**Программа утверждена на заседании кафедры общих проблем управления**

**Протокол № 14/15-2а от 25 сентября 2014 г.**

**Рабочая программа дисциплины (модуля)**

1. Код и наименование дисциплины (модуля): УГЛУБЛЕННЫЙ КУРС ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ теории приближений

2. Уровень высшего образования – специалитет.

3. Направление подготовки: 01.01.01 Фундаментальные математика и механика. Специализация: Фундаментальная математика.

4. Место дисциплины (модуля) в структуре ООП: вариативная часть ООП. Является специальной дисциплиной (спецкурсом) для студентов 2-6 годов обучения, специализирующихся в данной научной области или смежной научной области, спецкурсом по выбору студента.

Освоение дисциплины необходимо для последующего изучения дисциплин образовательной программы: курсовая работа, научно-исследовательская практика, преддипломная практика, выпускная квалификационная работа.

5. Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями выпускников)

6. Объем дисциплины (модуля) в зачетных единицах с указанием количества академических или астрономических часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся:

*Объем дисциплины (модуля) составляет 5зачетных единицы, всего 180 часов, из которых 70 часов составляет контактная работа студента с преподавателем (62 часа занятия лекционного типа, 8 часов мероприятия текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации),110 часов составляет самостоятельная работа студента.*

7. Входные требования для освоения дисциплины (модуля), предварительные условия.

Для того чтобы изучение дисциплины было возможно, обучающийся должен

1. освоить следующие дисциплины образовательной программы: математический анализ, линейную алгебру, аналитическую геометрию (указываются дисциплины, необходимые для освоения данной и предшествующие ей)
2. обладать следующими компетенциями:

Знать: основные направления, проблемы, теории и методы современной математики.

Уметь: решать стандартные задачи математического анализа, действительного анализа, элементы функционального анализа, и применять идеи, использованные в их решениях, с целью применения для решения задач геометрической теории приближений.

Владеть: основными понятиями и теоремами из этих разделов математики.

8. Формат обучения.

Очная форма обучения, лекционные занятия.

9. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам\* (Перечень тем см. Приложения).

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины (модуля),**  **форма промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)** | **Всего**  **(часы**) | В том числе | | | | | | | | |
| **Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы**  из них | | | | | | **Самостоятельная работа обучающегося, часы**  из них | | |
| Занятия лекционного типа | Занятия семинарского типа | Групповые консультации | Индивидуальные консультации | Учебные занятия, направленные на проведение текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации | **Всего** | Выполнение домашних заданий | Подготовка рефератовит.п.. | **Всего** |
| Тема 1: Пространства Ефимова–Стечкина . | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 2: Пространство Кадеца. | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 3: Приближения выпуклыми множествами в пространствах Lp. | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 4: Существование непрерывных проекций на обобщенные рациональные функции в пространствах | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 5: Константа Юнга. Теоремы Стечкина и Бердышева | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 6: Приближение абстрактных функций. Свойства интерполяции и единственности | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 7: Приближение векторнозначных функций. | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 8: Единственности наилучшего приближения в среднем для векторнозначных функций. | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Текущий контроль успеваемости | 10 |  |  |  |  | 2 | 2 | 8 |  | 8 |
| Тема 9: Об условии Хаара для систем векторнозначных функций | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 10: Приближение векторнозначных функций многочленами. | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 11: Почти чебышёвские множества. | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 12: Почти чебышёвские системы непрерывных функций | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 13: Теоремы Радона, Хелли и Каратеодори. | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 14: Теорема об очистке. | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 15: Доказательство Конягина выпуклости чебышёвских множеств в Rn | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 16: Приближение выпуклыми множествами. Строгая единственность | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Текущий контроль успеваемости | 10 |  |  |  |  | 2 | 2 | 8 |  | 8 |
| Тема 17: Связность по Менгеру, монотонная линейная связность | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 18: Понятие сегмента и интервала в линейном нормированном пространства | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 19: Монотонная линейная связность | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 20: Непрерывные и полунепрерывные выборки из метрической проекции, их связь со свойствами солнечности и существования | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 21: Выпуклость чебышёвских множеств в Rn. Доказательство С. В. Конягина при помощи леммы об очистке. | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 22: Выпуклость чебышёвских множеств в Rn. Доказательство Л. П. Власова через delta-солнечность | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 23: Свойства множеств, содержащихся в подпространстве | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 24: Солнечность дробно-рациональных функций. | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Текущий контроль успеваемости | 10 |  |  |  |  | 2 | 2 | 8 |  | 8 |
| Тема 25: Солнечность чебышёвских множеств | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 26: Солнечность чебышёвских множеств с непрерывной метрической проекцией. | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 27: Солнечность монотонно линейно связных чебышёвских множеств. | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 28: Понятия ацикличности и клеточноподобности множеств | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 29: Солнечность ограниченно компактных P-ацикличных множеств. | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 30: Соотношения между классами солнц. | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 31: Свойства b-расширений множеств. | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 32: Приближение произведениями функций. | 2 |  |  |  |  |  | 0 | 2 |  | 2 |
| Промежуточная аттестация  *экзамен*  *зачет* | 24 |  |  |  |  | 2 | 2 | 22 |  | 22 |
| **Итого** | 180 | 62 |  |  |  | 8 | 70 | 110 |  | 110 |

10. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы студентов по дисциплине (модулю):

Конспекты лекций, списки задач к лекциям, основная и дополнительная учебная литература.

11. Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине (модулю).

* Перечень компетенций:
* Описание шкал оценивания*:*

*экзамен с оценкой по пятибалльной шкале*

* Критерии и процедуры оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю), характеризующих этапы формирования компетенций.
* Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения, характеризующих этапы формирования компетенций. См. приложения.

12. Ресурсное обеспечение:

Перечень основной учебной литературы: см. Приложение

Перечень дополнительной учебной литературы: см. Приложения

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»: см. Приложения.

Описание материально-технической базы: аудитории для проведения лекционных занятий.

13. Язык преподавания: русский (при необходимости – английский).

ПРИЛОЖЕНИЕ

**УГЛУБЛЕННЫЙ КУРС ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ПРИБЛИЖЕНИЙ**

1. **Преподаватель** - д.ф.-м.н. А.Р. Алимов, проф. И.Г. Царьков
2. **Аннотация курса:** специальный курс для студентов включает следующие разделы теории приближений: «наилучшее приближение в линейных нормированных пространствах», «солнечность», «аппроксимативная компактность», «характеризация наилучшего приближения», «отделимость», «чебышёвское подпространство», «Теорема Гаркави», «Теорема Асплунда», «Теоремы о выпуклости чебышёвских множеств», «Теорема о выпуклости солнц в гладких пространствах», «Монотонная линейная связность», «Солнечность чебышёвских множеств» и др.
3. **Тематическое содержание курса**

|  |  |
| --- | --- |
| Тема 1 | Пространства Ефимова–Стечкина. |
| Тема 2 | Пространство Кадеца |
| Тема 3 | Приближения выпуклыми множествами в пространствах Lp |
| Тема 4 | Существование непрерывных проекций на обобщенные рациональные функции в пространствах |
| Тема 5 | Константа Юнга. Теоремы Стечкина и Бердышева |
| Тема 6 | Приближение абстрактных функций. Свойства интерполяции и единственности |
| Тема 7 | Приближение векторнозначных функций |
| Тема 8 | Единственности наилучшего приближения в среднем для векторнозначных функций |
| Тема 9 | Об условии Хаара для систем векторнозначных функций |
| Тема 10 | Приближение векторнозначных функций многочленами |
| Тема 11 | Почти чебышёвские множества |
| Тема 12 | Почти чебышёвские системы непрерывных функций |
| Тема 13 | Теоремы Радона, Хелли и Каратеодори. |
| Тема 14 | Теорема об очистке |
| Тема 15 | Доказательство Конягина выпуклости чебышёвских множеств в Rn |
| Тема 16 | Приближение выпуклыми множествами. Строгая единственность |
| Тема 17 | Связность по Менгеру, монотонная линейная связность |
| Тема 18 | Понятие сегмента и интервала в линейном нормированном пространства |
| Тема 19 | Монотонная линейная связность |
| Тема 20 | Непрерывные и полунепрерывные выборки из метрической проекции, их связь со свойствами солнечности и существования |
| Тема 21 | Выпуклость чебышёвских множеств в Rn. Доказательство С. В. Конягина при помощи леммы об очистке. |
| Тема 22 | Выпуклость чебышёвских множеств в Rn. Доказательство Л. П. Власова через delta-солнечность |
| Тема 23 | Свойства множеств, содержащихся в подпространстве |
| Тема 24 | Солнечность дробно-рациональных функций. |
| Тема 25 | Солнечность чебышёвских множеств |
| Тема 26 | Солнечность чебышёвских множеств с непрерывной метрической проекцией. |
| Тема 27 | Солнечность монотонно линейно связных чебышёвских множеств. |
| Тема 28 | Понятия ацикличности и клеточноподобности множеств |
| Тема 29 | Солнечность ограниченно компактных P-ацикличных множеств. |
| Тема 30 | Соотношения между классами солнц. |
| Тема 31 | Свойства b-расширений множеств. |
| Тема 32 | Приближение произведениями функций. |

