

# МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

## СПИСОК ЗАДАЧ Л1-3

Решения принимаются до 09 декабря 2015 года

Дата, время и место разбора задач будут объявлены 09 декабря 2015 года

1. Пусть  $f$  — непрерывная на невырожденном промежутке  $I$  функция. Какой может быть мощность образа  $f(I)$ ?
2. Верно ли, что множество всех непрерывных на всей числовой прямой функций континуально?
3. Верно ли, что множество всех функций, определенных на всей числовой прямой и принимающих только целые значения, континуально?
4. Существует ли непрерывное биективное отображение  $\mathbb{R}$  на компакт?
5. Существует ли компакт, который можно непрерывно и взаимно-однозначно отразить на  $\mathbb{R}$ ?
6. Пусть  $f$  — непрерывная на всей числовой прямой  $T$ -периодическая функция ( $T > 0$ ). Докажите, что  $f$  не является инъективной на полуотрезке  $[0, T)$ .
7. Пусть  $f$  — определенная на всей числовой прямой функция. Докажите, что  $f \in C(\mathbb{R})$  если и только если для каждого открытого множества  $G$  прообраз  $f^{-1}(G)$  открыт.
8. Пусть  $f$  — определенная на всей числовой прямой функция. Верны ли следующие утверждения: (i)  $f \in C(\mathbb{R})$  если и только если для каждого открытого множества  $G$  образ  $f(G)$  открыт; (ii)  $f \in C(\mathbb{R})$  если и только если для каждого замкнутого множества  $F$  образ  $f(F)$  замкнут; (iii)  $f \in C(\mathbb{R})$  если и только если для каждого замкнутого множества  $F$  прообраз  $f^{-1}(F)$  замкнут?
9. Пусть  $f \in C[0, 1]$ ,  $f([0, 1]) \subset [0, 1]$ . Докажите, что уравнение  $f(x) = x$  имеет по крайней мере 1 корень.
10. Пусть  $I$  — невырожденный промежуток числовой прямой,  $f_n(x)$  равномерно сходятся к  $f(x)$  на  $I$  при  $n \rightarrow \infty$ . Пусть также при всех натуральных  $n$  функции  $f_n(x)$  непрерывны в некоторой точке  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Докажите, что  $f(x)$  также непрерывна в точке  $x_0$ .
11. Существует ли строго возрастающая на всей числовой прямой функция, множество точек разрыва которой совпадает с множеством (i) иррациональных чисел; (ii) рациональных чисел?
12. Существует ли определенная на всей числовой прямой функция, множество точек разрыва которой совпадает с множеством (i) рациональных чисел; (ii) иррациональных чисел?
13. Существует ли определенная на всей числовой прямой функция, неограниченная ни на одном невырожденном промежутке?
14. Существует ли такая определенная на всей числовой прямой функция, для которой образ любого невырожденного промежутка — вся числовая прямая?
15. Существует ли непрерывная на отрезке  $[0, 1]$  отличная от константы функция, для которой прообраз каждого одноточечного множества либо пуст, либо континуален?
16. Существует ли непрерывная на всей числовой прямой функция  $f$ , удовлетворяющая функциональному уравнению  $f(x + y) = f(x) + f(y)$ , но не имеющая вид  $f(x) = \alpha x$  ( $\alpha \in \mathbb{R}$ )?
17. Существует ли определенная на всей числовой прямой функция  $f$ , удовлетворяющая функциональному уравнению  $f(x + y) = f(x) + f(y)$ , но не имеющая вид  $f(x) = \alpha x$  ( $\alpha \in \mathbb{R}$ )?
18. Существует ли последовательность непрерывных на всей числовой прямой функций  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ , сходящаяся при  $n \rightarrow \infty$  в каждой точке числовой прямой к значению функции Дирихле в этой точке?
19. Существует ли такой набор последовательностей непрерывных на всей числовой прямой функций  $A_k = \{f_n^k(x)\}_{n=1}^{\infty}$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ), что для каждого натурального  $k$  функциональная последовательность  $\{f_n^k(x)\}_{n=1}^{\infty}$  при  $n \rightarrow \infty$  сходится поточечно на всей числовой прямой к некоторой функции  $F_k(x)$ , а функциональная последовательность  $\{F_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$  при  $k \rightarrow \infty$  сходится поточечно на всей числовой прямой к функции Дирихле?