МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
СПИСОК ЗАДАЧ Л1-4

Решения принимаются до 19 февраля 2016 года
Дата, время и место разбора задач будут объявлены 12 февраля 2016 года

1. Существует ли функция, дифференцируемая в точке $\sqrt{\pi}$ и разрывная во всех других точках числовой прямой?

2. Найдите все дифференцируемые на $\mathbb{R}$ функции $f(x)$, для которых $\left(\frac{1}{f}\right)'$ всюду совпадает с $\frac{1}{f'}$.

3. Существует ли бесконечно дифференцируемая на $\mathbb{R}$ функция, множество нулей которой совпадает (i) с интервалом $(0,1)$; (ii) с отрезком $[0,1]$; (iii) с объединением отрезков $[0,1]$ и $[2015, 2016]$; (iv) множеством Кантора?

4. Пусть f и g — произвольные бесконечно дифференцируемые на $\mathbb{R}$ функции. Докажите, что существует бесконечно дифференцируеманя на $\mathbb{R}$ функция, совпадающая с f на отрезке $[-1,1]$ и с g вне отрезка $[-2,2]$.

5. Пусть f — дифференцируемая на отрезке [0,1] функция, $f(0) = 0, f(1) = 1$. Докажите, что в интервале $(0,1)$ существуют такие две точки a, b $(a \neq b)$, что $f'(a)f'(b) = 1$.

6. Сравните e^{π} и π^{e}.

7. Верно ли, что если функция $f(x)$ строго выпукла и дифференцируема на невырожденном промежутке, то для каждой пары точек a, b этого промежутка $(a < b)$ существует ЕДИНСТВЕННАЯ точка $c \in (a,b)$ такая, что $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$?

8. (О непрерывной зависимости промежуточной точки от концов отрезка в теореме Лагранжа) Пусть функция f непрерывна на полуотрезке $[0,1)$ и дифференцируема на интервале $(0,1)$. Верно ли, что существует такая НЕПРЕРЫВНАЯ функция $c(x)$, сопоставляющая каждой точке $x \in (0,1)$ такую точку из интервала $(0,x)$, что $\frac{f(x)-f(0)}{x} = f'(c(x))$? Верно ли это утверждение при дополнительном требовании выпуклости функции f?

9. Для каждого $w \in (0,1)$ опишите множество таких дифференцируемых на всей числовой прямой функций, что для каждой пары точек $x_0, x \in \mathbb{R}$ справедливо равенство
$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(wx + (1-w)x_0)}{1!}(x - x_0).$$

10. Для каждого $w \in (0,1)$ опишите множество таких дважды дифференцируемых на всей числовой прямой функций, что для каждой пары точек $x_0, x \in \mathbb{R}$ справедливо равенство
$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(wx + (1-w)x_0)}{1!}(x - x_0)^2.$$

11. Пусть f — выпуклая на интервале (a,b) функция. Обязательно ли в каждой точке x этого интервала у функции f существуют левая и правая производные?

12. Пусть f — выпуклая на интервале (a,b) функция, D — множество точек этого интервала, в которых f дифференцируема. Верно ли, что D (i) непусто; (ii) континуально?

13. Может ли производная всюду дифференцируемой функции быть разрывной (i) хотя бы в одной точке; (ii) в бесконечном множестве точек; (iii) в каждой точке числовой прямой?

14. Опишите множество всех бесконечно дифференцируемых на $\mathbb{R}$ функций, удовлетворяющих следующему условию: для каждого $x \in \mathbb{R}$ существует такой натуральное число N_x, что для всех $n \geqslant N_x$ n-я производная функции в точке x равна нулю.