МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

ПРОГРАММА КОЛЛОКВИУМА

Механико-математический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова
1 курс, осенний семестр
3 поток (механики)

Лектор — доц. В.В. Галатенко

1. Понятие множества. Способы задания множеств. Парадокс Рассела. Понятия подмножества, равенства множеств. Операции над парой множеств: объединение, пересечение, разность; свойства этих операций. Правила дополнения.

2. Кванторы существования, существования и единственности, всеобщности. Построение отрицаний утверждений с кванторами. Объединение и пересечение произвольной совокупности множеств (случаи неиндексированной и индексированной совокупности): определения, свойства. Правила дополнения в случае произвольных совокупностей множеств.

3. Понятие пары и упорядоченной пары. Декартовы произведения множеств. Понятие отношения. Частные случаи: отношения порядка, отношения эквивалентности. Понятие обратного отношения.

4. Понятия отображения, инъекции, сюръекции, биекции. Понятия образа и прообраза. Понятие композиции отображений. Теорема о существовании обратного отображения.

5. Аксиоматика Пеано. Принцип математической индукции. Порождение отношения порядка и арифметических операций на множестве натуральных чисел отношением следования (без доказательства). Множества целых и рациональных чисел, отношение порядка и арифметические операции на этих множествах.

6. Аксиоматика действительных чисел. Эквивалентные формулировки аксиомы полноты (принципа Дедекинда).

7. Следствия аксиомы полноты: существование точных граней (принцип полноты Вейерштрасса), принцип вложенных отрезков Кантора, принцип Архимеда.

8. Примеры применения принципа математической индукции: неравенство И. Бернулли, бином Ньютона.

9. Понятие эквивалентности (равномощности) множеств, свойства: рефлексивность, симметричность, транзитивность. Сравнение мощностей: транзитивность отношения $\operatorname{card} A \leqslant \operatorname{card} B$; сравнимость мощностей произвольной пары множеств (без доказательства); теорема Кантора-Бернштейна-Шредера (без доказательства). Конечные множества и их свойства.

10. Счетные и не более чем счетные множества. Теорема Кантора об объединении не более чем счетной совокупности не более чем счетных множеств и следствия из нее. Счетность множества целых чисел, рациональных чисел, алгебраических чисел. Теорема Кантора о несчетности отрезка. Существование трансцендентных (неалгебраических) чисел.

11. Континуальные множества. Континуальность промежутков числовой прямой, всей числовой прямой, фигур на плоскости, множества всех двузначных последовательностей, множества иррациональных чисел, множества трансцендентных чисел. Теорема Кантора о множестве всех подмножеств.

12. Внутренние, внешние, граничные точки множеств на числовой прямой. Открытые и замкнутые множества на числовой прямой, их свойства. Предельные точки. Характеризация замкнутых множеств в терминах предельных точек.

13. Теорема Гейне-Бореля-Лебега о компактности ограниченных замкнутых множеств на числовой прямой.

14. Теорема Больцано-Вейерштрасса о существовании предельной точки.

15. Понятия числовой последовательности и предела числовой последовательности. Свойства: единственность предела, ограниченность сходящейся последовательности, свойство отделимости, линейность предела, независимость предела от изменения конечного числа членов последовательности, переход к пределу в неравенствах, лемма о зажатой последовательности.

16. Бесконечно малые последовательности и ограниченные последовательности, их свойства. О-символика. Арифметические свойства предела последовательности (предел произведения и частного).

17. Теорема Больцано-Вейерштрасса о выделении сходящейся подпоследовательности.

18. Критерий Коши и примеры его применения.

19. Сходимость монотонных последовательностей. Число е.

20. Расширенная числовая прямая. Сходимость числовых последовательностей на расширенной числовой прямой.

21. Понятие числового ряда. Сходимость числового ряда. Необходимое условие и критерий Коши сходимости числового ряда.

22. Понятие частичного предела последовательности. Теорема о структуре множества частичных пределов последовательности.

23. Эквивалентные определения верхнего и нижнего пределов.

ЗАДАЧИ К КОЛЛОКВИУМУ

1. Является ли равенство $(A \cup B) \setminus C = A \cup (B \setminus C)$ (i) верным хотя бы для одной тройки множеств A, B, C; (ii) неверным хотя бы для одной тройки множеств A, B, C?

2. (i) Сколько различных отношений порядка можно задать на множестве из семи элементов? (ii) Сколько различных отношений эквивалентности можно задать на множестве из пяти элементов?

3. Пусть f — произвольное отображения. Верны ли равенства
$$f(A \circ B) = f(A) \circ f(B)$$
и
$$f^{-1}(A \circ B) = f^{-1}(A) \circ f^{-1}(B),$$
если через $\circ$ обозначено (i) объединение множеств; (ii) пересечение множеств; (iii) разность множеств?

4. Используя метод математической индукции, доказать, что в любом конечном непустом подмножестве множества действительных чисел (или любого другого линейно упорядоченного множества) имеется минимальный и максимальный элементы.

5. Вычислить для каждого натурального n суммы $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k$ и $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k$.

6. Доказать, что если A и B — такие непустые подмножества множества действительных чисел, что $\forall a \in A\ \exists b \in B$: $a \leqslant b$, то $\sup A \leqslant \sup B$. Останется ли утверждение верным, если всюду в нем нестрогие неравенства заменить на строгие?

7. Существует ли такое множество A, что для любого множества B выполняется неравенство $\mathrm{card} B \leqslant \mathrm{card} A$?

8. Доказать, что в любом несчетном множестве треугольников на плоскости найдется по крайней мере одна пара несовпадающих треугольников, внутренности которых пересекаются. Может ли множество всех таких пар быть (i) конечным; (ii) счетным?

9. Доказать, что множество всех последовательностей действительных чисел континуально.

10. Доказать, что множество Кантора (i) замкнуто; (ii) континуально.

11. Доказать, что на числовой прямой существует ровно два множества, которые одновременно открыты и замкнуты.

12. Доказать, что на числовой прямой непустое множество открыто если и только если оно представимо (i) в виде объединения интервалов; (ii) в виде не более чем счетного объединения попарно не пересекающихся интервалов.

13. Доказать, что ограниченность и замкнутость является для множеств на числовой прямой не только достаточным, но и необходимым условием компактности.

14. Доказать, что если последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится, то последовательность $\{|a_n|\}_{n=1}^{\infty}$ также сходится. Верно ли обратное утверждение?

15. Доказать,что для любого $a > 1$ справедливо равенство $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3}{a^n} = 0$.

16. Доказать равенство $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2010n + 2011} = 1$.

17. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!}$ $(a \in \mathbb{R})$.

18. Доказать, что если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \in \overline{\mathbb{R}}$ и $\sigma_n = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)/n$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = A$.

19. Доказать, что если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \in \overline{\mathbb{R}}$, все $a_n > 0$ и $g_n = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}$, то $\lim\limits_{n\to\infty} g_n = A$.

20. Исследовать на сходимость ряды (i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{n}}{n^3}$; (ii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$; (iii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$; (iv) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log_2 n}$.

21. Доказать, что верхний предел суммы последовательностей не превосходит суммы верхних пределов этих последовательностей, причем неравенство может быть строгим.

22. Существует ли последовательность, множество частичных пределов которой (i) счетно и ограничено; (ii) совпадает с отрезком $[0; 1]$; (iii) совпадает с интервалом $(0; 1)$; (iv) совпадает с множеством $[0; 1] \setminus \{\frac{1}{2}\}$?

23. Доказать, что для любого замкнутого множества числовой прямой существует последовательность, множество частичных пределов которой совпадает с этим множеством.