$

Любая замкнутая (полная) ортонормированная система в гильбертовом пространстве является базисом.

Лемма 1. *Если $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ — базис банахова пространства X, то величина*

$$\|x\| = \sup_n \left\| \sum_{k=1}^{n} a_k(x)e_k \right\|$$

для любого $x \in X$ удовлетворяет оценке

$$\|x\| \leqslant \|x\| = \sup_n \left\| \sum_{k=1}^{n} a_k(x) e_k \right\| \leqslant C\|x\|,$$

с некоторой постоянной C.

Доказательство. Так как последовательность частичных сумм ряда $S(x) = \sum_k a_k(x)e_k = x$ сходится, то она ограничена и, значит, для любого $x \in X$ конечен $\sup_n \|S_n(x)\| \geqslant \|x\|$. Это позволяет ввести в X новую норму

$$\|x\| = \sup_n \left\| \sum_{k=1}^{n} a_k(x) e_k \right\|.$$

Покажем, что X — банахово пространство с этой нормой.

Пусть x_n последовательность Коши (фундаментальная) в X по новой норме, $n \in \mathbb{N}$, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n, m > N : \quad \|x_n - x_m\| < \varepsilon.$$

Каждая последовательность частичных сумм $S_k(x_n)$ (по n) является последовательностью Коши в банаховом пространстве X по старой норме и, значит, сходится, существует предел S_k. Отсюда следует, что существует предел $a_k(x_n)e_k = S_k(x_n) - S_{k-1}(x_n)$, а поскольку $e_k \neq 0$, то существует предел $a_k = \lim_{n\to\infty} a_k(x_n)$, $k \in \mathbb{N}$. Рассмотрим ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k$. Из неравенства выше получаем, что

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N : \quad \sup_m \|S_m(x_n) - S_m\| \leqslant \varepsilon.$$

Фиксируем $n > N$. Поскольку ряд $\sum_{k=1} a_k(x_n)e_k$ сходится (к x_n), то

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists M \in \mathbb{N} \quad \forall m, l > M : \quad \|S_m(x_n) - S_l(x_n)\| < \varepsilon.$$

Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists M \in \mathbb{N} \quad \forall m, l > M : \quad \|S_m - S_l\| < 3\varepsilon.$$

Значит, S_k — последовательность Коши (по k) в банаховом пространстве X и, значит, сходится. Обозначим её предел x, по определению базиса $S_k = S_k(x)$, $a_k = a_k(x)$. А так как

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N : \quad \|x_n - x\| = \sup_m \|S_m(x_n) - S_m(x)\| \leqslant \varepsilon,$$

то $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ по новой норме пространства X, т.е. X — банахово пространство с новой нормой.

Рассмотрим тождественное отображение пространства X с новой нормой на пространство X со старой нормой: $x \to x$, это ограниченный линейный оператор (т.к. $\|x\| \geqslant \|x\|$). Он является взаимнооднозначным и поэтому по теореме Банаха об обратном операторе обратное отображение также ограниченный линейный оператор. Это означает, что существует такая постоянная C, что для любого $x \in X$ имеем

$$\|x\| = \sup_n \left\| \sum_{k=1}^{n} a_k(x) e_k \right\| \leqslant C\|x\|.$$

Лемма доказана.

Утверждение 1. *Если $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ — базис банахова пространства X, то коэффициенты разложения $a_k(x)$ — ограниченные линейные функционалы на X, причём*

$$a_k(e_j) = \delta_j^k = \begin{cases} 1, & \text{если } j = k, \\ 0 & \text{если } j \neq k. \end{cases}$$

Доказательство. Очевидно, что $a_k(x)$ — линейный функционал. Его ограниченность следует из леммы 1 и оценки $|a_k(x)| = \frac{1}{\|e_k\|}\|a_k(x)e_k\| = \frac{1}{\|e_k\|}\|S_k(x) - S_{k-1}(x)\| \leqslant \frac{2C}{\|e_k\|}\|x\|$ (ведь $\|e_k\| \neq 0$). А из единственности разложения по базису следует, что $a_k(e_j) = 1$ при $k = j$ и $a_k(e_j) = 0$ при $k \neq j$.

Свойства базисов. Система Фабера–Шаудера

Напомним определение базиса.

Определение. Система элементов $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ банахова пространства X называется **базисом (Шаудера)**, если для любого элемента $x \in X$ существует единственный ряд

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k(x)e_k = x, \quad a_k(x) \text{ из } \mathbb{R} \text{ или } \mathbb{C},\ k \in \mathbb{N}.$$

Теорема. *Если $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ — базис банахова пространства X, то выполняются три следующих условия.*
1) Система $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ замкнута в X, т.е. замыкание линейной оболочки системы совпадает с X.
2) Система $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ минимальна в X, т.е. любой элемент системы не принадлежит замыканию линейной оболочки остальных элементов.
3) Существует постоянная C такая, что для любого $x \in X$ верна оценка

$$\sup_n \|S_n(x)\| = \sup_n \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)e_k \right\| \leqslant C\|x\|$$

и $a_k(x)$ — ограниченные линейные функционалы на X, причем

$$a_k(e_j) = \delta_j^k = \begin{cases} 1, & \text{если } j = k, \\ 0 & \text{если } j \neq k. \end{cases}$$

Если $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ такая система в X, что для нее выполняются условия 1), 2) и существуют такие ограниченные линейные функционалы $a_k(x)$ на X, что

$$a_k(e_j) = \delta_j^k = \begin{cases} 1, & \text{если } j = k, \\ 0 & \text{если } j \neq k, \end{cases}$$

и существует постоянная C такая, что для любого $x \in X$ верна оценка

$$\sup_n \|S_n(x)\| = \sup_n \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) e_k \right\| \leqslant C\|x\|,$$

то система $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ является базисом в банаховом пространстве X.

Доказательство. Необходимость. Если $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ — базис банахова пространства X, то для любого $x \in X$ имеем $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} a_k(x)e_k = x$ и, значит, x принадлежит замыканию линейной оболочки системы, 1) верно. Из леммы 1 и утверждения 1 следует выполнение 3). А 2) следует из того, что линейный непрерывный функционал $a_k(x)$ равен 1 на e_k и равен 0 на остальных элементах системы, значит, e_k не принадлежит замыканию линейной оболочки остальных элементов системы.

Достаточность. Пусть $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ такая система в X, что для нее выполняются условия 1), 2) и существуют такие ограниченные линейные функционалы $a_k(x)$ на X, что

$$a_k(e_j) = \delta_j^k = \begin{cases} 1, & \text{если } j = k, \\ 0 & \text{если } j \neq k, \end{cases}$$

и существует постоянная C такая, что для любого $x \in X$ верна оценка

$$\sup_n \|S_n(x)\| = \sup_n \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) e_k \right\| \leqslant C\|x\|.$$

Покажем, что эта система базис в X.

Возьмём любой элемент $x \in X$, любое $\varepsilon > 0$ и пользуясь 1) найдём такую конечную линейную комбинацию $P(x) = \sum\limits_{k=1}^{K} \alpha_k e_k$, что $\|x - P(x)\| < \varepsilon$. Так как при $n \geqslant K$ имеем $S_n(P(x)) = P(x)$, то

$$\|S_n(x) - x\| = \|S_n(x - P(x)) - (x - P(x))\| \leqslant (C+1)\|x - P(x)\| < (C+1)\varepsilon,$$

то $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(x)e_k$. Единственность такого ряда следует из того, что если $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k e_k$, то $a_k(x) = a_k(b_k e_k) = b_k$. Теорема доказана.

Всякое нормированное пространство с базисом сепарабельно, т.е. имеет счетное всюду плотное подмножество (линейные комбинации элементов базиса с рациональными коэффициентами образуют такое подмножество). С. Банах поставил вопрос, всякое ли сепарабельное банахово пространство имеет базис. В 1973 г. шведский математик П. Энфло дал отрицательный ответ на этот вопрос, построив пример сепарабельного банахова пространства без базисов. Заметим, что известна теорема Банах–Мазура.

Теорема Банаха–Мазура. *Всякое сепарабельное банахово пространство линейно изометрично некоторому замкнутому подпространству в $\mathbf{C}[0,1]$.*

Пространство $\mathbf{C}[0,1]$ непрерывных на отрезке $[0,1]$ функций с нормой $\|f(x)\| = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x)|$ имеет базис. Значит, всякое сепарабельное банахово пространство можно рассматривать как подпространство сепарабельного банахова пространства с базисом. Приведём пример базиса в $\mathbf{C}[0,1]$.

