МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
СПИСОК ЗАДАЧ Л2-2
Решения принимаются до 30 ноября 2016 года
О месте и времени разбора задач будет объявлено 30 ноября 2016 года

1. Существует ли сходящийся ряд, квадрат которого расходится?

2. Для каждого положительного γ выясните, можно ли гарантировать сходимость или расходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{r_{n-1}^{\gamma}}$, зная лишь, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ — сходящийся ряд с положительными членами, а r_n — его остатки.

3. Докажите, что если $f \in C^1[1,+\infty)$ и $\int\limits_1^{\infty} f'(x)\,dx$ абсолютно сходится, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ и $\int\limits_1^{\infty} f(x)\,dx$ одновременно сходятся или одновременно расходятся.

4. Исследуйте на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\sqrt{n}}{n}$.

5. Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ — сходящийся к единице ряд с положительными членами. Для каждого подмножества натуральных чисел Λ положим $s(\Lambda) = \sum\limits_{n\in\Lambda} a_n$ ($s(\emptyset) = 0$). Положим также $S = \{s(\Lambda) : \ \Lambda \subset \mathbb{N}\}$. (i) Покажите, что равенство $S = [0,1]$ может как выполняться, так и не выполняться. (ii) Найдите условие на последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, необходимое и достаточное для выполнение этого равнества.

6. Докажите, что если знакоположительный ряд суммируем методом Абеля, то он сходится.

7. Докажите, что если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ суммируем методом Абеля, то для каждого положительного γ справедливо равенство $\frac{a_n}{(1+\gamma)^n} \to 0$ $(n \to \infty)$.

8. Верно ли, что если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ суммируем методом средних арифметических и $a_n = O(1/n)$, то этот ряд сходится?

9. Найдите сумму ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \operatorname{arcctg} a_{2n}$, где $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ — последовательность Фибоначчи ($a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$).

10. Вычислите $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sigma_n^2$, где σ_n — среднее арифметическое первых n слагаемых гармонического ряда.

11. Существует ли двойной ряд $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} a_{m,n}$,
(i) суммируемый по квадратам, но не суммируемый по прямоугольникам (суммируемость по прямоугольникам: $S_{M,N} = \sum\limits_{m=1}^{M}\sum\limits_{n=1}^{N} a_{m,n}$ сходится при $M, N \to \infty$; по квадратам — $S_{M,N}$ сходятся при $M = N \to \infty$);
(ii) суммируеммый по квадратам, но не суммируемый ρ-регулярно для $\rho = 1/2$ (ρ-регулярная суммируемость: $S_{M,N}$ сходятся при $M, N \to \infty$ при соблюдении ограничения $\rho \leqslant \frac{M}{N} \leqslant \frac{1}{\rho}$);
(iii) суммируемый ρ-регулярно для $\rho = 1/2$, но несуммируемый по прямоугольникам;
(iv) суммируемый ρ-регулярно для $\rho = 1/2$, но не суммируемый ρ-регулярно для $\rho = 1/4$?

12. Найдите все действительные значения x, для которых справедливо равенство $\prod\limits_{n=0}^{\infty} \left(1 + x^{2^n}\right)$.

13. Докажите, что функция ван-дер-Вардена $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\rho(4^n x)}{4^n}$, где $\rho(x)$ — расстояние от точки x до ближайшей целой точки, непрерывна на $\mathbb{R}$, но не дифференцируема ни в одной точке $\mathbb{R}$.

14. Верно ли, что частичные суммы ряда (i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$; (ii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$ равномерно ограничены на интервале $(0, \pi)$?

15. Верно ли, что сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ интегрируема по Риману на отрезке $[0, \pi]$? Если верно, найдите значение интеграла.

16. Исследуйте на равномерную сходимость на интервале $(0; \pi)$ ряд (i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x \sin nx}{n}$; (ii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{x}\sin nx}{n}$.

17. Найдите точную нижнюю грань всех значений параметра α, при которых ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{\alpha}\sin nx}{n}$ сходится равномерно на интервале $(0; \pi)$.