

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ  
ПРОГРАММА КОЛЛОКВИУМА

Механико-математический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова

1 курс, 3 поток (механики), весенний семестр

Лектор — доц. В.В. Галатенко

1. Понятия точной и обобщенной первообразной. Теорема о структуре множества первообразных. Понятие неопределенного интеграла.
2. Таблица интегралов. Свойства неопределенного интеграла (линейность, замена переменных, интегрирование по частям).
3. Методы вычисления неопределенных интегралов: интегрирование рациональных функций.
4. Методы вычисления неопределенных интегралов: интегрирование дробно-линейных иррациональностей, квадратичных иррациональностей,
5. Методы вычисления неопределенных интегралов: интегрирование дифференциального бинома, тригонометрических выражений.
6. Предел по базе: определение, единственность, переход к пределу в неравенствах, лемма о зажатой функции. Предел последовательности и предел функции действительного переменного как частные случаи пределов по базе.
7. Предел по базе: арифметические свойства, сохранение предела при расширении базы (аналог теоремы о пределе подпоследовательности).
8. Критерий Коши существования предела по базе.
9. Понятие интегральной суммы Римана и интеграла Римана. Интеграл Римана как предел по базе. Простейшие свойства интеграла Римана: единственность, линейность, интегрирование неравенств, критерий Коши интегрируемости. Независимость интеграла от значений функции в конечном числе точек.
10. Необходимое условие интегрируемости. Понятие интегральной суммы Дарбу, связь сумм Дарбу и интегральных сумм Римана. Поведение сумм Дарбу при измельчении разбиения.
11. Верхний и нижний интегралы Дарбу. Теорема о сходимости сумм Дарбу к интегралам Дарбу при стремлении диаметра разбиения к нулю.
12. Критерии интегрируемости Дарбу.
13. Следствия критерия Дарбу интегрируемости: интегрируемость непрерывных функций, монотонных функций; интегрируемость композиций и ее следствия (интегрируемость модуля интегрируемой функции, произведения интегрируемых функций).
14. Понятие множества меры ноль по Лебегу. Примеры множеств меры ноль (не более чем счетные множества, множество Кантора). Критерий Лебега интегрируемости (без доказательства). Его следствие (интегрируемость композиции).
15. Первая теорема о среднем.
16. Интегрируемость на объединении отрезков. Интегрируемость кусочно-непрерывных функций. Интегрируемость на подотрезке.
17. Интеграл с переменным верхним пределом и его свойства (непрерывность, дифференцируемость). Существование точной первообразной у непрерывной на промежутке функции.

18. Основная теорема интегрального исчисления (формула Ньютона-Лейбница). Замена переменных и интегрирование по частям в определенном интеграле.
19. Геометрические и механические приложения интеграла (вычисление площадей, объемов, длин, массы стержня).
20. Понятие несобственного интеграла. Интегрирование функции  $x^{-\alpha}$  на различных промежутках. Критерий Коши сходимости несобственного интеграла.
21. Абсолютная и условная сходимость несобственного интеграла. Признаки сходимости несобственного интеграла: признаки сравнения.
22. Признаки Абеля и Дирихле сходимости несобственного интеграла.
23. Понятие интегральных сумм и интеграла Римана-Стилтьеса. Сведение интеграла Римана-Стилтьеса к интегралу Римана.

### ЗАДАЧИ К КОЛЛОКВИУМУ

1. Выразить через  $f(x)$  первообразную функции  $g(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$ , где  $f(x)$  — непрерывно дифференцируемая функция, принимающая лишь строго отрицательные значения.
2. Что можно сказать о рациональной функции, если известно, что ее первообразная является логарифмом некоторой рациональной функции?
3. Доказать, что для любой нечетной функции  $f \in R[-a; a]$  ее интеграл по отрезку  $[-a; a]$  равен нулю.
4. Доказать неинтегрируемость по Риману функции Дирихле и интегрируемость функции Римана.
5. Привести пример функций  $f, g : [0; 1] \rightarrow [0; 1]$ , каждая из которых интегрируема по Риману на отрезке  $[0; 1]$ , но композиция которых не интегрируема по Риману ни на одном подотрезке отрезка  $[0; 1]$ .
6. Привести пример функции, не ограниченной ни на одном отрезке действительной прямой.
7. Доказать, что если непрерывная неотрицательная на отрезке функция принимает хоть одно строго положительное значение, то ее интеграл по этому отрезку также строго положителен. Можно ли в этом утверждении отказаться от условия непрерывности, заменив его более слабым условием интегрируемости?
8. Может ли функция, квадрат которой интегрируемой, сама быть неинтегрируема?
9. Доказать следующую форму первой теоремы о среднем: если  $f \in C[a, b]$ , то существует такая точка  $c \in (a, b)$ , что  $\int_a^b f(x) dx = f(c)(b - a)$ .
10. Привести примера множества меры ноль по Лебегу, имеющего мощность континуум.
11. Привести пример непрерывной неотрицательной функции  $f(x)$ , для которой  $\int_1^\infty f(x) dx$  сходится, но  $\overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .
12. Следует ли из существования интеграла Римана-Стилтьеса функции  $f$  по функции  $g$  на отрезках  $[a; b]$  и  $[b; c]$  существование интеграла функции  $f$  по функции  $g$  на отрезке  $[a; c]$ ?
13. Для функции  $g(x) = \operatorname{sgn} x$  описать класс всех функций  $f(x)$ , которые интегрируемы на отрезке  $[-1; 1]$  по функции  $g$ , и выразить  $\int_0^1 f dg$  в терминах функции  $f$ .
14. (\*) Описать множество всех определенных на отрезке  $[0; 1]$  функций, по которым в смысле Римана-Стилтьеса интегрируемы все определенные на этом же отрезке функции.