Пример (система Фабера–Шаудера). Системой Фабера–Шаудера называется система функций $\Phi=\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, $x\in[0,1]$, в которой

$$\varphi_0(x)=1,\ \varphi_1(x)=x=\int\limits_0^x\chi_1(t)\,dt,\ \text{где}\ \chi_1(t)=1,\ x\in[0,1],$$

а при $n=2^k+i$, $k=0,1,2,\ldots$, $i=1,2,\ldots,2^k$,

$$\varphi_n(x)=\varphi_k^i(x)=2^{\frac{k}{2}+1}\int\limits_0^x\chi_k^i(t)\,dt=\begin{cases}0,\ \text{если}\ x\notin\left(\frac{i-1}{2^k},\frac{i}{2^k}\right),\\ 1,\ \text{если}\ x=\frac{2i-1}{2^{k+1}},\\ \text{линейна и непрерывна на отрезках}\\ \left[\frac{i-1}{2^k},\frac{2i-1}{2^{k+1}}\right]\ \text{и}\ \left[\frac{2i-1}{2^{k+1}},\frac{i}{2^k}\right],\end{cases}$$

где $\chi_k^i(t)=\chi_n(t)$ — функция Хаара.

Система Фабера–Шаудера была введена Фабером в 1910 г., который построил её проинтегрировав функции Хаара. В 1927 г. Шаудер переоткрыл её. Шаудером был построен ряд базисом в $\mathbf{C}[0,1]$, простейшим из которых являлась приведённая система.

Теорема. *Рассмотрим ряд по системе Фабера–Шаудера:*

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n\varphi_n(x)=a_0\varphi_0(x)+a_1\varphi_1(x)+\sum_{k=0}^{\infty}\sum i=1^{2^k}\varphi_k^i(x)$$

и предположим, что он сходится в каждой точке отрезка $[0,1]$ к конечной функции $f(x)$. Тогда его коэффициенты $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ однозначно определяются по функции $f(x)$:

$$a_0=a_0(f)=f(0),\ a_1=a_1(f)=f(1)-f(0),$$
$$a_n=a_n(f)=a_k^i(f)=f\left(\tfrac{2i-1}{2^{k+1}}\right)-\tfrac12\left[f\left(\tfrac{i-1}{2^k}\right)+f\left(\tfrac{i}{2^k}\right)\right],$$

где $n=2^k+i$, $k=0,1,2,\ldots$, $i=1,2,\ldots,2^k$.

Доказательство. Из определения функций Фабера-Шаудера видно, что

$$f(0)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\varphi_n(0)=a_0\varphi_0(0)=a_0,\ f(1)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\varphi_n(1)=a_0\varphi_0(1)+a_1\varphi_1(1)=a_0+a_1,$$

откуда следуют формулы для первых двух коэффициентов. Частичная сумма $S_1(x)=a_0\varphi_0(x)+a_1\varphi_1(x)$ линейна на отрезке $[0,1]$ и поэтому $S_1\left(\frac12\right)=\frac12(f(0)+f(1))$. Функция $\varphi_2\left(\frac12\right)=1$, а Функции $\varphi_n\left(\frac12\right)=0$ при $n>2$. Поэтому

$$a_2=a_2(f)\varphi_2\left(\tfrac12\right)=S_2\left(\tfrac12\right)-S_1\left(\tfrac12\right)=f\left(\tfrac12\right)-\tfrac12(f(0)+f(1)).$$

Для $k=1,2,\ldots$ частичная сумма $S_{2^k}(x)$ совпадает с $f(x)$ в точках $x=\frac{i}{2^k}$, $i=0,1,\ldots,2^k$, так как функции $\varphi_n(x)$ равны нулю в них при $n>2^k$. На отрезках $\left[\frac{i-1}{2^k},\frac{i}{2^k}\right]$, $i=1,2,\ldots,2^k$, частичная сумма $S_{2^k}(x)$ линейна. Поэтому

$$a_k^i(f)=a_k^i(f)\varphi_k^i\left(\tfrac{2i-1}{2^{k+1}}\right)=S_{2^{k+1}}\left(\tfrac{2i-1}{2^{k+1}}\right)-\tfrac12\left[S_{2^k}\left(\tfrac{i-1}{2^k}\right)+S_{2^k}\left(\tfrac{i}{2^k}\right)\right]=$$
$$=f\left(\tfrac{2i-1}{2^{k+1}}\right)-\tfrac12\left[f\left(\tfrac{i-1}{2^k}\right)+f\left(\tfrac{i}{2^k}\right)\right]$$

и формулы для коэффициентов выведены.

Система Фабера–Шаудера.
Система Франклина

Напомним, что системой Фабера–Шаудера называется система функций $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, $x \in [0,1]$, в которой

$$\varphi_0(x) = 1,\ \varphi_1(x) = x = \int\limits_0^x \chi_1(t)\,dt,\ \text{где } \chi_1(t) = 1,\ x \in [0,1],$$

а при $n = 2^k + i$, $k = 0,1,2,\ldots$, $i = 1,2,\ldots,2^k$,

$$\varphi_n(x) = \varphi_k^i(x) = 2^{\frac{k}{2}+1}\int\limits_0^x \chi_k^i(t)\,dt = \begin{cases} 0, \text{ если } x \notin \left(\frac{i-1}{2^k}, \frac{i}{2^k}\right), \\ 1, \text{ если } x = \frac{2i-1}{2^{k+1}}, \\ \text{линейна и непрерывна на отрезках} \\ \left[\frac{i-1}{2^k}, \frac{2i-1}{2^{k+1}}\right] \text{ и } \left[\frac{2i-1}{2^{k+1}}, \frac{i}{2^k}\right], \end{cases}$$

где $\chi_k^i(t) = \chi_n(t)$ — функция Хаара.

На прошлой лекции было доказано, что если ряд по системе Фабера–Шаудера сходится в каждой точке отрезка $[0,1]$ к конечной функции $f(x)$, то его коэффициенты $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ однозначно определяются по функции $f(x)$ формулами:

$$a_0 = a_0(f) = f(0),\ a_1 = a_1(f) = f(1) - f(0),$$
$$a_n = a_n(f) = a_k^i(f) = f\left(\tfrac{2i-1}{2^{k+1}}\right) - \tfrac{1}{2}\left[f\left(\tfrac{i-1}{2^k}\right) + f\left(\tfrac{i}{2^k}\right)\right],$$

где $n = 2^k + i$, $k = 0,1,2,\ldots$, $i = 1,2,\ldots,2^k$.

Докажем теперь следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть функция $f(x) \in \mathbf{C}[0,1]$, а $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ — последовательность различных точек отрезка $[0,1]$, где $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_n = \frac{2i-1}{2^{k+1}}$ при $n = 2^k + i$, $k = 0,1,\ldots$, $i = 1,2,\ldots,2^k$. Рассмотрим ряд по системе Фабера–Шаудера $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\varphi_n(x)$ с коэффициентами заданными вышеприведенными формулами. Тогда на отрезке $[0,1]$ его частичная сумма $S_0(f,x) \equiv f(0)$, $S_1(f,x) = f(0) + (f(1) - f(0))x$, а при $N \geqslant 1$ частичная сумма $S_N(f,x) = \sum\limits_{n=0}^{N} a_n\varphi_n(x)$ совпадает с $f(x)$ в точках $x_0, x_1, \ldots, x_N$ и линейна между ними (между соседними такими точками). При $N \to \infty$ частичные суммы $S_N(f,x)$ равномерно стремятся к $f(x)$ на $[0,1]$.*

Доказательство. Легко видеть, что частичные суммы $S_0(f,x)$, $S_1(f,x)$ и $S_2(f,x)$ имеют указанный вид. Предположим, что при $N = 2^k + i$, $k = 0,1,2,\ldots$, $i = 1,2,\ldots,2^k$, $S_N(f,x)$ совпадает с $f(x)$ в точках $x_0, x_1, \ldots, x_N$ и линейна между ними и докажем, что $S_{N+1}(f,x)$ совпадает с $f(x)$ в точках $x_0, x_1, \ldots, x_N, x_{N+1}$ и линейна между ними.

