

## ЛЕКЦИИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО ИЗУЧЕНИЯ

### Лекция 11 (13.03.20) Интегралы Стильеса

#### Определения

В этой лекции будут рассмотрены обобщения ранее введенных интегралов. Идея обобщения принадлежит Стильесу.

Все рассматриваемые дальше функции считаем действительными, хотя можно считать их и комплексными. Те места, где различие между действительным и комплексным случаями существенно, будем отмечать особо.

**Обозначение 1.** Если дан отрезок  $\Delta = [a, b]$  и определенная в его концах функция  $g$ , то приращение  $g(b) - g(a)$  функции  $g$  на отрезке  $\Delta$  будем обозначать  $g(\Delta)$ .

**Определение 1.** Пусть на отрезке  $[a, b]$  определены функции  $f$  и  $g$ . **Интегральной суммой Римана–Стильеса** или просто **суммой Римана–Стильеса** функции  $f$  по функции  $g$  на отрезке  $[a, b]$ , соответствующей отмеченному разбиению  $\mathbb{T} = \{(\Delta_i, \xi_i)\}_{i=1}^n$ , называют сумму

$$\mathfrak{S}(f dg, \mathbb{T}) = \sum_{\mathbb{T}} f(\xi_i)g(\Delta_i) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)g(\Delta_i),$$

где  $g(\Delta_i)$  — приращение функции  $g$  на отрезке  $\Delta_i$ .

#### Интеграл Римана–Стильеса

**Определение 2.** Функция  $f$  **интегрируема по функции  $g$**  на отрезке  $[a, b]$  в смысле Римана–Стильеса и ее интеграл равен числу  $I$ , если  $f$  и  $g$  определены на  $[a, b]$  и для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое число  $\delta > 0$ , что для любого разбиения  $\mathbb{T} = \{(\Delta_i, \xi_i)\}_{i=1}^n$  мельче  $\delta$  верно неравенство  $|\mathfrak{S}(f dg, \mathbb{T}) - I| < \varepsilon$ , т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \text{ число } \delta > 0 \forall \mathbb{T}, \xi_i \in \Delta_i \text{ и } |\Delta_i| < \delta \text{ для всех } i : \\ |\mathfrak{S}(f dg, \mathbb{T}) - I| < \varepsilon.$$

Число  $I$  называют **определенным интегралом Римана–Стильеса** от функции  $f$  по функции  $g$  на отрезке  $[a, b]$  (по отрезку  $[a, b]$ ).

**Обозначение 2.** Определенный интеграл Римана–Стильеса от функции  $f$  по функции  $g$  на отрезке  $[a, b]$  (по отрезку  $[a, b]$ ) обозначают как  $\int_a^b f dg$  или  $\int_{[a,b]} f dg$ , а если хотят подчеркнуть, что это интеграл Римана–Стильеса (в смысле Римана–Стильеса), то как  $(\mathcal{R} - \mathcal{S}) \int_a^b f dg$  или  $(\mathcal{R} - \mathcal{S}) \int_{[a,b]} f dg$ .

#### Интеграл Курцвейля–Хенстока–Стильеса

**Определение 3.** Функция  $f$  **интегрируема по функции  $g$**  на отрезке  $[a, b]$  (по отрезку  $[a, b]$ ) в смысле Курцвейля–Хенстока–Стильеса и ее интеграл равен числу  $I$ , если  $f$  и  $g$  определены на  $[a, b]$  и для любого  $\varepsilon > 0$  существует такой масштаб

$\delta$  на  $[a, b]$ , что для любого согласованного с масштабом  $\delta$  разбиения  $\mathbb{T} = \{(\Delta_i, \xi_i)\}_{i=1}^n$  верно неравенство  $|\mathfrak{S}(f dg, \mathbb{T}) - \mathbf{I}| < \varepsilon$ , т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \text{ масштаб } \delta \text{ на } [a, b] \forall \mathbb{T}, \xi_i \in \Delta_i \text{ и } |\Delta_i| < \delta(\xi_i) \text{ для всех } i : \\ |\mathfrak{S}(f dg, \mathbb{T}) - \mathbf{I}| < \varepsilon.$$

Число  $\mathbf{I}$  называют **определенным интегралом Курцвейля–Хенстока–Стилтьеса** от функции  $f$  по отрезку  $[a, b]$  (на отрезке  $[a, b]$ ).

**Обозначение 3.** Определенный интеграл Курцвейля–Хенстока–Стилтьеса от функции  $f$  по функции  $g$  на отрезке  $[a, b]$  (по отрезку  $[a, b]$ ) обозначают как  $\int_a^b f dg$  или  $\int_{[a,b]} f dg$ , а если хотят подчеркнуть, что это интеграл Курцвейля–Хенстока–Стилтьеса

(в смысле Курцвейля–Хенстока–Стилтьеса), то как  $(\mathcal{H}-\mathcal{S}) \int_a^b f dg$  или  $(\mathcal{H}-\mathcal{S}) \int_{[a,b]} f dg$ .

### Интегралы Стилтьеса как пределы по базе

Заметим, что оба определения интеграла фактически определяют интеграл как предел интегральных сумм Римана по базе.

Действительно, пусть  $M = \{\mathbb{T}\}$  — множество отмеченных разбиений отрезка  $[a, b]$ . На  $M$  по функциям  $f$  и  $g$  определена функция  $\mathfrak{S}(f dg, \mathbb{T})$ , сопоставляющая каждому отмеченному разбиению  $\mathbb{T}$  интегральную сумму Римана–Стилтьеса  $\sum_i f(\xi_i)g(\Delta_i)$ . По определениям интегралов Римана–Стилтьеса и Курцвейля–Хенстока–Стилтьеса

$$(\mathcal{R}-\mathcal{S}) \int_a^b f dg = \lim_{\mathfrak{B}_{\mathcal{R}}} \mathfrak{S}(f dg, \mathbb{T}), \\ (\mathcal{H}-\mathcal{S}) \int_a^b f dg = \lim_{\mathfrak{B}_{\mathcal{H}}} \mathfrak{S}(f dg, \mathbb{T}).$$

Из свойств предела по базе сразу следуют некоторые простейшие свойства обоих обобщенных интегралов Римана.