1. **Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения, характеризующих этапы формирования компетенций.**

Вопросы экзамена:

1 Пространства Ефимова–Стечкина.

2 Пространство Кадеца

3 Приближения выпуклыми множествами в пространствах Lp

4 Существование непрерывных проекций на обобщенные рациональные функции в пространствах

5 Константа Юнга. Теоремы Стечкина и Бердышева

6 Приближение абстрактных функций. Свойства интерполяции и единственности

7 Приближение векторнозначных функций

8 Единственности наилучшего приближения в среднем для векторнозначных функций

9 Об условии Хаара для систем векторнозначных функций

10 Приближение векторнозначных функций многочленами

11 Почти чебышёвские множества

12 Почти чебышёвские системы непрерывных функций

13 Теоремы Радона, Хелли и Каратеодори.

14 Теорема об очистке

15 Доказательство Конягина выпуклости чебышёвских множеств в Rn

16 Приближение выпуклыми множествами. Строгая единственность

17 Связность по Менгеру, монотонная линейная связность

18 Понятие сегмента и интервала в линейном нормированном пространства

19 Монотонная линейная связность

20 Непрерывные и полунепрерывные выборки из метрической проекции, их связь со свойствами солнечности и существования

21 Выпуклость чебышёвских множеств в Rn. Доказательство С. В. Конягина при помощи леммы об очистке.

22 Выпуклость чебышёвских множеств в Rn. Доказательство Л. П. Власова через delta-солнечность

23 Свойства множеств, содержащихся в подпространстве

24 Солнечность дробно-рациональных функций.

25 Солнечность чебышёвских множеств

26 Солнечность чебышёвских множеств с непрерывной метрической проекцией.

27 Солнечность монотонно линейно связных чебышёвских множеств.

28 Понятия ацикличности и клеточноподобности множеств

29 Солнечность ограниченно компактных P-ацикличных множеств.

30 Соотношения между классами солнц.

31 Свойства b-расширений множеств.

32 Приближение произведениями функций.