Сначала рассмотрим случай $i < 2^k$. Тогда $S_{N+1}(f,x) = S_N(f,x) + a_{N+1}\varphi_{N+1}(x) = S_N(f,x) + a_k^{i+1}\varphi_k^{i+1}(x)$. Частичная сумма $S_N(f,x)$ совпадает с $f(x)$ в точках $\frac{i}{2^k}$ и $\frac{i+1}{2^k}$, принадлежащих набору точек $\{x_j\}_{j=0}^{N}$, и линейна между ними. Функция $\varphi_N(x) = \varphi_k^{i+1}(x)$ равна 0 вне интервала $\left(\frac{i}{2^k}, \frac{i+1}{2^k}\right)$, равна 1 в точке $x_{N+1} = \frac{2i+1}{2^{k+1}}$ и линейна на отрезках $\left[\frac{i}{2^k}, \frac{2i+1}{2^{k+1}}\right]$ и $\left[\frac{2i+1}{2^{k+1}}, \frac{i+1}{2^k}\right]$. Поэтому при $a_{N+1} = a_k^{i+1} = f\left(\frac{2i+1}{2^{k+1}}\right) - \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{i}{2^k}\right) + f\left(\frac{i+1}{2^k}\right)\right]$

добавляя к частичной сумме $S_N(f,x)$ член $a_k^{i+1}\varphi_k^{i+1}(x)$ мы производим изменения только на отрезке $\left[\frac{i}{2^k},\frac{i+1}{2^k}\right]$, причем такие, что $S_{N+1}(f,x)=S_N(f,x)+a_{N+1}\varphi_{N+1}(x)$ совпадает с $f(x)$ в точках $\frac{i}{2^k}$, $\frac{2i+1}{2^{k+1}}$ и $\frac{i+1}{2^k}$ и линейна между ними. Утверждение о виде частичной суммы $S_{N+1}(f,x)$ в этом случае доказано.

Если $N=2^k+i$, $i=2^k$, то $S_{N+1}(f,x)=S_N(f,x)+a_{N+1}\varphi_{N+1}(x)=S_N(f,x)+a_{k+1}^1\varphi_{k+1}^1(x)$. Частичная сумма $S_N(f,x)$ совпадает с $f(x)$ в точках 0 и $\frac{1}{2^k}$, принадлежащих набору точек $\{x_j\}_{j=0}^N$, и линейна между ними. Функция $\varphi_N(x)=\varphi_{k+1}^1(x)$ равна 0 вне интервала $\left(0,\frac{1}{2^{k+1}}\right)$, равна 1 в точке $\frac{1}{2^{k+1}}$ и линейна на отрезках $\left[0,\frac{1}{2^{k+1}}\right]$ и $\left[\frac{1}{2^{k+1}},\frac{1}{2^k}\right]$. Поэтому при $a_{N+1}=a_{k+1}^1=f\left(\frac{1}{2^{k+1}}\right)-\frac{1}{2}\left[f(0)+f\left(\frac{1}{2^k}\right)\right]$ добавляя к частичной сумме $S_N(f,x)$ член $a_{k+1}^1\varphi_{k+1}^1(x)$ мы производим изменения только на отрезке $\left[0,\frac{1}{2^k}\right]$, причем такие, что $S_{N+1}(f,x)=S_N(f,x)+a_{k+1}^1\varphi_{k+1}^1(x)$ совпадает с $f(x)$ в точках 0, $\frac{1}{2^{k+1}}$ и $\frac{1}{2^k}$ и линейна между ними. Утверждение теоремы о виде частичной суммы $S_{N+1}(f,x)$ доказано и в этом случае.

Осталось доказать равномерную сходимость частичных сумм $S_N(f,x)$ к $f(x)$ на $[0,1]$. При $N=2^k+i$, $k=0,1,2,\dots$, $i=1,2,\dots,2^k$, точки $x_0,x_1,\dots,x_N$ разбивают отрезок $[0,1]$ на N отрезков, лежущих между ними, которые имеют длину 2^{-k-1} или 2^{-k}. Частичная сумма $S_N(f,x)$ совпадает с $f(x)$ в этих точках и при $N\geqslant 1$ линейна на отрезках, лежущих между ними. Функция $f(x)\in\mathbf{C}[0,1]$ равномерно непрерывна на отрезке $[0,1]$, поэтому для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta>0$, что для любых $u,v\in[0,1]$, $|u-v|<\delta$, выполняется оценка $|f(u)-f(v)|<\varepsilon$. При $N=2^k+i>\frac{2}{\delta}$ все отрезки, на которые разбивают отрезок $[0,1]$ точки $x_0,x_1,\dots,x_N$, имеют длину строго меньше δ, все значения функции $f(x)$ на любом таком отрезке отличаются от значений в его концах на величину строго меньшую ε и все значения линейной на таком отрезке функции $l(x)$, совпадающей с $f(x)$ в концах отрезка, отличаются от значений в его концах на величину строго меньшую ε. Значит, на таком отрезке разность $|f(x)-l(x)|<2\varepsilon$, т.е. $|f(x)-S_N(x)|<2\varepsilon$ на $[0,1]$. Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n\varphi_n(x)$ равномерно на $[0,1]$ сходится к $f(x)$. Теорема доказана.

Следствие. *Система Фабера–Шаудера является базисом (Шаудера) в пространстве* $\mathbf{C}[0,1]$.

Система Франклина

Проведём ортогонализацию системы Фабера–Шаудера $\Phi=\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^\infty$, $x\in[0,1]$, методом Шмитда: пусть

$$f_0(x)=\varphi_0(x),\quad f_n(x)=\sum_{i=0}^n\alpha_i^{(n)}\varphi_i(x),\quad \alpha_n^{(n)}>0,$$

$$(f_n,\varphi_i)=0,\ i=0,\dots,n-1,\ (f_n,f_n)=1,\ n=0,1,2,\dots,$$

где $(f,g)=\int_0^1 f(x)g(x)dx$ — скалярное произведение в $L^2[0,1]$.

Определение 1. Ортонормированная система функций $F=\{f_n(x)\}_{n=0}^\infty$, $x\in[0,1]$, называется **системой Франклина**.

При ортогонализации методом Шмитда по индукции

$$f_n(x)=\alpha_n^{(n)}\left(\varphi_n(x)-\sum_{i=0}^{n-1}(\varphi_n,f_i)\right),\quad n=0,1,2,\dots.$$

Поскольку функции системы Фабера–Шаудера линейно независимы, то таким последовательным способом строится ортонормированная система, замкнутая (полная), поскольку система Фабера–Шаудера замкнута в $\mathbf{C}[0,1]$, а значит, и в $L^2[0,1]$, $1 \leqslant p < \infty$. Интересно, что эта система также является базисом в $\mathbf{C}[0,1]$.

Теорема 2. *Система Франклина является базисом (ортогональным) в* $\mathbf{C}[0,1]$.

Действительно, система Франклина замкнута в $\mathbf{C}[0,1]$ (т.к. замкнута в $\mathbf{C}[0,1]$ система Фабера–Шаудера) и минимальна в $\mathbf{C}[0,1]$ (если бы одна из функций системы Франклина принадлежала замыканию линейной оболочки остальных функций системы, то она не могла бы быть ортогональной им). Если $g \in \mathbf{C}[0,1]$ и

$$g = \sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n(x) \text{ в } \mathbf{C}[0,1],$$

то это равенство верно и в $L^2[0,1]$ (т.к. для любой $f \in \mathbf{C}[0,1]$ имеем оценку $\|f\|_{\mathbf{C}[0,1]} \geqslant \|f\|_{L^2[0,1]}$). А значит,

$$a_n = \widehat{g}_n = \int_0^1 g(x) f_n(x) dx, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Поэтому достаточно доказать, что для любой $g \in \mathbf{C}[0,1]$ имеем оценку

$$\sup_{N \geqslant 0} \left\| \sum_{n=0}^{N} \widehat{g}_n f_n(x) \right\|_{\mathbf{C}[0,1]} \leqslant C \|g\|_{\mathbf{C}[0,1]}$$

с некоторой постоянной С.

Заметим, что частичная сумма $\sum\limits_{n=0}^{N} \widehat{g}_n f_n(x)$ совпадает с ортогональной проекцией функции g на линейную оболочку функций $\{f_n\}_{n=0}^N$ совпадающую с линейной оболочкой функций $\{\varphi_n\}_{n=0}^N$, которую обозначим L_N.

Из определения системы Фабера–Шаудера видно, что L_0 состоит из констант на отрезке $[0,1]$, L_1 — из линейных функций на $[0,1]$, а L_N при $N > 0$ состоит из непрерывных функций, линейных между точками $\{x_j\}_{j=0}^N$ (см. теорему 1). Поэтому для доказательства теоремы 2 достаточно доказать следующее утверждение.