### Простейшие свойства интегралов Стилтьеса

**Свойство 1** (взаимоотношение интегралов). *Если функция  $f$  интегрируема по функции  $g$  на  $[a, b]$  в смысле Римана–Стилтьеса и  $\mathbf{I}$  — ее интеграл, то  $f$  интегрируема по  $g$  на  $[a, b]$  в смысле Курцвейля–Хенстока–Стилтьеса и ее интеграл то же число  $\mathbf{I}$ .*

▼ Действительно, так как  $\mathfrak{B}_{\mathcal{R}} \subset \mathfrak{B}_{\mathcal{H}}$ , то по теореме о пределах по разным базам свойство верно. ▲

**Свойство 2** (единственность интегралов). *Если интеграл Римана–Стилтьеса или Курцвейля–Хенстока–Стилтьеса от  $f$  по  $g$  на  $[a, b]$  существует, то он единственен.*

▼ Это непосредственное следствие теоремы о единственности предела по базе. ▲

**Свойство 3** (линейность по функциям). Если функция  $f$  интегрируема по функции  $g$  на  $[a, b]$  в смысле Римана–Стилтьеса или Курицвейля–Хенстока–Стилтьеса, а  $c$  — число (действительное или комплексное), то  $cf$  интегрируема по  $g$  на  $[a, b]$  в том же смысле и  $\int_a^b cf dg = c \int_a^b f dg$ ; также  $f$  интегрируема по  $cg$  на  $[a, b]$  в том же смысле и  $\int_a^b f d(cg) = c \int_a^b f dg$ .

Если функции  $f_1$  и  $f_2$  интегрируемы по функции  $g$  на  $[a, b]$  в смысле Римана–Стилтьеса или Курицвейля–Хенстока–Стилтьеса, то функция  $f_1 \pm f_2$  интегрируема по функции  $g$  на  $[a, b]$  в том же смысле и  $\int_a^b f_1 \pm f_2 dg = \int_a^b f_1 dg \pm \int_a^b f_2 dg$ ; если функция  $f$  интегрируема по функциям  $g_1$  и  $g_2$  на  $[a, b]$  в смысле Римана–Стилтьеса или Курицвейля–Хенстока–Стилтьеса, то функция  $f$  интегрируема по функциям  $g_1 \pm g_2$  на  $[a, b]$  в том же смысле и  $\int_a^b f d(g_1 \pm g_2) = \int_a^b f dg_1 \pm \int_a^b f dg_2$ .

▼ Действительно, функциям  $cf$  и  $g$  на множестве отмеченных разбиений  $\mathbb{T}$  соответствует функция  $\mathfrak{S}(cf dg, \mathbb{T}) = c\mathfrak{S}(f dg, \mathbb{T})$  и если  $\mathfrak{B}$  — любая из двух баз, то по теореме о пределе произведения существует  $\int_a^b cf dg = \lim_{\mathfrak{B}} \mathfrak{S}(cf dg, \mathbb{T}) = \lim_{\mathfrak{B}} c\mathfrak{S}(f dg, \mathbb{T}) = c \lim_{\mathfrak{B}} \mathfrak{S}(f dg, \mathbb{T}) = c \int_a^b f dg$ .

Аналогично, функциям  $f$  и  $cg$  на множестве отмеченных разбиений  $\mathbb{T}$  соответствует функция  $\mathfrak{S}(f dcg, \mathbb{T}) = c\mathfrak{S}(f dg, \mathbb{T})$  и если  $\mathfrak{B}$  — любая из двух баз, то теореме о пределе суммы-разности существует  $\int_a^b f d(cg) = \lim_{\mathfrak{B}} \mathfrak{S}(f dcg, \mathbb{T}) = \lim_{\mathfrak{B}} c\mathfrak{S}(f dg, \mathbb{T}) = c \lim_{\mathfrak{B}} \mathfrak{S}(f dg, \mathbb{T}) = c \int_a^b f dg$ .

Функциям  $f_1 \pm f_2$  и  $g$  на множестве отмеченных разбиений соответствует функция  $\mathfrak{S}((f_1 \pm f_2)dg, \mathbb{T}) = \mathfrak{S}(f_1 dg, \mathbb{T}) \pm \mathfrak{S}(f_2 dg, \mathbb{T})$  и если  $\mathfrak{B}$  — любая из двух указанных баз, то по теореме о пределе суммы-разности существует  $\int_a^b f_1 \pm f_2 dg = \lim_{\mathfrak{B}} \mathfrak{S}((f_1 \pm f_2)dg, \mathbb{T}) = \lim_{\mathfrak{B}} (\mathfrak{S}(f_1 dg, \mathbb{T}) \pm \mathfrak{S}(f_2 dg, \mathbb{T})) = \lim_{\mathfrak{B}} \mathfrak{S}(f_1 dg, \mathbb{T}) \pm \lim_{\mathfrak{B}} \mathfrak{S}(f_2 dg, \mathbb{T}) = \int_a^b f_1 dg \pm \int_a^b f_2 dg$ .

Аналогично, функциям  $f$  и  $g_1 \pm g_2$  на множестве отмеченных разбиений соответствует функция  $\mathfrak{S}(f d(g_1 \pm g_2), \mathbb{T}) = \mathfrak{S}(f dg_1, \mathbb{T}) \pm \mathfrak{S}(f dg_2, \mathbb{T})$  и если  $\mathfrak{B}$  — любая из двух указанных баз, то по теореме о пределе суммы-разности существует  $\int_a^b f d(g_1 \pm g_2) = \lim_{\mathfrak{B}} \mathfrak{S}(f d(g_1 \pm g_2), \mathbb{T}) = \lim_{\mathfrak{B}} (\mathfrak{S}(f dg_1, \mathbb{T}) \pm \mathfrak{S}(f dg_2, \mathbb{T})) = \lim_{\mathfrak{B}} \mathfrak{S}(f dg_1, \mathbb{T}) \pm \lim_{\mathfrak{B}} \mathfrak{S}(f dg_2, \mathbb{T}) = \int_a^b f dg_1 \pm \int_a^b f dg_2$ . ▼

**Свойство 4** (сохранение неравенств). Если функция  $f$  интегрируема по функции  $g$  на  $[a, b]$  в любом из двух смыслов, функция  $h$  интегрируема по функции  $g$  на  $[a, b]$  в любом из двух смыслов и  $f(x) \leq h(x)$  на  $[a, b]$ , а функция  $g$  неубывает на  $[a, b]$ , то для их интегралов (возможно, в разных смыслах) справедливо неравенство

$$\int_a^b f dg \leq \int_a^b h dg.$$

▼ Действительно, в силу свойства взаимоотношения интегралов можно ограничиться случаем интегрируемости  $f$  по  $g$  и  $h$  по  $g$  в смысле Курцвейля–Хенстока–Стилтьеса. Если  $f(x) \leq h(x)$  на  $[a, b]$ , а функция  $g$  неубывает на  $[a, b]$ , то на множестве отмеченных разбиений

$$\mathfrak{S}(f dg, \mathbb{T}) = \sum_i f(\xi_i)g(\Delta_i) \leq \sum_i h(\xi_i)g(\Delta_i) = \mathfrak{S}(h dg, \mathbb{T})$$

и, значит, в силу теоремы о переходе к пределу в неравенствах (для пределов по базе)

$$\int_a^b f dg = \lim_{\mathfrak{B}_n} \mathfrak{S}(f dg, \mathbb{T}) \leq \lim_{\mathfrak{B}_n} \mathfrak{S}(h dg, \mathbb{T}) = \int_a^b h dg. \blacktriangle$$

#### Критерии Коши существования интегралов Стилтьеса

Теперь вспомним критерий Коши существования предела по базе.

