МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
СПИСОК ЗАДАЧ Л2-2

Решения принимаются до 15 сентября 2016 года

1. Существует ли интегрируемая по Риману на отрезке $[0,1]$ функция f, для которой интеграл с переменным верхним пределом $\int\limits_0^x f(t)\,dt$ дифференцируем всюду на $[0,1]$, но его производная отлична от f (а) на бесконечном множестве; (б) на континуальном множестве?

2. Функции f и g интегрируемы по Риману на отрезке $[0,1]$ и не принимают значений, не принадлежащих отрезку $[0,1]$. Обязательно ли композиция $g(f(x))$ интегрируема по Риману на отрезке $[0,1]$.

3. Функция f интегрируема по Хенстоку на отрезке $[0,1]$, а функция g непрерывна на $\mathbb{R}$. Верно ли, что композиция $g(f(x))$ интегрируема по Хенстоку на отрезке $[a,b]$.

4. Функция f интегрируема по Хенстоку на отрезке $[a,b]$. Верно ли, что и ее модуль обязательно интегрируем по Хенстоку на этом отрезке?

5. Для функций $\ln x$ и $\frac{1}{\sqrt{x}}$ (доопределенных в нуле нулем), интегрируемых по Хенстокуна отрезке $[0,1]$, явно по ε постройте масштабную функцию $\delta(x)$ из определения интеграла Хенстока.

6. Докажите, что если функция f интегрируема по Риману на отрезке $[0,\pi]$, то
$$\int\limits_0^\pi xf(\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int\limits_0^\pi f(\sin x)\,dx.$$

7. Функция $f(x)$ неотрицательна и непрерывна на отрезке $[a,b]$. Докажите, что
$$\lim_{n\to\infty}\left(\int\limits_a^b f^n(x)\,dx\right)^{1/n} = \max_{x\in[a,b]} f(x).$$

8. Докажите, что если функция g интегрируема по Риману на отрезке $[0,2\pi]$, то интегралы $\int\limits_0^{2\pi} g(x)\sin(nx)\,dx$ (а) стремятся к нулю при $n\to\infty$; (б) в случае $g\in C^k[a,b]$ и $f(0)=f(2\pi)$ равны $o(n^{-k})$ при $n\to\infty$.

9. Пусть $f,g\in C^\infty(\mathbb{R})$, причем $g\equiv 0$ вне некоторого отрезка и $f'\neq 0$ на этом отрезке. Верно ли, что для каждого натурального k при $n\to\infty$ справедлива оценка
$$\int\limits_{\mathbb{R}} g(x)\sin(nf(x))dx = o\left(\frac{1}{n^k}\right)?$$

10. Докажите, что если $f(x)$ непрерывна на промежутке $[0,+\infty)$ и существует $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A \in \overline{\mathbb{R}}$, то $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\frac{1}{\lambda}\int\limits_0^\lambda f(x)\,dx$ существует и равен A.

11. Определенная на отрезке $[a,b]$ функция f такова, что для каждой определенной на этом отрезке функции g существует интеграл Римана-Стилтьеса $\int\limits_a^b f\,dg$. Обязательно ли функция f — тождественная константа?

12. Верно ли, что для каждой интегрируемой по Хенстоку на отрезке $[a,b]$ функции f ее интеграл с переменным верхним пределом $\int\limits_a^x f(t)\,dt$ дифференцируем почти всюду на этом отрезке?

13. Существует ли функция, у которой на каком-либо отрезке модуль интегрируем по Хенстоку, но при этом сама функция не интегрируема по Хенстоку на этом отрезке?

14. Перейдет ли определение интеграла Римана в эквивалентное, если в нем дополнительно потребовать, чтобы отмеченные точки (а) обязательно были одним из концов соответствующих отрезков разбиения; (б) обязательно не совпадали ни с одним из концов соответствующих отрезков разбиения; (в) обязательно были серединами соответствующих отрезков разбиения?