Утверждение. *Пусть π — произвольное разбиение отрезка $[0,1]$ на n отрезков точками*

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1, \quad I_k = (t_{k-1}, t_k), \quad k = 1, \ldots, n,$$

и пусть S_π — пространство ломаных с узлами в точках t_k, $k = 0, 1, \ldots, n$. Пусть P_π — оператор ортогонального проектирования из $L^2[0,1]$ на S_π. Тогда для любой $f \in \mathbf{C}[0,1]$ верна оценка

$$\|P_\pi(f)\|_{\mathbf{C}[0,1]} \leqslant 3 \|f\|_{\mathbf{C}[0,1]}.$$

Система Франклина

Система Франклина — базис в $\mathbf{C}[0,1]$.

Проведём ортогонализацию системы Фабера–Шаудера $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, $x \in [0,1]$, методом Шмитда: пусть

$$f_0(x) = \varphi_0(x), \quad f_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i^{(n)} \varphi_i(x), \quad \alpha_n^{(n)} > 0,$$

$$(f_n, \varphi_i) = 0,\ i = 0, \dots, n-1,\ (f_n, f_n) = 1,\ n = 0, 1, 2, \dots,$$

где $(f,g) = \int_0^1 f(x) g(x) dx$ — скалярное произведение в $L^2[0,1]$.

Определение 1. Ортонормированная система функций $F = \{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, $x \in [0,1]$, называется **системой Франклина**.

При ортогонализации методом Шмитда по индукции

$$f_n(x) = \alpha_n^{(n)} \left(\varphi_n(x) - \sum_{i=0}^{n-1} (\varphi_n, f_i) \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots.$$

Поскольку функции системы Фабера–Шаудера линейно независимы, то таким последовательным способом строится ортонормированная система, замкнутая (полная), поскольку система Фабера–Шаудера замкнута в $\mathbf{C}[0,1]$, а значит, и в $L^2[0,1]$, $1 \leqslant p < \infty$. Интересно, что эта система также является базисом в $\mathbf{C}[0,1]$.

Теорема. *Система Франклина является базисом (ортогональным) в* $\mathbf{C}[0,1]$.

Действительно, система Франклина замкнута в $\mathbf{C}[0,1]$ (т.к. замкнута в $\mathbf{C}[0,1]$ система Фабера–Шаудера) и минимальна в $\mathbf{C}[0,1]$ (если бы одна из функций системы Франклина принадлежала замыканию линейной оболочки остальных функций системы, то она не могла бы быть ортогональной им). Если $g \in \mathbf{C}[0,1]$ и

$$g = \sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n(x) \text{ в } \mathbf{C}[0,1],$$

то это равенство верно и в $L^2[0,1]$ (т.к. для любой $f \in \mathbf{C}[0,1]$ имеем оценку $\|f\|_{\mathbf{C}[0,1]} \geqslant \|f\|_{L^2[0,1]}$). А значит,

$$a_n = \widehat{g}_n = \int_0^1 g(x) f_n(x) dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots.$$

Поэтому достаточно доказать, что для любой $g \in \mathbf{C}[0,1]$ имеем оценку

$$\sup_{N \geqslant 0} \left\| \sum_{n=0}^{N} \widehat{g}_n f_n(x) \right\|_{\mathbf{C}[0,1]} \leqslant C \|g\|_{\mathbf{C}[0,1]}$$

с некоторой постоянной C.

Заметим, что частичная сумма $\sum\limits_{n=0}^{N} \widehat{g}_n f_n(x)$ совпадает с ортогональной проекцией функции g на линейную оболочку функций $\{f_n\}_{n=0}^{N}$ совпадающую с линейной оболочкой функций $\{\varphi_n\}_{n=0}^{N}$, которую обозначим L_N.

Из определения системы Фабера–Шаудера видно, что L_0 состоит из констант на отрезке $[0,1]$, L_1 — из линейных функций на $[0,1]$, а L_N при $N > 0$ состоит из непрерывных функций, линейных между точками $\{x_j\}_{j=0}^N$ (см. теорему 1). Поэтому для доказательства теоремы 2 достаточно доказать следующее утверждение.

Утверждение. *Пусть π — произвольное разбиение отрезка $[0,1]$ на n отрезков точками*

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1, \quad I_k = (t_{k-1}, t_k), \quad k = 1, \dots, n,$$

и пусть S_π — пространство ломанных с узлами в точках t_k, $k = 0, 1, \dots, n$, т.е.

$$S_\pi = \{f \in \mathbf{C}[0,1] : \ f''(x) = 0 \text{ при } x \in I_k = (t_{k-1}, t_k), \ k = 1, \dots, n\}.$$

Пусть P_π — оператор ортогонального проектирования из $L^2[0,1]$ на S_π. Тогда для любой $f \in \mathbf{C}[0,1]$ верна оценка

$$\|P_\pi(f)\|_{\mathbf{C}[0,1]} \leqslant 3\|f\|_{\mathbf{C}[0,1]}.$$

Доказательство. Введем для удобства $t_{-1} = 0 = t_0$ и $t_{n+1} = 1 = t_n$. Выберем в S_π следующий базис:

$$l_j(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } t \in [0,1] \setminus (I_j \cup I_{j+1}), \\ \frac{t - t_{j-1}}{|I_j|}, & \text{если } t \in \overline{I}_j, \\ \frac{t_{j+1} - t}{|I_{j+1}|}, & \text{если } t \in \overline{I}_{j+1}, \end{cases}$$

$\overline{I}_j = [t_{j-1}, t_j]$, $j = 1, 2, \dots, n$, $\overline{I}_0 = \overline{I}_{n+1} = \varnothing$. Легко видеть, что

$$l_j(t_s) = \begin{cases} 1, & \text{если } s = j, \\ 0, & \text{если } s \neq j, \end{cases} \quad s, j \in \{0, 1, \dots, n\},$$

$$\sum_{j=0}^n l_j(x) = 1, \quad t \in [0,1],$$

$$(l_j, 1) = \tfrac{1}{2}(t_{j+1} - t_{j-1}), \quad (l_j, l_j) = \tfrac{1}{3}(t_{j+1} - t_{j-1}), \ j = 0, 1, \dots, n,$$

и что для произвольной функции $g \in S_\pi$

$$g(t) = \sum_{j=0}^n g(t_j) l_j(t), \quad \|g\|_{\mathbf{C}} = \max_{0 \leqslant j \leqslant n} |g(t_j)|.$$

Пусть $f \in \mathbf{C}[0,1]$, тогда при $t \in [0,1]$

$$P_\pi(f, t) = \sum_{j=0}^n b_j l_j(t), \quad b_j = b_j(f) = P_\pi(f, t_j), \quad , j = 0, 1, \dots, n,$$

и, по определению оператора P_π, при $k = 0, 1, \dots, n$

$$(l_k, f) = (l_k, P_\pi(f)) = b_k(l_k, l_k) + \left(\sum_{j=0}^{k-1} + \sum_{k+1}^{n} \right) b_j(l_k, l_j).$$

Возьмем число k таким, что $|b_k| = \max\limits_{0\leqslant j\leqslant n} |b_j|$. Тогда

$$|(l_k, f)| \geqslant |b_k|(l_k, l_k) - \left(\sum_{j=0}^{k-1} + \sum_{k+1}^{n}\right) |b_j|(l_k, l_j) \geqslant$$
$$\geqslant |b_k| \left((l_k, l_k) - \left(\sum_{j=0}^{k-1} + \sum_{k+1}^{n}\right)(l_k, l_j)\right) = |b_k| \left(2(l_k, l_k) - \sum_{j=0}^{n}(l_k, l_j)\right),$$

а поскольку $\sum\limits_{j=0}^{n} l_j(x) = 1$, то

$$|b_k| \left(2(l_k, l_k) - (l_k, 1)\right) \leqslant |(l_k, f)| \leqslant \|f\|_{\mathbf{C}}(l_k, 1).$$

Следовательно,

$$\|P_\pi(f)\|_{\mathbf{C}} = \max_{0\leqslant j\leqslant n} |b_j| = |b_k| \leqslant \frac{(l_k, 1)}{2(l_k, l_k) - (l_k, 1)}\|f\|_{\mathbf{C}} =$$
$$= \frac{\frac{1}{2}(t_{k+1} - t_{k-1})}{\frac{2}{3}(t_{k+1} - t_{k-1}) - \frac{1}{2}(t_{k+1} - t_{k-1})}\|f\|_{\mathbf{C}} = 3\|f\|_{\mathbf{C}},$$

что и требовалось доказать.

Значит, система Франклина — базис в $\mathbf{C}[0, 1]$.

ПРОДОЛЖЕНИЕ
прочитанных лекций.
Сходимость ортогональных рядов почти всюду

Множители Вейля.