Конечный предел функции  $f$  по базе  $\mathfrak{B}$  существует тогда и только тогда, когда для функции  $f$  выполняется условие: для любого  $\varepsilon > 0$  существует такой элемент  $B \in \mathfrak{B}$ , что для любых  $x, x' \in B$  верно неравенство  $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$ .

Используя критерий Коши получаем два следующих критерия интегрируемости.

**Критерий Коши интегрируемости по Риману–Стилтьесу.** Если функции  $f$  и  $g$  определены на отрезке  $[a, b]$ , то функция  $f$  интегрируема по функции  $g$  на  $[a, b]$  в смысле Римана–Стилтьеса тогда и только тогда, когда для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое число  $\delta > 0$ , что для любых разбиений  $\mathbb{T}, \mathbb{T}' \in \mathbf{B}_\delta$  верно неравенство  $|\mathfrak{S}(f dg, \mathbb{T}) - \mathfrak{S}(f dg, \mathbb{T}')| < \varepsilon$ , т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall \mathbb{T}, \mathbb{T}' \in \mathbf{B}_\delta : \\ |\mathfrak{S}(f dg, \mathbb{T}) - \mathfrak{S}(f dg, \mathbb{T}')| < \varepsilon.$$

#### Критерий Коши интегрируемости по Курцвейлю–Хенстоку–Стилтьесу.

Если функции  $f$  и  $g$  определены на отрезке  $[a, b]$ , то функция  $f$  интегрируема по функции  $g$  на  $[a, b]$  в смысле Курцвейля–Хенстока–Стилтьеса тогда и только тогда, когда для любого  $\varepsilon > 0$  существует такой масштаб  $\delta$ , что для любых разбиений Хенстока  $\mathbb{T}, \mathbb{T}' \in \mathbf{B}_\delta$  верно неравенство  $|\mathfrak{S}(f dg, \mathbb{T}) - \mathfrak{S}(f dg, \mathbb{T}')| < \varepsilon$ , т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \text{ масштаб } \delta \text{ на } [a, b] \forall \mathbb{T}, \mathbb{T}' \in \mathbf{B}_\delta : \\ |\mathfrak{S}(f dg, \mathbb{T}) - \mathfrak{S}(f dg, \mathbb{T}')| < \varepsilon.$$

Приведенные критерии Коши интегрируемости позволяют доказать следующее свойство.

**Свойство 5** (интегрируемость на подотрезках). Если функция  $f$  интегрируема по функции  $g$  на отрезке  $[a, b]$  в смысле Римана–Стилтьеса или Курцвейля–Хенстока–Стилтьеса, то она интегрируема в том же смысле и на любом отрезке  $[\bar{a}, \bar{b}] \subset [a, b]$ .

▼ Аналогично введенным для отрезка  $[a, b]$  классам отмеченных разбиений  $\mathbf{B}_\delta$ ,  $\mathbf{B}_\delta^{\mathcal{M}}$  и  $\mathbf{B}_\delta^{\mathcal{H}}$  введем для отрезка  $[\bar{a}, \bar{b}]$  такие же классы отмеченных разбиений  $\overline{\mathbf{B}}_\delta$ ,  $\overline{\mathbf{B}}_\delta^{\mathcal{M}}$  и  $\overline{\mathbf{B}}_\delta^{\mathcal{H}}$ . Пусть для заданного  $\varepsilon > 0$  найдено такое число  $\delta > 0$  (масштаб  $\delta$  на  $[a, b]$ ), что вышенаписанное условие критерия Коши выполнено. Покажем, что при тех же  $\varepsilon$  и  $\delta$  (масштабе  $\delta$ ) условие критерия Коши выполнено на  $[\bar{a}, \bar{b}]$ . Рассмотрим два произвольных разбиения  $\overline{\mathbb{T}}$  и  $\overline{\mathbb{T}}'$  из  $\overline{\mathbf{B}}_\delta$  (из  $\overline{\mathbf{B}}_\delta^{\mathcal{M}}$ , из  $\overline{\mathbf{B}}_\delta^{\mathcal{H}}$ ). Если  $a \neq \bar{a}$ , то дополним их одним и тем же разбиением отрезка  $[a, \bar{a}]$  мельче  $\delta$  (согласованным с масштабом  $\delta$  на  $[a, \bar{a}]$ ); если  $\bar{b} \neq b$ , то дополним их одним и тем же разбиением отрезка  $[\bar{b}, b]$  мельче  $\delta$  (согласованным с масштабом  $\delta$  на  $[\bar{b}, b]$ ). В результате из отмеченных разбиений  $\overline{\mathbb{T}}$  и  $\overline{\mathbb{T}}'$  отрезка  $[\bar{a}, \bar{b}]$  получим разбиения отрезка  $[a, b]$   $\mathbb{T}$  и  $\mathbb{T}'$  из  $\mathbf{B}_\delta$  (из  $\mathbf{B}_\delta^{\mathcal{M}}$ , из  $\mathbf{B}_\delta^{\mathcal{H}}$ ). Так как дополнялись разбиения  $\overline{\mathbb{T}}$  и  $\overline{\mathbb{T}}'$  одинаковым образом, то разность интегральных сумм  $\mathfrak{S}(f dg, \overline{\mathbb{T}}) - \mathfrak{S}(f dg, \overline{\mathbb{T}}')$  на отрезке  $[\bar{a}, \bar{b}]$  равна разности интегральных сумм  $\mathfrak{S}(f dg, \mathbb{T}) - \mathfrak{S}(f dg, \mathbb{T}')$  на отрезке  $[a, b]$  и, значит, (в силу критерия Коши) меньше  $\varepsilon$  по абсолютной величине. Следовательно, условие критерия Коши на отрезке  $[\bar{a}, \bar{b}]$  выполнено и  $f$  интегрируема на  $[\bar{a}, \bar{b}]$  в смысле Римана–Стилтьеса (Курцвейля–Хенстока–Стилтьеса). ▲

В заключение отметим, что интеграл Римана–Стилтьеса широко известен. Интеграл Курцвейля–Хенстока–Стилтьеса известен мало.

#### Аддитивность по отрезкам

Свойством аддитивности по отрезкам интеграл Римана–Стилтьеса не обладает, что показывает следующий пример.

**Пример.** Функция

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in [-1, 0], \\ 1, & \text{если } x \in (0, 1] \end{cases}$$

интегрируема по функции

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in [-1, 0), \\ 1, & \text{если } x \in [0, 1] \end{cases}$$

на отрезках  $[-1, 0]$  и  $[0, 1]$  в смысле Римана–Стилтьеса, но не интегрируема на отрезке  $[-1, 1]$  в том же смысле.

▼ Поскольку  $f(x) = 0$  на  $[-1, 0]$ , то для любого отмеченного разбиения отрезка  $[-1, 0]$  интегральная сумма функции  $f$  по функции  $g$  равна 0, предел интегральных сумм по базе Римана  $\mathfrak{B}_{\mathcal{R}}$  равен 0, т.е.  $(\mathcal{R} - \mathcal{S}) \int_{-1}^0 f dg = 0$ .

