МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
ПРОГРАММА КОЛЛОКВИУМА

Механико-математический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова
2 курс, осенний семестр
3 поток (механики)

Лектор — доц. В.В. Галатенко

1. Определение ряда, частичных сумм, сходимости. Необходимое условие сходимости. Суммирование и умножение на константу сходящихся рядов. Независимость сходимости от изменения (удаления, добавления) конечного числа членов. Остатки ряда, связь частичных сумм и остатков сходящегося ряда, сходимости ряда и стремления остатков к нулю.

2. Критерий Коши сходимости ряда. Связь сходимости ряда и расстановки скобок. Абсолютная и условная сходимость рядов.

3. Ряды с неотрицательными членами. Эквивалентность сходимости и ограниченности последовательности частичных сумм. Признаки сравнения.

4. Интегральный признак Коши-Маклорена. Признак Де Аламбера. Радикальный признак Коши.

5. Признаки Куммера и Раабе сходимости числовых рядов.

6. Признак Гаусса сходимости числовых рядов.

7. Признак Лейбница сходимости числовых рядов.

8. Признаки Абеля и Дирихде сходимости числовых рядов.

9. Перестановки рядов. Теорема Коши о перестановке абсолютно сходящегося ряда.

10. Теорема Римана о перестановке условно сходящегося ряда.

11. Произведения числовых рядов. Теорема Коши о произведении абсолютно сходящихся рядов.

12. Теорема Мертенса о произведении числовых рядов.

13. Бесконечные произведения. Определение, необходимое условие сходимости. Связь со сходимостью рядов. Признаки сходимости.

14. Перестановка пределов. Критерий Гордона.

15. Равномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов. Супремум-критерий равномерной сходимости последовательности. Арифметические свойства (равномерная сходимость суммы, произведения). Необходимое условие равномерной сходимости функционального ряда.

16. Критерий Коши равномерной сходимости. Признаки Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда.

17. Признак Дирихле равномерной сходимости функционального ряда.

18. Признак Абеля равномерной сходимости функционального ряда.

19. Признак Дини равномерной сходимости.

20. Равномерно сходящиеся последовательности и ряды: теоремы о переходе к пределу и о непрерывности предела.

21. Теорема о почленном интегрировании равномерно сходящейся последовательности (равномерно сходящегося ряда).

22. Теорема о почленном дифференцировании равномерно сходящейся последовательности (равномерно сходящегося ряда).

23. Степенные ряды. Первая теорема Абеля. Понятие радиуса сходимости, формула Коши-Адамара.

24. Теоремы о почленном интегрировании и почленном дифференцировании степенного ряда.

25. Вторая теорема Абеля. Теорема о непрерывности суммы функционального ряда. Метод суммирования Абеля.

26. Теорема единственности для степенных рядов. Необходимое условия представимости функции степенным рядом. Достаточное условия представимости функции степенным рядом.

27. Степенный ряды (ряды Телора-Маклорена), задающие функции $\sin x$, $\cos x$, e^x, $\ln(1+x)$, $(a+x)^\alpha$, $arctgx$.

28. Разложение синуса в бесконечное произведение. Формула Валлиса. Разложение косинуса в бесконечное произведение.

29. Формула Стирлинга.

ЗАДАЧИ К КОЛЛОКВИУМУ

1. Привести пример

   (i) расходящегося числового ряда,

   (ii) расходящегося числового ряда с членами, стремящимися к нулю,

   и расстановки скобок в нем, переводящей ряд в сходящийся.

2. Доказать, что если члены ряда стремятся к нулю и последовательность длин скобок ограничена, то расстановка скобок не влияет на сходимость ряда.

3. Доказать, что расстановка скобок, при которой слагаемые в каждой скобке имеют одинаковый знак (возможно, различный для различных скобок) не влияет на сходимость ряда.

4. Доказать, что если в формулировке радикального признака Коши предел заменить на верхний предел, то утверждение останется верным.