Изучать вопросы сходимости начали с тригонометрических рядов. И для них возникло понятие „признаков типа Вейля“. Так стали называть следующие теоремы: *если $W(n)$ неубывающая последовательность и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(|a_n|^2+|b_n|^2)\,W(n)$ сходится, то тригонометрический ряд $\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx$ сходится почти всюду (на $[0,2\pi]$).* Функции $W(n)$ стали называть „множителями Вейля“.

Фату П. в 1906г. доказал, что можно взять $W(n)=n$, потом Вейль Х. в 1909г. показал, что можно взять $W(n)=\sqrt[3]{n}$, затем Гобсон Е.В. в 1913г. доказал, что для ряда из ортогональных функций можно взять $W(n)=n^{\varepsilon}$ для любого $\varepsilon>0$. Planшерель М. в том же 1913г. показал, что для ряда из ортогональных функций можно взять $W(n)=\ln^3 n$, а Харди Г. для тригонометрических рядов в этом же году снизил этот множитель до $W(n)=\ln^2 n$. Для ортогональных рядов этот результат доказали Радемахер Х. в 1922г. и Меньшов Д.Е. в 1923г. Причем Меньшов Д.Е. одновременно показал окончательность этого результата для общих ортогональных рядов. Для тригонометрических рядов множитель Харли был понижен до $W(n)=\ln n$ в 1925г. Колмогоровым А.Н., Селиверстовым Г.А. и одновременно Плесснером А. В 1966г. Карлесон Л. доказал, что подходит $W(n)=1$. Тем самым он решил высказанную Лузиным Н.Н. в 1914г. гипотезу, что тригонометрический ряд Фурье любой функции из пространства Лебега $L^2[0,2\pi]$ сходится почти всюду.

Теперь перейдем к доказательству утверждения, несколько обобщеющее теорему Меньшова–Радемахера. Будет доказана аналогичная теорема для функционального ряда со слабым аналогом свойства ортогональности. Этот результат был получен Галатенко В.В., Лукашенко Т.П. и Садовничим В.А. Как следствия получены результаты о сходимости почти всюду рядов по ряду функциональных систем, в том числе по системам Рисса, системам Гильберта, бесселевым системам и по фреймам.

Пусть $L^2(\Omega)$ — пространство Лебега действительнозначных (или комплекснозначных) интегрируемых в квадрате функций над пространством Ω (с σ-алгеброй Σ и со счетно-аддитивной мерой μ.

Лемма. *Пусть $\Phi=\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{2^n}$, где целое $n\geqslant 0$, — система функций в $L^2(\Omega)$ и ряд $\sigma(x)=\sum\limits_{k=1}^{2^n}a_k\varphi_k(x)$ обладает следующим свойством: для любых натуральных p,q, $1\leqslant p\leqslant q\leqslant 2^n$, выполняется оценка*

$$\left\|\sum_{k=p}^{q}a_k\varphi_k(x)\right\|^2\leqslant C\sum_{k=p}^{q}|a_k|^2,$$

где C — некоторая постоянная. Тогда для мажоранты частичных сумм ряда

$$S^*(x)=\max_{K\leqslant 2^n}\left|\sum_{k=1}^{K}a_k\varphi_k(x)\right|$$

верна оценка

$$\|S^*(x)\|^2 \leqslant C(n+1)^2 \sum_{k=1}^{2^n} |a_k|^2.$$

Доказательство. Для $n=0$ оценка следует из условия. Предположим, что оценка верна для $n=m \geqslant 0$, и докажем ее для $n=m+1$.

Пусть

$$A = \left\{ x \in \Omega : \ S^*(x) = \max_{K \leqslant 2^m} \left| \sum_{k=1}^{K} a_k \varphi_k(x) \right| \right\},$$

$$B = \Omega \setminus A = \left\{ x \in \Omega : \ S^*(x) > \max_{K \leqslant 2^m} \left| \sum_{k=1}^{K} a_k \varphi_k(x) \right| \right\}.$$

По предположению

$$\|S^*(x)\chi_A(x)\|^2 \leqslant \left\| \max_{K \leqslant 2^m} \left| \sum_{k=1}^{K} a_k \varphi_k(x) \right| \right\|^2 \leqslant C(m+1)^2 \sum_{k=1}^{2^m} |a_k|^2,$$

где $\chi_A(x)$ — характеристическая функция множества A.

Если $x \in B$, то

$$S^*(x) \leqslant \left| \sum_{k=1}^{2^m} a_k \varphi_k(x) \right| + \max_{2^m < K \leqslant 2^{m+1}} \left| \sum_{k=2^m+1}^{K} a_k \varphi_k(x) \right|.$$

По условию

$$\left\| \sum_{k=1}^{2^m} a_k \varphi_k(x) \right\|^2 \leqslant C \sum_{k=1}^{2^m} |a_k|^2,$$

а по предположению

$$\left\| \max_{2^m < K \leqslant 2^{m+1}} \left| \sum_{k=2^m+1}^{K} a_k \varphi_k(x) \right| \right\|^2 \leqslant C(m+1)^2 \sum_{k=2^m+1}^{2^{m+1}} |a_k|^2.$$

Следовательно,

$$\|S^*(x)\|^2 = \|S^*(x)\chi_A(x)\|^2 + \|S^*(x)\chi_B(x)\|^2 \leqslant C(m+1)^2 \sum_{k=1}^{2^m} |a_k|^2 +$$

$$+ C \left| \left(\sum_{k=1}^{2^m} |a_k|^2 \right)^{1/2} + (m+1) \left(\sum_{k=2^m+1}^{2^{m+1}} |a_k|^2 \right)^{1/2} \right|^2 \leqslant C(m+1)^2 \sum_{k=1}^{2^m} |a_k|^2 +$$

$$+ C \sum_{k=1}^{2^{m+1}} |a_k|^2 + 2C(m+1) \sum_{k=1}^{2^{m+1}} |a_k|^2 + C(m+1)^2 \sum_{k=2^m+1}^{2^{m+1}} |a_k|^2 = C(m+2)^2 \sum_{k=1}^{2^{m+1}} |a_k|^2.$$

По принципу математической индукции лемма доказана.

Сходимость функциональных рядов почти всюду

Перейдем к выводу основного результата работы.

Теорема 1. *Пусть $\Phi = \{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ — система функций в пространстве Лебега $L^2(\Omega)$ и ряд $\sigma = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k\varphi_k(x)$ обладает следующим свойством: для любых натуральных p, q, $p \leqslant q$, выполняется оценка*

$$\left\| \sum_{k=p}^{q} a_k\varphi_k(x) \right\|^2 \leqslant C \sum_{k=p}^{q} |a_k|^2, \tag{1}$$

где C — некоторая постоянная. Тогда если

$$L = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 \log_2^2(2k) < \infty, \tag{2}$$

то ряд $\sigma = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k\varphi_k(x)$ сходится в $L^2(\Omega)$ и почти всюду на Ω. Кроме того, для мажоранты частичных сумм

$$S^*(x) = \max_{K\in\mathbb{N}} \left| \sum_{k=1}^{K} a_k\varphi_k(x) \right|$$

имеет место оценка

$$\|S^*(x)\| \leqslant 3\sqrt{CL}.$$

Доказательство. Покажем сначала, что подпоследовательность частичных сумм ряда

$$S_{2^n}(x) = \sum_{k=1}^{2^n} a_k\varphi_k(x)$$

сходится в $L^2(\Omega)$ и почти всюду на Ω и оценим норму в $L^2(\Omega)$ мажоранты этой подпоследовательности:

$$S_1^* = \sup_{0\leqslant n<\infty} |S_{2^n}(x)|.$$

Пусть

$$\Phi_0(x) = a_1\varphi_1(x), \quad \Phi_n(x) = \sum_{k=2^{n-1}+1}^{2^n} a_k\varphi_k(x),\ n \in \mathbb{N}.$$

Тогда по условию (1) имеем $\|\Phi_0(x)\|^2 \leqslant C|a_1|^2$, $\|\Phi_n(x)\|^2 \leqslant C \sum\limits_{k=2^{n-1}+1}^{2^n} |a_k|^2$. По условию (2)

$$\|\Phi_0(x)\|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \|\Phi_n(x)\|^2 n^2 \leqslant CL.$$

Используя неравенство Коши–Буняковского получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|\Phi_n(x)\| \leqslant \left(\|\Phi_0(x)\|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \|\Phi_n(x)\|^2 n^2 \right)^{1/2} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} \right)^{1/2} \leqslant \sqrt{3CL}.$$

Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\Phi_n(x)$ сходится в $L^2(\Omega)$. Поскольку частичные суммы этого ряда — подпоследовательность $S_{2^n}(x)$ частичных сумм ряда σ, то эта подпоследовательность сходится в $L^2(\Omega)$. Теперь оценим мажоранту подпоследовательности $S_{2^n}(x)$ частичных сумм ряда σ:

$$S_1^* = \sup_{0\leqslant n<\infty}|S_{2^n}(x)| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty}|\Phi_n(x)|.$$

Поскольку ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\|\Phi_n(x)\| \leqslant \sqrt{3CL}$, то $\|S_1^*\| \leqslant \sum\limits_{n=0}^{\infty}\|\Phi_n(x)\| \leqslant \sqrt{3CL}$. Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|\Phi_n(x)|$, а значит, и ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\Phi_n(x)$ сходятся почти всюду на Ω по теореме Б. Леви

Итак, доказано, что подпоследовательность $S_{2^n}(x)$ частичных сумм ряда σ сходится в $L^2(\Omega)$ и почти всюду на Ω и норма мажоранты этой подпоследовательности

$$\|S_1^*\| \leqslant \sqrt{3CL}.$$

Перейдем теперь к последовательности частичных сумм ряда σ. Пусть $2^n \leqslant K < 2^{n+1}$, где целое $n \geqslant 0$, и величина

$$\theta_n(x) = \max_{2^n\leqslant K<2^{n+1}}|S_K(x)-S_{2^n}(x)| = \max_{2^n\leqslant K<2^{n+1}}\left|\sum_{2^n<k\leqslant K}a_k\varphi_k(x)\right|.$$

Имеем

$$\|\theta_n(x)\|^2 \leqslant C(n+1)^2\sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}-1}|a_k|^2 \leqslant C\sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}-1}|a_k|^2\log_2^2(2k). \tag{3}$$

Из условия (2) следует, что

$$\|\theta_n(x)\| = \left\|\max_{2^n\leqslant K\leqslant 2^{n+1}}|S_K(x)-S_{2^n}(x)|\right\| \to 0$$

при $n\to\infty$. Значит, последовательность $S_K(x)$ частичных сумм ряда $\sigma(x)$ сходится в $L^2(\Omega)$.

Теперь покажем, что последовательность $S_K(x)$ частичных сумм ряда $\sigma(x)$ сходится почти всюду на Ω. Из оценки (3) и условия (2) следует, что

$$\sum_{n=0}^{\infty}\|\theta_n(x)\|^2 \leqslant C\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^2\log_2^2(2k) = CL, \tag{4}$$

По теореме Б. Леви ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|\theta_n(x)|^2$ сходится почти всюду на Ω. Значит, $\lim\limits_{n\to\infty}\theta_n(x)=0$ почти всюду на Ω, что вместе с уже доказанной сходимостью почти всюду на Ω подпоследовательности частичных сумм $S_{2^n}(x)$ ряда $\sigma(x)$ влечет сходимость почти всюду на Ω всей последовательности $S_K(x)$ частичных сумм этого ряда.

Осталось получить оценку мажоранты частичных сумм $S^*(x)$. Поскольку при $2^n\leqslant K<2^{n+1}$ верна оценка $|S_K(x)-S_{2^n}(x)|\leqslant\theta_n(x)$, имеем

$$S_2^*(x) = \sup_{n\geqslant 0}\max_{2^n\leqslant K<2^{n+1}}|S_K(x)-S_{2^n}(x)| \leqslant \sup_{n\geqslant 0}\theta_n(x).$$

Согласно (4), заключаем, что

$$\|S_2^*(x)\|^2 \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \|\theta_n(x)\|^2 \leqslant CL.$$

А так как $S^*(x) \leqslant S_1^*(x) + S_2^*(x)$, то

$$\|S^*(x)\| \leqslant \|S_1^*(x)\| + \|S_2^*(x)\| \leqslant \sqrt{3CL} + \sqrt{CL} \leqslant 3\sqrt{CL}.$$

Теорема доказана.

Следствием теоремы 1 является теорема Меньшова–Радемахера

Теорема Меньшова–Радемахера. *Пусть* $\Phi = \{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ *— ортонормированная система функций в пространстве Лебега* $L^2(\Omega)$*. Тогда если*

$$L = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 \log_2^2(2k) < \infty,$$

то ряд $\sigma = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x)$ *сходится почти всюду на* Ω*. Кроме того, для мажоранты частичных сумм*

$$S^*(x) = \max_{K \in \mathbb{N}} \left| \sum_{k=1}^{K} a_k \varphi_k(x) \right|$$

имеет место оценка

$$\|S^*(x)\| \leqslant 3\sqrt{L}.$$

Заметим, что обычно в теореме Меньшова–Радемахера в качестве Ω берут отрезок $[0,1]$ с обычной мерой Лебега и вместо $\log_2^2(2k)$ пишут $\log_2^2(k+1)$, что немного меняет величину L и сказывается на величине константы в оценке $S^*(x)$ (вместо 3 можно взять, например, 6). В работе Д.Е. Меньшова было также показано, что $\log_2^2(k+1)$ нельзя заменить на неубывающую последовательность $o\big(\log_2^2(k+1)\big)$, растущую медленнее $\log_2^2(k+1)$.

Отметим еще, что в теореме говорится об условии сходимости почти всюду конкретного функционального ряда со свойством (1) (имеющим место в случае ортонормированности функций $\varphi_k(x)$ ряда), а в теореме Меньшова–Радемахера — об условии сходимости почти всюду рядов по ортонормированной функциональной системе.

Перейдем теперь к некоторым встречающимся в математике системам, удовлетворяющим условию: для любых натуральных p, q, $p \leqslant q$, выполняется оценка

$$\left\| \sum_{k=p}^{q} a_k \varphi_k(x) \right\|^2 \leqslant C \sum_{k=p}^{q} |a_k|^2, \tag{1}$$

где C — некоторая постоянная.

Определение 1. Система элементов $\Psi = \{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ гильбертова пространства H (над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$) называется *системой Рисса* с постоянными $A > 0$ и B, если для любой числовой последовательности $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ с конечным числом отличных от нуля членов (из $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$о) верны оценки

$$A\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^2 \leqslant \left\|\sum_{k=1}^{\infty}c_k\psi_k\right\|^2 \leqslant B\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^2.$$

Постоянная A называется *нижней границей* системы Рисса, а постоянная B — *верхней границей* системы Рисса. Если система Рисса является базисом, то ее называют *базисом Рисса.*

Система Рисса удовлетворяет условию (1) (с постоянной $C = B$), в случае $H = L^2(\Omega)$ для нее верна доказанная теорема.

Определение 2. Система элементов $G = \{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ гильбертова пространства H (над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$) называется *гильбертовой системой* (или *системой Гильберта*), если в H определен такой линейный ограниченный оператор A, что $g_k = A(\phi_k)$, $k \in \mathbb{N}$, где $\Phi = \{\phi_k\}_{k=1}^{\infty}$ — некоторая полная ортонормированная система.

Из определения видно, что для любой числовой последовательности $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ с конечным числом отличных от нуля членов (из $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$) верна оценка

$$\left\|\sum_{k=1}^{\infty}c_k g_k\right\|^2 \leqslant \|A\|^2\left\|\sum_{k=1}^{\infty}c_k\phi_k\right\|^2 = \|A\|^2\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^2.$$

Поскольку гильбертова система удовлетворяет условию (1) (с постоянной $C = \|A\|^2$), то в случае $H = L^2(\Omega)$ для нее также верна доказанная теорема.

Определение 3. Система элементов $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ гильбертова пространства H (над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$) называется *бесселевой* (или *системой Бесселя*), если существует такая постоянная B, что для любого $f \in H$ верна оценка

$$\sum_{k=1}^{\infty}|(f,\varphi_k)|^2 \leqslant B\|f\|^2. \tag{9}$$

Постоянная B называется *границей* бесселевой системы.

Лемма. *Если система элементов $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ гильбертова пространства H бесселева с границей B, то для любых натуральных p, q, $p \leqslant q$, и любых чисел a_k, $p \leqslant k \leqslant q$, выполняется оценка*

$$\left\|\sum_{k=p}^{q}a_k\varphi_k\right\|^2 \leqslant B\sum_{k=p}^{q}|a_k|^2.$$

Доказательство. Пусть $f = \sum\limits_{k=p}^{q}a_k\varphi_k$, тогда $\|f\|^2 = \sum\limits_{k=p}^{q}a_k(\varphi_k, f)$, и по неравенству Коши-Буняковского

$$\|f\|^2 \leqslant \left(\sum_{k=p}^{q}|a_k|^2\right)^{1/2}\cdot\left(\sum_{k=p}^{q}|(f,\varphi_k)|^2\right)^{1/2} \leqslant \sqrt{B}\|f\|\left(\sum_{k=p}^{q}|a_k|^2\right)^{1/2}.$$

Значит, $\|f\| = \left\| \sum\limits_{k=p}^{q} a_k \varphi_k \right\| \leqslant \left(B \sum\limits_{k=p}^{q} |a_k|^2 \right)^{1/2}$. Лемма доказана.