Поскольку  $g(x)$  постоянна на  $[0, 1]$ , то на любом отрезке  $\Delta \subset [0, 1]$  приращение функции  $g$  будет равно 0, значит для любого отмеченного разбиения отрезка  $[0, 1]$  интегральная сумма функции  $f$  по функции  $g$  равна 0, предел интегральных сумм по базе Римана  $\mathfrak{B}_{\mathcal{R}}$  равен 0, т.е.  $(\mathcal{R} - \mathcal{S}) \int_0^1 f dg = 0$ .

Теперь рассмотрим любое такое отмеченное разбиение отрезка  $[-1, 1]$ , что точка 0 лежит внутри одного из отрезков разбиения  $\Delta_k$ . Тогда  $g(\Delta_k) = 1$ , а при  $i \neq k$   $g(\Delta_i) = 0$ . Если отмеченная точка  $\xi_k \leq 0$ , то  $f(\xi_k) = 0$  и интегральная сумма функции  $f$  по функции  $g$  равна 0, а если отмеченная точка  $\xi_k > 0$ , то  $f(\xi_k) = 1$  и интегральная

сумма функции  $f$  по функции  $g$  равна 1. На любом элементе  $B_\delta \in \mathfrak{B}_R$  интегральные суммы принимают значения 0 и 1, критерий Коши интегрируемости в смысле Римана–Стилтьеса не выполняется.  $\blacktriangle$

**Лекция 12 (17.03.20)**  
**Интегралы Стилтьеса.**  
**Функции ограниченной вариации**

Интеграл Курцвейля–Хенстока–Стилтьеса обладает свойством аддитивности по отрезкам.

**Теорема 1** (аддитивность по отрезкам). Пусть  $a < b < c$  и функция  $f$  интегрируема по функции  $g$  на отрезках  $[a, b]$  и  $[b, c]$  в смысле Курцвейля–Хенстока–Стилтьеса. Тогда  $f$  интегрируема по функции  $g$  на  $[a, c]$  в том же смысле и

$$\int_a^c f dg = \int_a^b f dg + \int_b^c f dg.$$

▼ Обозначим для краткости  $I_1 = \int_a^b f dg$ ,  $I_2 = \int_b^c f dg$ . Возьмем произвольное  $\varepsilon > 0$  и сначала найдем такой масштаб  $\delta_1$  на  $[a, b]$ , что для любого согласованного с ним разбиения  $\mathbb{T}^1$  отрезка  $[a, b]$  верно неравенство

$$|\mathfrak{S}(f dg, \mathbb{T}^1) - I_1| < \varepsilon;$$

а затем найдем такой масштаб  $\delta_2$  на  $[b, c]$ , что для любого согласованного с ним разбиения  $\mathbb{T}^2$  отрезка  $[b, c]$  верно неравенство

$$|\mathfrak{S}(f dg, \mathbb{T}^2) - I_2| < \varepsilon.$$

Положим

$$\delta(x) = \begin{cases} \min\{\delta_1(x), b - x\} & \text{при } x \in [a, b), \\ \min\{\delta_1(x), \delta_2(x)\} & \text{при } x = b, \\ \min\{\delta_2(x), x - b\} & \text{при } x \in (b, c]. \end{cases}$$

Тогда в любом согласованном с  $\delta(x)$  разбиении  $\mathbb{T}$  отрезка  $[a, c]$ ,  $\mathbb{T} = \{(\Delta_i, \xi_i)\}_{i=1}^n$ , присутствуют один или два отрезка разбиения  $\Delta_j \ni b$  с отмеченной точкой  $\xi_j = b$ , так как для любого отрезка разбиения  $\Delta_i$  с  $\xi_i \neq b$  из определения масштаба  $\delta$  следует, что  $b \notin B_{\delta(\xi_i)}(\xi_i)$ , а значит,  $b \notin \Delta_i$ . В случае присутствия в разбиении  $\mathbb{T}$  двух содержащих точку  $b$  отрезков разбиения она является их общим концом, а также отмеченной точкой для обоих отрезков. Тогда  $\mathbb{T}^1 = \{(\Delta_i, \xi_i) \in \mathbb{T} : \Delta_i \subset [a, b]\}$  — разбиение отрезка  $[a, b]$ , согласованное с  $\delta(x) \leq \delta_1(x)$  и  $|\mathfrak{S}(f dg, \mathbb{T}^1) - I_1| < \varepsilon$ , а  $\mathbb{T}^2 = \{(\Delta_i, \xi_i) \in \mathbb{T} : \Delta_i \subset [b, c]\}$  — разбиение отрезка  $[b, c]$ , согласованное с  $\delta(x) \leq \delta_2(x)$  и  $|\mathfrak{S}(f dg, \mathbb{T}^2) - I_2| < \varepsilon$ . А так как  $\mathfrak{S}(f dg, \mathbb{T}) = \mathfrak{S}(f dg, \mathbb{T}^1) + \mathfrak{S}(f dg, \mathbb{T}^2)$ , то  $|\mathfrak{S}(f dg, \mathbb{T}) - (I_1 + I_2)| \leq |\mathfrak{S}(f dg, \mathbb{T}^1) - I_1| + |\mathfrak{S}(f dg, \mathbb{T}^2) - I_2| < 2\varepsilon$ . Если же только один отрезок  $\Delta_j = [a_{j-1}, a_j]$  разбиения  $\mathbb{T}$  содержит точку  $b$ ,  $b \in (a_{j-1}, a_j)$ ,  $\xi_j = b$ , где  $1 \leq j \leq n$ , то перейдем от разбиения  $\mathbb{T}$  к разбиению  $\bar{\mathbb{T}} = (\mathbb{T} \setminus \{(\Delta_j, \xi_j)\}) \cup \{([a_{j-1}, b], b), ([b, a_j], b)\}$ . Очевидно

$$\mathfrak{S}(f dg, \mathbb{T}) = \mathfrak{S}(f dg, \bar{\mathbb{T}}),$$

а  $\overline{\mathbb{T}}$  — согласованное с масштабом  $\delta$  разбиение отрезка  $[a, c]$  уже рассмотренного типа и

$$|\mathfrak{S}(f dg, \overline{\mathbb{T}}) - (I_1 + I_2)| < 2\varepsilon.$$

В итоге получаем, что для любого  $\varepsilon > 0$  существует такой масштаб  $\delta$  на  $[a, c]$ , что для любого отмеченного разбиения  $\mathbb{T}$  отрезка  $[a, c]$  верно неравенство  $|\mathfrak{S}(f dg, \mathbb{T}) - (I_1 + I_2)| < 2\varepsilon$ . Следовательно,  $f$  интегрируема на  $[a, c]$  в смысле Курцвейля–Хенстока–Стилтьеса и  $\int_a^c f dx = I_1 + I_2$ .  $\blacktriangle$

Для интеграла Римана–Стилтьеса свойство аддитивности верно при дополнительном требовании существования интегралов по всем трем отрезкам.