5. Существует ли такая последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ неотрицательных чисел, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, но для любой последовательности $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, стремящейся к бесконечности, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ расходится? (Неформально этот вопрос можно переформулировать так: существует ли самый большой сходящийся ряд.)

6. Существует ли такая последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ неотрицательных чисел, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, но для любой последовательности $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ положительных чисел, стремящейся к бесконечности, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n}$ сходится? (Неформально этот вопрос можно переформулировать так: существует ли самый маленький расходящийся ряд.)

7. Привести примеры сходящегося и расходящегося рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ с $a_n > 0$, для которых

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = 1$$

(эти примеры позволяют оценить мертвую зону признака Раабе).

8. Привести пример ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, члены которого монотонно стремятся к нулю, для которого не применим признак Гаусса. (Этот пример показывает, что несмотря на внешнее отсутствие "мертвой зоны", признак Гаусса не является универсальным.)

9. Привести пример $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, члены которого монотонно стремятся к нулю, для которого не применим признак Гаусса, но при этом применим признак Раабе. (Этот пример показывает некорректность утверждения о том, что признак Гаусса сильнее признака Раабе).

10. Найти такие значения C_1, C_2 и α, что при всех N справедливо неравенство

$$\left|\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} - C_1 N^{\alpha}\right| < C_2.$$

11. Найти такие значения C и α, что

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = \frac{C}{N^{\alpha}} + O\left(\frac{1}{N^{\alpha+1}}\right)$$

при $N \to \infty$.

12. Привести примет таких последовательностей $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, $b_n \to 1$ $(n \to \infty)$, но ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ расходится.

13. (i) Известно, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Что можно сказать о сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$?

    (ii) Известно, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ сходится. Что можно сказать о сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$?

    (iii) Известно, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Что можно сказать о сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^3$?

    (iv) Известно, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^3$ сходится. Что можно сказать о сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$?

(v) Известно, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Что можно сказать о сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin(a_n)$?

14. Существует ли двойной ряд $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} a_{m,n}$, который

    (i) суммируется по прямоугольникам, но не суммируется по квадратам;

    (ii) суммируется по квадратам, но не суммируется по прямоугольникам.

15. Существует ли такой функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, который состоит из неотрицательных непрерывных на отрезке $[0;1]$ функций, сходится на отрезке $[0;1]$ равномерно, но при этом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sup\limits_{x\in[0;1]} f_n(x) = +\infty$ (то есть равномерную сходимость нельзя доказать по признаку Вейерштрасса).

16. Исследовать на равномерную сходимость на всевозможных интервалах, лежащих в интервале $(0;2\pi)$, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$.

17. Исследовать на равномерную сходимость на интервале $(0;\pi)$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x \sin nx}{n}$.

18. Доказать, что функция ван-дер-Вардена $f(x) \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\rho(4^n x)}{4^n}$, где $\rho(x)$ — расстояние от точки x до ближайшей целой точки, непрерывна на $\mathbb{R}$, но не дифференцируема ни в одной точке $\mathbb{R}$.

19. Может ли степенной ряд в одном конце интервала сходимости сходиться абсолютно, а в другом — сходиться условно?

20. Каков может быть радиус сходимости у суммы двух степенных рядов с общим центром, если радиус сходимости первого ряда равен R_1, а радиус сходимости второго ряда равен R_2?

21. Исследовать сходимость биномиального ряда в точках $x = \pm 1$.

22. Исходя из определения произведения рядов, непосредственно проверить равенство

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!}$$

(по сути, предлагается проверить равенство $e^x e^y = e^{(x+y)}$ в ситуации, когда функция e^x определена как сумма ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$).

23. Привести пример функции $f(x) \in C^{\infty}(\mathbb{R})$, для которой ряд Тейлора–Маклорена сходится всюду на $\mathbb{R}$, но сумма этого ряда совпадает с $f(x)$ лишь на отрезке $[-1;1]$.

24. Привести пример ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, который суммируется методом Абеля, но при этом $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{n} = \infty$.