Поскольку бесселева система удовлетворяет условию (1) (с постоянной $C = B$), то в случае $H = L^2(\Omega)$ для нее также верна теорема 3.

Определение 4. Система элементов $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ гильбертова пространства H (над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$) называется *фреймом*, если существуют такие постоянные $A > 0$ и $B < \infty$, что для любого $f \in H$ верны оценки

$$A\|f\|^2 \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |(f, \varphi_k)|^2 \leqslant B\|f\|^2.$$

Постоянная A называется *нижней границей* фрейма, а постоянная B — *верхней границей* фрейма. Если $A = B$, то фрейм называется *жестким*, а если $A = B = 1$, то *фреймом Парсеваля* (или *Ляпунова*, или *ортоподобной системой*). Полная ортонормированная система в H — фрейм Парсеваля. Любой фрейм — бесселева система, поэтому в случае $H = L^2(\Omega)$ теорема 3 верна и для них.

О сходимости орторекурсивных разложений почти всюду

Орторекурсивные разложения

Напомним определение орторекурсивного разложения по последовательности элементов.

Пусть $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — система нормированных элементов гильбертова пространства H.

Определение. *Орторекурсивное разложение* (ОРР) элемента $f \in H$ по последовательности элементов $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ осуществляется следующим образом:
1) положим $r_0 = f$;
2) если задан остаток приближения $r_{n-1} \in H$, $n \in \mathbb{N}$, и элемент e_n, то полагаем

$$\hat{f}_n = (r_{n-1}, e_n), \quad r_n = r_{n-1} - \hat{f}_n e_n.$$

Назовем $\hat{f}_k$ *орторекурсивными коэффициентами Фурье* элемента $f \in H$ по системе $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$, а ряд $\sigma(f) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \hat{f}_k e_k$ назовем *орторекурсивным рядом Фурье* элемента $f \in H$ по системе $\{e_k\}$.

Легко видеть, что $r_n(f) = f - \sum\limits_{k \leqslant n} \hat{f}_k e_k$ и для ортонормированной системы функций $\{e_k\}$ орторекурсивные коэффициенты Фурье являются обычными коэффициентами Фурье, а орторекурсивный ряд Фурье — обычным рядом Фурье. Из определения следует равенство Пифагора

$$\|r_{n-1}\|^2 = \|r_n\|^2 + |\hat{f}_n|^2.$$

а также следует, что

$$f = r_0 = \sum_{k=1}^{n} \hat{f}_k e_k + r_n \quad \text{и} \quad \|f\|^2 = \|r_0\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \left|\hat{f}_k\right|^2 + \|r_n\|^2.$$

Из последнего равенства следует аналог неравенства Бесселя $\|f\|^2 \geqslant \sum\limits_k \left|\hat{f}_k\right|^2$ и утверждение, что $f = \sum\limits_k \hat{f}_k e_k$ тогда и только тогда, когда выполняется аналог равенства Парсеваля $\|f\|^2 = \sum\limits_k \left|\hat{f}_k\right|^2$. Отметим еще, что из написанного следует, что

$$\|f\| = \|r_0\| \geqslant \|r_1\| \geqslant \|r_2\| \geqslant \|r_3\| \geqslant \|r_4\| \geqslant \ldots.$$

Рассмотрим вопрос об аналоге теоремы Меньшова-Радемахера для орторекурсивных разложений.

Теорема 1. *Рассмотрим сепарабельное пространство Лебега $L^2(\Omega)$ и λ_k — такую строго положительную последовательность, что все $\lambda_k \geqslant 1$ и*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} = \infty, \tag{1}$$

тогда для любой функции $f(x) \in L^2(\Omega)$, $\|f(x)\| > 0$, найдется такая нормированная последовательность функций $\{e_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, что орторекурсивный ряд $f(x)$ по системе $\{e_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ не сходится по норме пространства и не сходится поточечно почти всюду на Ω, при этом

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\hat{f}_k|^2 \cdot \lambda_k < \infty. \tag{2}$$

Существенность условия (1)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} = \infty, \tag{1}$$

показывает следующая теорема.

Теорема 2. *Если $\{e_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность функций из пространства Лебега $L^2(\Omega)$, нормы которых ограничены в совокупности $\sup\limits_k \|e_k(x)\| = C < \infty$, положительная последовательность $\lambda_k \geqslant 1$ такова, что ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} = \Lambda < \infty, \tag{3}$$

а числовая последовательность a_k удовлетворяет уловию

$$L = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 \cdot \lambda_k < \infty, \tag{4}$$

то функциональнай ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k e_k(x)$ *абсолютно сходится почти всюду на* Ω *и*

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} |a_k e_k(x)| \right\| \leqslant C\sqrt{L\Lambda}. \tag{7}$$

Доказательство. Для любого множества E, $\mu E < \infty$, по интегральному неравенству Коши-Буняковского верна оценка

$$\int\limits_E |a_k e_k(x)| d\mu \leqslant \left(\int\limits_E d\mu \right)^{1/2} \cdot \left(\int\limits_\Omega |a_k e_k(x)|^2 d\mu \right)^{1/2} \leqslant \sqrt{\mu E} \cdot C|a_k|,$$

а по неравенству Коши-Буняковского для сумм и по (5), (6)

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 \lambda_k \right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} \right)^{1/2} = \sqrt{L\Lambda} < \infty. \tag{8}$$

Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_E |a_k e_k(x)| d\mu < \infty.$$

По теореме Беппо Леви почти всюду на E сходится ряд $\sum\limits_k |a_k e_k(x)|$. В силу произвольности множества E, $\mu E < \infty$, этот ряд сходится почти всюду на Ω. Поскольку

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k |e_k(x)| \right\| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \|e_k(x)\| \leqslant C \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|,$$

то из (8) следует (7) и теорема доказана.

Замечание. Теоремы 1 и 2 дополняют друг друга, показывая невозможность их усиления.

Мы не приводим доказательство теоремы 1, так как оно довольно длинное. А перейдем к более интересной теореме, показывающей, что в случае сходимости орторекурсивного разложения к разлагаемой функции ситуация другая, можно показать, что последовательность $\sqrt{k}$ является множителем Вейля орторекурсивного разложения.

Лемма. *Пусть орторекурсивное разложение функции* $f(x) \in L^2(\Omega)$ *по системе нормированных функций* $\{e_k(x)\}_{k=1}^{\infty} \subset L^2(\Omega)$ *сходится по норме к* $f(x)$, *пусть для целого* $n \geqslant 0$

$$S_n^*(f;x) = \max_{0 \leqslant K \leqslant n} \left| f(x) - \sum_{k=1}^{K} \hat{f}_k e_k(x) \right| = \max_{0 \leqslant K \leqslant n} |f(x)) - S_K(f;x)| = \max_{0 \leqslant K \leqslant n} |r_K(x)|.$$

Тогдв для любого натурального n *верна оценка*

$$\|S_{n^2}^*(f;x)\|^2 = \int\limits_\Omega (S_{n^2}^*(f;x))^2 \, dx \leqslant 4n \sum_{k=1}^{\infty} |\hat{f}_k|^2.$$

Доказательство. Если $(p-1)m < n \leqslant pm$, $1 \leqslant p \leqslant m$, то

$$|f(x) - S_n(f;x)| \leqslant |f(x) - S_{pm}(f;x)| + \left|\sum_{j=n+1}^{pm} \hat{f}_j e_j(x)\right|.$$

Оценим максимум первого члена правой части неравенства:

$$\left\|\max_p |f(x) - S_{pm}(f;x)|\right\|^2 \leqslant \sum_{p=1}^{m} \|f(x) - S_{pm}(f;x)\|^2 = \sum_{p=1}^{m} \sum_{k=pm}^{\infty} \left|\hat{f}_k\right|^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \min\{k,m\} \sum_{j=km}^{(k+1)m-1} \left|\hat{f}_k\right|^2 \leqslant m \sum_{k=m}^{\infty} \left|\hat{f}_k\right|^2.$$

Оценим максимум второго члена правой части неравенства. Так как

$$\max_{(p-1)m<n\leqslant pm} \left|\sum_{j=n+1}^{pm} \hat{f}_j e_j(x)\right| \leqslant \sum_{j=(p-1)m+1}^{pm} \left|\hat{f}_j e_j(x)\right|,$$

то используя неравенство Коши–Буняковского имеем

$$\left\|\max_{(p-1)m<n\leqslant pm} \left|\sum_{j=n+1}^{pm} \hat{f}_j e_j(x)\right|\right\| \leqslant \sum_{j=(p-1)m+1}^{pm} \left|\hat{f}_j\right| \leqslant \sqrt{m} \left(\sum_{j=(p-1)m+1}^{pm} \left|\hat{f}_j\right|^2\right)^{1/2},$$

откуда

$$\left\|\max_{1\leqslant p\leqslant m} \max_{(p-1)m<n\leqslant pm} \left|\sum_{j=n+1}^{pm} \hat{f}_j e_j(x)\right|\right\|^2 \leqslant m \sum_{j=1}^{m^2} \left|\hat{f}_j\right|^2.$$

В итоге имеем

$$\|S^*_{m^2}(f;x)\|^2 \leqslant 2\left(m \sum_{k=1}^{\infty} \left|\hat{f}_k\right|^2 + m \sum_{j=1}^{m^2} \left|\hat{f}_j\right|^2\right) \leqslant 4m \sum_{k=1}^{\infty} \left|\hat{f}_k\right|^2.$$

Лемма доказана.