**Теорема 2** (аддитивность по отрезкам). Пусть  $a < b < c$  и функция  $f$  интегрируема по функции  $g$  на отрезках  $[a, b]$ ,  $[b, c]$  и  $[a, c]$  в смысле Римана–Стилтьеса. Тогда

$$\int_a^c f dg = \int_a^b f dg + \int_b^c f dg.$$

▼ По свойству взаимосвязи интегралов, если существует интеграл Римана–Стилтьеса, то существует равный ему интеграл Курцвейля–Хенстока–Стилтьеса. А последний аддитивен по отрезкам, поэтому

$$\begin{aligned} (\mathcal{R} - \mathcal{S}) \int_a^c f dg &= (\mathcal{H} - \mathcal{S}) \int_a^c f dg = (\mathcal{H} - \mathcal{S}) \int_a^b f dg + \\ &+ (\mathcal{H} - \mathcal{S}) \int_b^c f dg = (\mathcal{R} - \mathcal{S}) \int_a^b f dg + (\mathcal{R} - \mathcal{S}) \int_b^c f dg. \blacktriangle \end{aligned}$$

В заключение отметим (без доказательства), что если потребовать чуть большую интегрируемость в смысле Римана–Стилтьеса, интегрируемость  $f$  по  $g$  на  $[a, d]$  и  $[b, c]$ ,  $a < b < d < c$ , то  $f$  будет интегрируема по  $g$  в смысле Римана–Стилтьеса на  $[a, c]$ .

### Определения вариации

Вопрос интегрируемости конкретной функции  $f$  по конкретной функции  $g$  в каком-либо смысле может оказаться весьма сложным и зависит от особенностей каждой из функций. Обычно ищут такую пару классов функций, что каждая функция первого класса интегрируема по каждой функции второго класса. Одну такую пару укажем в данном разделе.

**Определение 1.** Пусть  $E$  — подмножество  $\mathbb{R}$ ,  $\varphi$  — определенная на  $E$  функция. Через  $D = \{a_i\}_{i=0}^n$  будем обозначать упорядоченный в порядке возрастания конечный набор точек из  $E$ ,  $I_i = [a_{i-1}, a_i]$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Точная верхняя грань сумм

$$\sum_{i=1}^n |\varphi(I_i)| = \sum_{i=1}^n |\varphi(a_i) - \varphi(a_{i-1})|,$$

взятая по всем конечным упорядоченным наборам  $D$  точек множества  $E$ , называется **вариацией** функции  $\varphi$  на множестве  $E$ .

**Обозначение 1.** Вариация функции  $\varphi$  на множестве  $E$  обозначается  $\text{Var}_E \varphi$ .

**Определение 2.** Если  $\text{Var}_E \varphi < \infty$ , то  $\varphi$  называют **функцией ограниченной вариации** (с ограниченным изменением, **VB-функцией**) на множестве  $E$ .

**Обозначение 2.** Пространство функций ограниченной вариации на множестве  $E$  обозначается  $\text{VB}(E)$ .

Часто встречается другое определение вариации эквивалентное определению 1. Приведем его.

**Определение 3.** Точная верхняя грань сумм  $\sum_i |\varphi(I_i)|$ , взятая по всем не более чем счетным наборам неперекрывающихся отрезков  $\{I_i\}$  с концами из множества  $E$ , называется **вариацией** функции  $\varphi$  на множестве  $E$  и обозначается также  $\text{Var}_E \varphi$ .

**Теорема 3.** Два приведенных определения вариации  $\text{Var}_E \varphi$  эквивалентны.

▼ Чтобы обозначать в доказательстве, о каком определении идет речь, будем добавлять к вариации по определению 1 индекс 1, а к вариации по определению 3 индекс 2 т.е. будем писать соответственно  $\text{Var}_E^1 \varphi$  или  $\text{Var}_E^2 \varphi$ .

Если  $D = \{a_i\}_{i=0}^n$  — упорядоченный в порядке возрастания конечный набор точек из  $E$ , то отрезки  $I_i = [a_{i-1}, a_i]$ ,  $i = 1, \dots, n$ , образуют конечную систему неперекрывающихся отрезков. Значит,  $\sup_D \sum_{i=1}^n |\varphi(I_i)| = \text{Var}_E^1 \varphi \leq \text{Var}_E^2 \varphi$ .

Покажем теперь, что  $\text{Var}_E^2 \varphi \leq \text{Var}_E^1 \varphi$ . Действительно, в определении 3 можно ограничиться конечными наборами неперекрывающихся отрезков, т.к. бесконечная сумма  $\sum_i |\varphi(I_i)|$  — предел конечных сумм (по определению). Если  $\{I_k\}$  — конечный набор неперекрывающихся отрезков с концами из множества  $E$ , то, обозначив через  $a_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ , их концы, занумерованные в порядке возрастания, получим, что среди отрезков  $[a_{i-1}, a_i]$ ,  $i = 1, \dots, n$ , содержатся все отрезки  $I_k$  и, значит,  $\sum_k |\varphi(I_k)| \leq \sum_{i=1}^n |\varphi([a_{i-1}, a_i])|$ , откуда следует, что  $\text{Var}_E^2 \varphi \leq \text{Var}_E^1 \varphi$ , что и требовалось.

В итоге имеем:  $\text{Var}_E^1 \varphi = \text{Var}_E^2 \varphi$ . ▲

### Свойства функций ограниченной вариации

**Свойство 1.** Если  $\varphi$  определена на  $E$  и  $H \subset E$ , то  $\text{Var}_H \varphi \leq \text{Var}_E \varphi$ .

▼ Это непосредственное следствие любого определения вариации. ▲

**Свойство 2.** Если  $\varphi$  — VB-функция на  $E$ ,  $c \in \mathbb{R} (\in \mathbb{C})$ , то  $c\varphi$  — VB-функция на  $E$  и  $\text{Var}_E c\varphi = |c| \text{Var}_E \varphi$ . Если  $\varphi$  и  $\psi$  — VB-функции на  $E$ , то  $\varphi \pm \psi$  — VB-функция на  $E$  и  $\text{Var}_E (\varphi \pm \psi) \leq \text{Var}_E \varphi + \text{Var}_E \psi$ .

▼ Для любого отрезка  $I$   $|c\varphi(I)| = |c| \cdot |\varphi(I)|$ , поэтому  $\text{Var}_E c\varphi = |c| \text{Var}_E \varphi$ .