**Список задач.**

1. Пусть *M* - замкнутое множество. Доказать, что множество ближайших точек PM*x* замнуто для любого *x*.
2. Доказать, что замыкание нигде не плотного множества нигде не плотно.
3. Пусть *X* - метрическое пространство и *M* лежит в *X*. Показать, что множество всех точек из *X*, лежащих на расстоянии <*r* от множества *М* для любой точки *x* открыто.
4. Построить пример солнца, не являющегося строгим солнцем.
5. Найти крайние (экстремальные) точки единичного шара пространства C[0,1].
6. Верно ли, что пространство C[0,1] строго выпукло?
7. Построить пример множества неединственности.
8. Построить пример замкнутого множества неединственности.
9. Для функции *x*2 в пространстве C[-1,1] построить элемент наилучшего приближения из множества а) линейных функций; б) постоянных функций; в) аффинных функций.
10. Показать, что оператор наилучшего приближений на подпространство аффинных функций не является линейным.
11. Показать, что оператор наилучшего приближений на подространство постоянных функций не является равномерно непрерывным.
12. Построить гиперплоскость несуществования в пространстве C[0,1].
13. Всегда ли пересечение (объединение) двух множеств существования является множеством существования?
14. Предположим, что для каждой точки из дополнения множетсва из конечномерного пространства существует ближайшая точка. Верно ли, что множество существования замкнуто?
15. Множество состоит из гиперплоскости и точки, не лежащей на ней. Указать множество точек неединственности.
16. Построить пример несвязного α-солнца в некотором двумерном пространстве.
17. Построить пример в некотором двумерном пространстве LG-множества, не являющегося солнцем.
18. Построить пример невыпуклого чебышёвского множества в негладком строго выпуклом пространстве.
19. Показать, что конечное множество не является солнцем.
20. Верно ли, что пересечение (объединение) двух солнц является солнцем.
21. Всякое ли чебышёвское множество в Rn имеет липшицеву метрическую проекцию?
22. Показать, что множество ближайших точек для солнца в двумерном пространстве является точкой, отрезком или объединением двух отрезков с общей вершиной.
23. Верно ли, что солнце в двумерном пространстве связно? Верно ли, что произвольное солнце в 3-мерном пространстве монотонно линейно связно?
24. Показать, что любая точка из единичной сферы пространства L1[0,1] содержится в отрезке сферы длины 2.
25. Построить в пространстве c0 пример невыпуклого чебышёвского множества.
26. В строго выпуклом бесконечномерном пространстве построить пример аппроксимативно компактного, но не компактного множества.
27. Верно ли, что если множество M выпукло, то множество PM*x* выпукло для любого *x*?
28. Верно ли, что в конечномерном случае два непересекающихся выпуклых множества можно отделить гиперплоскостью? Верно ли это в бесконечномерном случае?
29. Является ли единичный шар в пространстве C[0,1] слабо компактным?
30. Может ли в гильбертовом пространстве дискретное множество быть чебышёвским?
31. Построить пример невыпуклого солнца в C[0,1].
32. Существует ли двумерное нормированное пространство, в котором график функции sin *x*2 является чебышёвским множеством?
33. Верно ли, что арифметическая сумма двух аппроксимативно компактных множеств в гильбертовом пространстве (на евклидовой плоскости) аппроксимативно компактна?
34. Верно ли, что арифметическая сумма двух чебышёвских множеств на евклидовой плоскости является чебышёвским множеством?
35. **Перечень основной и дополнительной учебной литературы, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»:**

А.Р. Алимов, И.Г. Царьков, Связность и солнечность в задачах наилучшего и почти наилучшего приближения // УМН (2016), вып. 1 (427), стр. 3--84

Алимов А.Р., Царьков И.Г., Основы геометрической теории приближений. Часть II. Выпуклость и связность чебышёвских множеств и солнц "ОнтоПринт" (Москва) Москва, 2017, ISBN 978-5-906886-32-3, 130 с.

Алимов А.Р., Царьков И.Г., Основы геометрической теории приближений. Часть I. Приближение выпуклыми множествами

место издания " Мархотин П. Ю. " Москва, 2016, ISBN 978-5-00038-281-3, 120 с

В.С. Балаганский, Л.П.Власов, Проблема выпуклости чебышёвских множеств// УМН (1996), т. 51 вып. 6(312), стр. 125--188.

В.И. Бердышев, Л.В. Петрак, Аппроксимация функций, сжатие численной информации, приложения. Екатеринбург, УрО РАН, 1999.

D.Braess, Nonlinear approximation theory, Springer, Berlin, 1986.

В.М. Тихомиров, Г.Г. Магарил-Ильяев, Выпуклый анализ и его приложения, Книжный дом ``Либроком''. Москва, 2011.

Л.П. Власов, Аппроксимативные свойства множеств в линейных нормированных пространствах // УМН т. 28 вып. 6 (1973), 3--66.

В.М. Тихомиров, Теория приближений. В кн. Анализ-2. Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. матем. Фундам. направления, 1987.

Том. 14, стр. 103--260. ВИНИТИ.

Алимов А.Р., Царьков И.Г., Геометрическая теория приближений. Часть I. Классические понятия и конструкции приближения множествами, ОнтоПринт, Москва 2017 г.

R.E. Megginson, An introduction to Banach space, Springer, New York, 1998.

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»:

www.mathnet.ru \mathnet{http://mi.mathnet.ru/mp30}

**Программа утверждена на заседании кафедры общих проблем управления**

**Протокол № 14/15-2а от 25 сентября 2014 г.**