О сходимости орторекурсивных разложений почти всюду

Лемма 1. *Пусть функция $f \in L^2(\Omega)$, $0 < \mu\Omega < \infty$, и ее орторекурсивное разложение по последовательности нормированных элементов $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset L^2(\Omega)$ сходится к f (в $L^2(\Omega)$). Пусть $m_0 = 0$, $m_k = \sum\limits_{j=0}^{k-1} 4^j = \frac{1}{3}(4^k - 1)$, $k \in \mathbb{N}$. Если сходится ряд*

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \sum_{j=m_k+1}^{\infty} \left|\hat{f}_j\right|^2 < \infty, \tag{6}$$

то

$$\sum_{k=0}^{\infty}\|S^*_{4^k}(r_{m_k};x)\|^2 \leqslant 4\sum_{k=0}^{\infty}2^k\sum_{j=m_k+1}^{\infty}\left|\hat{f}_j\right|^2<\infty, \tag{7}$$

где для целого $n\geqslant 0$

$$S^*_n(f;x)=\max_{0\leqslant K\leqslant n}\left|f(x)-\sum_{k=1}^{K}\hat{f}_k e_k(x)\right|=\max_{0\leqslant K\leqslant n}|f(x))-S_K(f;x)|=\max_{0\leqslant K\leqslant n}|r_K(x)|\,.$$

Доказательство. Если орторекурсивное разложение функции $f\in L^2(\Omega)$ по последовательности нормированных элементов $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}\subset L^2(\Omega)$ сходится к f (в $L^2(\Omega)$), то по (5) орторекурсивное разложение любого остатка $r_n(f)$ по последовательности $\{e_k\}_{k>n}$ сходится к $r_n(f)$ (в $L^2(\Omega)$). Поэтому пользуясь леммой 1 имеем оценку

$$\|S^*_{4^k}(r_{m_k};x)\|^2\leqslant 2^{k+2}\sum_{j=m_k+1}^{\infty}\left|\hat{f}_j\right|^2.$$

Значит, из оценки (6) следует оценка (7).

Лемма 2. *Пусть* $m_0=0$, $m_k=\sum\limits_{j=0}^{k-1}4^j=\frac{1}{3}(4^k-1)$, $k\in\mathbb{N}$, *а* $\alpha_j\geqslant 0$, $j\in\mathbb{N}$. *Тогда*

$$\sum_{k=0}^{\infty}2^k\sum_{j=m_k+1}^{\infty}\alpha_j=\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j\sum_{m_k<j}2^k\leqslant 2\sqrt{3}\sum_{j=1}^{\infty}\sqrt{j}\alpha_j.$$

Доказательство. Самый большой элемент в множестве натуральных чисел $E=\{k:\,m_k=\frac{1}{3}(4^k-1)<j\}$ не больше $\log_4 3j=\frac{1}{2}\log_2 3j$, поэтому $\sum\limits_{k\in E}2^k\leqslant 2\sqrt{3j}$.

Теорема. *Если орторекурсивное разложение функции* $f\in L^2(\Omega)$ *по последовательности нормированных функций* $\{e_k(x)\}_{k=1}^{\infty}\subset L^2(\Omega)$ *сходится к* f *(в* $L^2(\Omega)$*) и сходится ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{k}\left|\hat{f}_k\right|^2<\infty,$$

то орторекурсивный ряд Фурье $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\hat{f}_k e_k(x)$ *сходится почти всюду на* Ω *и*

$$\left\|\sup_K\left|f(x)-\sum_{k=1}^{K}\hat{f}_k e_k(x)\right|\right\|^2\leqslant 32\sqrt{3}\sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{k}\left|\hat{f}_k\right|^2.$$

Доказательство. Пусть $m_0=0$, $m_k=\sum\limits_{j=0}^{k-1}4^j=\frac{1}{3}(4^k-1)$, $k\in\mathbb{N}$. Докажем сначала, что подпоследовательность частичных сумм $S_{m_k}(f,x)$ сходится к $f(x)$ почти всюду на Ω. Так как

$$|f(x)-S_{m_k}(f,x)|=|r_{m_k}(f,x)|\leqslant|S^*_{4^k}(r_{m_k};x)|\,,$$

то по леммам 2 и 3

$$\sum_{k=0}^{\infty}\|f(x)-S_{m_k}(f,x)\|^2 \leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\|S^*_{4^k}(r_{m_k};x)\|^2 \leqslant$$
$$\leqslant 4\sum_{k=0}^{\infty}2^k\sum_{j=m_k+1}^{\infty}\left|\hat{f}_j\right|^2 \leqslant 8\sum_{j=1}^{\infty}\sqrt{3j}\left|\hat{f}_j\right|^2 < \infty \quad (8)$$

(по условию теоремы). По теореме Б. Леви ([7], с. 136 (глава 3, теорема 3.4.1) или [8], с. 305 (глава V, §5)) почти всюду сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|f(x)-S_{m_k}(f,x)|^2$, а значит почти всюду

$$|f(x)-S_{m_k}(f,x)| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0. \quad (9)$$

При этом

$$\left\|\sup_k|f(x)-S_{m_k}(f,x)|\right\|^2 \leqslant \sum_{k=0}^{\infty}\|f(x)-S_{m_k}(f,x)\|^2 \leqslant 8\sum_{j=1}^{\infty}\sqrt{3j}\left|\hat{f}_j\right|^2 < \infty. \quad (10)$$

Если $m_k \leqslant l < m_{k+1}$, то

$$|f(x)-S_l(f,x)| \leqslant |f(x)-S_{m_k}(f,x)| + |S_{m_k}(f,x)-S_l(f,x)|, \quad (11)$$

где $|S_{m_k}(f,x)-S_l(f,x)| \leqslant \left|S^*_{4^k}(r_{m_k};x)\right|$.

Из (8) и теоремы Б. Леви следует, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left|S^*_{4^k}(r_{m_k};x)\right|^2$ сходится почти всюду, а значит почти всюду $\left|S^*_{4^k}(r_{m_k};x)\right| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$. Отсюда и из (9), (11) следует, что почти всюду

$$f(x)-S_l(f,x) \xrightarrow[l\to\infty]{} 0.$$

Из (11) следует, что

$$\sup_l|f(x)-S_l(f,x)| \leqslant \sup_k|f(x)-S_{m_k}(f,x)| + \sup_k|S^*_{4^k}(r_{m_k};x)|.$$

Так как согласно (10) и (8)

$$\left\|\sup_k|f(x)-S_{m_k}(f,x)|\right\|^2 \leqslant 8\sum_{j=1}^{\infty}\sqrt{3j}\left|\hat{f}_j\right|^2,$$
$$\left\|\sup_k|S^*_{4^k}(r_{m_k};x)|\right\|^2 \leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\|S^*_{4^k}(r_{m_k};x)\|^2 \leqslant 8\sum_{j=1}^{\infty}\sqrt{3j}\left|\hat{f}_j\right|^2,$$

то

$$\left\|\sup_l|f(x)-S_l(f,x)|\right\|^2 \leqslant 32\sqrt{3}\sum_{j=1}^{\infty}\sqrt{j}\left|\hat{f}_j\right|^2.$$

Теорема доказана.

Неизвестна окончательность этого результата, т.е. неизвестно, нельзя ли вместо $\sqrt{n}$ взять более медленно растущую последовательность.