Для любого отрезка  $I$   $|(\varphi \pm \psi)(I)| \leq |\varphi(I)| + |\psi(I)|$ , поэтому  $\text{Var}_E (\varphi \pm \psi) \leq \text{Var}_E \varphi + \text{Var}_E \psi$ . ▲

**Свойство 3.** Если  $\varphi$  — VB-функция на  $E$ , то  $\varphi$  ограничена на  $E$ .

▼ Действительно, если точка  $x_0 \in E$ , то для любой точки  $x \in E$  верно неравенство  $|\varphi(x)| \leq |\varphi(x) - \varphi(x_0)| + |\varphi(x_0)| \leq \text{Var}_E \varphi + |\varphi(x_0)|$ , значит,  $\varphi$  ограничена на  $E$ . ▲



**Свойство 4.** Если  $\varphi$  — VB-функция на  $[a, b]$  и  $[b, c]$ , то  $\varphi$  — VB-функция на  $[a, c]$  и  $\text{Var}_{[a,c]} \varphi = \text{Var}_{[a,b]} \varphi + \text{Var}_{[b,c]} \varphi$ .

▼ Пусть  $\{a_i\}_{i=0}^n$  — упорядоченный в порядке возрастания конечный набор точек из  $[a, b]$ , а  $\{b_j\}_{j=0}^m$  — упорядоченный в порядке возрастания конечный набор точек из  $[b, c]$ . Объединив их, получим упорядоченный в порядке возрастания конечный набор точек из  $[a, c]$  и

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |\varphi(a_i) - \varphi(a_{i-1})| + \sum_{j=1}^m |\varphi(b_j) - \varphi(b_{j-1})| &\leq \\ &\leq \sum_{i=1}^n |\varphi(a_i) - \varphi(a_{i-1})| + |\varphi(b_0) - \varphi(a_n)| + \sum_{j=1}^m |\varphi(b_j) - \varphi(b_{j-1})|, \end{aligned}$$

значит,

$$\sum_{i=1}^n |\varphi(a_i) - \varphi(a_{i-1})| + \sum_{j=1}^m |\varphi(b_j) - \varphi(b_{j-1})| \leq \text{Var}_{[a,c]} \varphi,$$

и, следовательно,

$$\text{Var}_{[a,b]} \varphi + \text{Var}_{[b,c]} \varphi \leq \text{Var}_{[a,c]} \varphi.$$

Если  $\{c_i\}_{i=0}^n$  — упорядоченный в порядке возрастания конечный набор точек из  $[a, c]$ , содержащий точку  $c$ ,  $c = c_j$ ,  $0 < j < n$ , то  $\{c_i\}_{i=0}^j$  — упорядоченный в порядке возрастания конечный набор точек из  $[a, b]$ , а  $\{c_i\}_{i=j}^n$  — упорядоченный в порядке возрастания конечный набор точек из  $[b, c]$ . Так как  $\sum_{i=1}^n |\varphi(c_i) - \varphi(c_{i-1})| =$

$$\left( \sum_{i=1}^j + \sum_{i=j+1}^n \right) |\varphi(c_i) - \varphi(c_{i-1})|, \text{ то}$$

$$\sum_{i=1}^n |\varphi(c_i) - \varphi(c_{i-1})| \leq \text{Var}_{[a,b]} \varphi + \text{Var}_{[b,c]} \varphi.$$

Поскольку к любому набору точек из  $[a, c]$  можно добавить точку  $c$  и точку, которая меньше  $c$ , а также точку, которая больше  $c$ , только увеличив при этом сумму модулей приращений  $\varphi$  по парам соседних точек, то

$$\text{Var}_{[a,c]} \varphi \leq \text{Var}_{[a,b]} \varphi + \text{Var}_{[b,c]} \varphi.$$

В итоге имеем равенство  $\text{Var}_{[a,c]} \varphi = \text{Var}_{[a,b]} \varphi + \text{Var}_{[b,c]} \varphi$ . ▲

**Свойство 5.** Если  $\varphi$  и  $\psi$  — VB-функции на  $E$ , то их произведение  $\varphi\psi$  — VB-функция на  $E$  и  $\text{Var}_E \varphi\psi \leq \sup_E |\varphi| \cdot \text{Var}_E \psi + \sup_E |\psi| \cdot \text{Var}_E \varphi$ .

▼ Для любого отрезка  $I = [a, b]$  с концами  $a, b \in E$  верна оценка  $|(\varphi\psi)(I)| = |\varphi(b)\psi(b) - \varphi(a)\psi(a)| = |\varphi(b)(\psi(b) - \psi(a)) + \psi(a)(\varphi(b) - \varphi(a))| \leq |\varphi(b)| \cdot |\psi(I)| + |\psi(a)| \cdot |\varphi(I)| \leq \sup_E |\varphi| \cdot |\psi(I)| + \sup_E |\psi| \cdot |\varphi(I)|$ , поэтому  $\text{Var}_E \varphi\psi \leq \sup_E |\varphi| \cdot \text{Var}_E \psi + \sup_E |\psi| \cdot \text{Var}_E \varphi$ .

▲

**Свойство 6.** Если  $\varphi$  — VB-функция на  $E$  и  $m = \inf_E |\varphi| > 0$ , то  $\frac{1}{\varphi}$  — VB-функция на  $E$  и  $\text{Var}_E \frac{1}{\varphi} \leq \frac{1}{m^2} \text{Var}_E \varphi$ .

▼ Для любого отрезка  $I = [a, b]$  с концами  $a, b \in E$  верна оценка  $\left| \frac{1}{\varphi}(I) \right| = \left| \frac{1}{\varphi(b)} - \frac{1}{\varphi(a)} \right| = \left| \frac{\varphi(a) - \varphi(b)}{\varphi(a)\varphi(b)} \right| \leq \frac{|\varphi(I)|}{m^2}$ , поэтому  $\text{Var}_E \frac{1}{\varphi} \leq \frac{1}{m^2} \text{Var}_E \varphi$ . ▲

**Свойство 7.** Если  $\varphi$  —  $VB$ -функция на  $E$ ,  $\psi \in \text{Lip}(\varphi(E))$ , то  $\psi(\varphi)$  —  $VB$ -функция на  $E$  и  $\text{Var}_E \psi(\varphi) \leq C \text{Var}_E \varphi$ , где  $C$  — постоянная из определения класса Липшица.

▼ Для любого отрезка  $I = [a, b]$  с концами  $a, b \in E$  верна оценка  $|\psi(\varphi)(I)| = |\psi(\varphi(b)) - \psi(\varphi(a))| \leq C|\varphi(b) - \varphi(a)| = C|\varphi(I)|$ , поэтому  $\text{Var}_E \psi(\varphi) \leq C \text{Var}_E \varphi$ . ▲

### Лекция 13 (20.03.20)

#### Функции ограниченной вариации. Интегрирование непрерывных функций по функциям ограниченной вариации.

#### Интегрирование по частям для интеграла Римана–Стилтьеса

Функции ограниченной вариации — разность монотонных функций

**Обозначение.** Пусть  $\varphi$  определена на  $[a, b]$ ,  $a \leq b$ , тогда полагаем  $\text{Var}_a^b \varphi = \text{Var}_{[a,b]} \varphi$ ,  
 $\text{Var}_b^a \varphi = -\text{Var}_{[a,b]} \varphi$ .

Тогда из свойства 4 следует, что при любом расположении точек  $a, b, c$  на  $\mathbb{R}$ , если функция  $\varphi$  определена на  $[\min\{a, b, c\}, \max\{a, b, c\}]$ , то

$$\text{Var}_a^c \varphi = \text{Var}_a^b \varphi + \text{Var}_b^c \varphi.$$

**Теорема 1.** Если  $\varphi$  —  $VB$ -функция на промежутке  $I$ , точка  $x_0 \in I$ , то  $\text{Var}_{x_0}^x \varphi$  — неубывающая функция на  $I$ , а если  $\varphi$  еще и действительнзначна, то неубывающими являются также функции  $\text{Var}_{x_0}^x \varphi + \varphi(x)$  и  $\text{Var}_{x_0}^x \varphi - \varphi(x)$ .

▼ Из свойства аддитивности вариации по отрезкам функций ограниченной вариации следует, что для любых  $x_1, x_2$  из  $I$

$$\text{Var}_{x_0}^{x_2} \varphi - \text{Var}_{x_0}^{x_1} \varphi = \text{Var}_{x_1}^{x_2} \varphi,$$

а при  $x_2 \geq x_1$   $\text{Var}_{x_1}^{x_2} \varphi \geq |\varphi(x_2) - \varphi(x_1)|$ . Значит,  $\text{Var}_{x_0}^x \varphi$  — неубывающая функция на  $I$  и, при действительнзначности  $\varphi$ ,  $\text{Var}_{x_0}^x \varphi + \varphi(x)$  и  $\text{Var}_{x_0}^x \varphi - \varphi(x)$  — неубывающие функции на  $I$ . ▲

**Теорема 2 (Жордана).** Действительнзначная функция  $\varphi$  является  $VB$ -функцией на отрезке  $I$  тогда и только тогда, когда  $\varphi$  является разностью двух неубывающих на  $I$  функций, причем эти функции можно выбрать такими, что сумма их вариаций на любом отрезке  $J \subset I$  будет равна вариации  $\varphi$  на  $J$ .

▼ Пусть  $I = [a, b]$ . Ограниченная неубывающая функция  $\psi$  на  $I$  —  $VB$ -функция на  $I$  и

$$\text{Var}_I \psi = \psi(b) - \psi(a),$$

поскольку для любого набора точек  $D = \{a_i\}_{i=0}^n \subset I$ ,  $a \leq a_0 < a_1 < \dots < a_n \leq b$ , имеем  $\sum_{i=1}^n |\psi(a_i) - \psi(a_{i-1})| = \psi(a_n) - \psi(a_0) \leq \psi(b) - \psi(a)$  и, значит,  $\text{Var}_I \psi \leq \psi(b) - \psi(a)$ , а с другой стороны,  $\text{Var}_I \psi \geq \psi(b) - \psi(a)$ . Поэтому, если  $\varphi$  — разность двух неубывающих на  $I$  функций, то по свойству  $2$   $\varphi$  —  $VB$ -функция на  $I$ .

Если действительнoзначная функция  $\varphi$  является  $VB$ -функцией на отрезке  $I \neq \emptyset$ , то, взяв  $x_0 \in I$ , укажем три представления  $\varphi$  в виде разности ограниченных неубывающих на  $I$  функций

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \left( \text{Var}_{x_0}^x \varphi + \varphi(x) \right) - \text{Var}_{x_0}^x \varphi, \\ \varphi(x) &= \text{Var}_{x_0}^x \varphi - \left( \text{Var}_{x_0}^x \varphi - \varphi(x) \right), \\ \varphi(x) &= \frac{1}{2} \left( \text{Var}_{x_0}^x \varphi + \varphi(x) \right) - \frac{1}{2} \left( \text{Var}_{x_0}^x \varphi - \varphi(x) \right).\end{aligned}$$

Покажем, что в последнем случае сумма вариаций функций разности на любом отрезке  $J \subset I$  равна вариации  $\varphi$  на  $J$ . Действительно, если  $J = [c, d]$ , то имеем равенство

$$\begin{aligned}\text{Var}_c^d \frac{1}{2} \left( \text{Var}_{x_0}^x \varphi \pm \varphi(x) \right) &= \frac{1}{2} \left( \text{Var}_{x_0}^d \varphi \pm \varphi(d) \right) - \frac{1}{2} \left( \text{Var}_{x_0}^c \varphi \pm \varphi(c) \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left( \text{Var}_c^d \varphi \pm (\varphi(d) - \varphi(c)) \right).\end{aligned}$$

Из него следует, что

$$\text{Var}_c^d \frac{1}{2} \left( \text{Var}_{x_0}^x \varphi + \varphi(x) \right) + \text{Var}_c^d \frac{1}{2} \left( \text{Var}_{x_0}^x \varphi - \varphi(x) \right) = \text{Var}_c^d \varphi,$$

сумма вариаций функций разности на  $J$  равна вариации  $\varphi$  на  $J$ .  $\blacktriangle$

Интегрируемость непрерывных функций по функциям ограниченной вариации

**Лемма.** Пусть  $T = \{I_i\}_{i=1}^n$  — разбиение отрезка  $[a, b]$ . Тогда для любого отрезка  $I = [c, d] \subset [a, b]$  и любой определенной на нем функции  $g$  верно равенство

$$g(I) = g(d) - g(c) = \sum_{i=1}^n g(I \cap I_i),$$

где  $g(I \cap I_i)$  — приращение функции  $g$  на отрезке  $I \cap I_i$ , причем приращение на пустом или одноточечном множестве равно нулю.

$\blacktriangledown$  Можно считать, что отрезки  $I_i$  занумерованы в порядке их расположения на  $\mathbb{R}$ . Пусть  $I_i = [a_{i-1}, a_i]$ ,  $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$ ,  $c \in I_k$ ,  $d \in I_l$ , то есть  $a_{k-1} \leq c \leq a_k < \dots < a_{l-1} \leq d \leq a_l$ . Тогда  $g(I) = g(d) - g(c) = g(d) - g(a_{l-1}) + \sum_{i=k+1}^{l-1} (g(a_i) - g(a_{i-1})) + g(a_k) - g(c) = g([c, d] \cap I_l) + \sum_{i=k+1}^{l-1} g([c, d] \cap I_i) + g([c, d] \cap I_k) = \sum_{i=1}^n g(I \cap I_i)$ .  $\blacktriangle$

**Теорема 3.** Если  $f \in C[a, b]$  (– пространстве непрерывных на  $[a, b]$  функций), а  $g \in VB[a, b]$ , то  $f$  интегрируема по  $g$  на  $[a, b]$  в смысле Римана–Стилтьеса.

▼ Так как функция  $f$  равномерно непрерывна на  $[a, b]$ , то для любого  $\varepsilon > 0$  найдётся такое  $\delta > 0$ , что если  $x, y \in [a, b]$  и  $|x - y| < 2\delta$ , то  $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ . Пусть  $\mathbb{T} = \{(\Delta_i, \xi_i)\}$  и  $\mathbb{T}' = \{(\Delta'_j, \xi'_j)\}$  отмеченные разбиения отрезка  $[a, b]$  мельче  $\delta$ , тогда  $\mathfrak{S}(f dg, \mathbb{T}) - \mathfrak{S}(f dg, \mathbb{T}') = \sum_i f(\xi_i)g(\Delta_i) - \sum_j f(\xi'_j)g(\Delta'_j) = \sum_i \sum_j (f(\xi_i) - f(\xi'_j))g(\Delta_i \cap \Delta'_j)$ , где  $g(\Delta_i \cap \Delta'_j) = 0$ , если  $\Delta_i \cap \Delta'_j$  пусто или одноточечно, а если  $\Delta_i \cap \Delta'_j \neq \emptyset$ , то имеем  $|f(\xi_i) - f(\xi'_j)| < \varepsilon$ . Поэтому  $|\mathfrak{S}(f dg, \mathbb{T}) - \mathfrak{S}(f dg, \mathbb{T}')| = \left| \sum_i \sum_j (f(\xi_i) - f(\xi'_j))g(\Delta_i \cap \Delta'_j) \right| \leq \varepsilon \sum_i \sum_j |g(\Delta_i \cap \Delta'_j)| \leq \varepsilon \text{Var}_{[a,b]} g$ .

По критерию Коши интегрируемости по Риману–Стилтьесу существует  $(\mathcal{R} - \mathcal{S}) \int_a^b f dg$ . ▲

Для интеграла Римана–Стилтьеса в теореме нельзя расширить ни один из классов с сохранением другого. Достаточно просто проверяется невозможность расширения класса функций  $f$ : если функция  $g$  ограниченной вариации на  $[a, b]$  разрывна в точке  $c \in [a, b]$  (относительно  $[a, b]$ ), то необходимым условием интегрируемости  $f$  по  $g$  на  $[a, b]$  является непрерывность  $f$  в точке  $c$  (для простоты можно ограничиться функциями  $g_c(x) = \text{sign}(x - c)$ , где  $\text{sign } x = 1$  при  $x > 0$ ,  $= 0$  при  $x = 0$  и  $= -1$  при  $x < 0$ ). Невозможность расширения класса функций  $g$  требует более тонких рассуждений.

Добавим к свойствам интегралов еще одно свойство.

**Свойство 8.** Если  $f$  интегрируема по  $g$  на  $[a, b]$  в любом из двух смыслов,  $g \in VB[a, b]$ , то верна оценка

$$\left| \int_a^b f dg \right| \leq \sup_{[a,b]} |f| \cdot \text{Var}_{[a,b]} g.$$

▼ Действительно, для любого отмеченного разбиения  $\mathbb{T} = \{(\Delta_i, \xi_i)\}$  имеем

$$\begin{aligned} |\mathfrak{S}(f dg, \mathbb{T})| &= \left| \sum_i f(\xi_i)g(\Delta_i) \right| \leq \\ &\leq \sup_{[a,b]} |f| \cdot \sum_i |g(\Delta_i)| \leq \sup_{[a,b]} |f| \cdot \text{Var}_{[a,b]} g. \end{aligned}$$

По теореме о переходе к пределу в неравенствах (для пределов по базе) оценка верна.

▲

**Теорема 1.** Если функция  $g$  интегрируема по функции  $f$  на  $[a, b]$  в смысле Римана–Стилтьеса, то и  $f$  интегрируема по  $g$  на  $[a, b]$  в том же смысле и

$$\begin{aligned} (\mathcal{R} - \mathcal{S}) \int_a^b f dg &= f \cdot g \Big|_a^b - (\mathcal{R} - \mathcal{S}) \int_a^b g df = \\ &= f(b)g(b) - f(a)g(a) - (\mathcal{R} - \mathcal{S}) \int_a^b g df. \end{aligned}$$

▼ Пусть  $\mathbb{T} = \{(\Delta_i, \xi_i)\}$  — разбиение отрезка  $[a, b]$ ,  $\xi_i \in \Delta_i = [a_{i-1}, a_i]$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$ . Тогда  $\mathfrak{S}(f dg, \mathbb{T}) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(g(a_i) - g(a_{i-1})) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)g(a_i) - \sum_{i=1}^n f(\xi_i)g(a_{i-1}) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)g(a_i) - \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_{i+1})g(a_i) = f(\xi_{n+1})g(a_n) - f(\xi_0)g(a_0) - \sum_{i=0}^n g(a_i)(f(\xi_{i+1}) - f(\xi_i))$ , где  $\xi_0 = a$ ,  $\xi_{n+1} = b$ ,  $\xi_i \leq a_i \leq \xi_{i+1}$ . Тогда  $\tilde{\mathbb{T}} = \{([\xi_i, \xi_{i+1}], a_i)\}_{i=0}^n$  — отмеченное разбиение отрезка  $[a, b]$  (пары с вырожденными отрезками  $[\xi_i, \xi_{i+1}]$  можно удалить из разбиения  $\tilde{\mathbb{T}}$  и выполняется равенство

$$\mathfrak{S}(f dg, \mathbb{T}) = f(\xi_{n+1})g(a_n) - f(\xi_0)g(a_0) - \mathfrak{S}(g df, \tilde{\mathbb{T}}). \quad (*)$$

Поскольку  $a = \xi_0 = a_0 \leq \xi_1 \leq a_2 \leq \dots \leq \xi_n \leq a_n = \xi_{n+1} = b$ , то из неравенств  $|\Delta_i| = a_i - a_{i-1} < \delta$  для  $i = 1, \dots, n$  следуют неравенства  $|\xi_{i+1} - \xi_i| < 2\delta$  для  $i = 0, \dots, n$ . Значит, если в равенстве (\*) выражение справа имеет предел по базе  $\mathfrak{B}_{\mathcal{R}}$ , то и выражение слева имеет предел по той же базе и

$$\int_a^b f dg = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b g df. \blacktriangle$$

**Следствие.** Если  $f \in \text{VB}[a, b]$ , а  $g \in C[a, b]$ , то  $f$  интегрируема по  $g$  на  $[a, b]$  в смысле Римана–Стилтьеса.

▼ Действительно, по теореме об интегрируемости непрерывной функции по функции ограниченной вариации  $g$  интегрируема по  $f$  на  $[a, b]$  в смысле Римана–Стилтьеса, а тогда и  $f$  интегрируема по  $g$  на  $[a, b]$  в смысле Римана–Стилтьеса.  $\blacktriangle$

**Примечание.** Ситуация с интегрированием по частям для интеграла Курцвейля–Хенстока более сложная. Существуют примеры, когда в формуле интегрирования по частям один из интегралов существует, а другой не существует, или оба существуют, но формула не верна. Для интеграла Курцвейля–Хенстока формула интегрирования по частям верна при дополнительных условиях.