МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
СПИСОК ЗАДАЧ Л1-2

Решения принимаются до 01 ноября 2015 года

Дата, время и место разбора задач будут объявлены 30 октября 2015 года

1. Верно ли, что для произвольного множества множество его предельных точек замкнуто?

2. Докажите, что последовательность $\left\{\sin(n^2)\right\}_{n=1}^{\infty}$ расходится.

3. Найдите предел последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, если
(i) $a_n = \cos 1 \cdot \cos 2 \cdot \cos 3 \cdot \ldots \cdot \cos n$;
(ii) $a_n = \cos 1 \cdot \cos 4 \cdot \cos 9 \cdot \ldots \cdot \cos(n^2)$;
(iii) $a_n = \cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{4} \cdot \cos \frac{x}{8} \cdot \ldots \cdot \cos \frac{x}{2^n} \quad (x \in \mathbb{R})$;
(iv) $a_n = \sqrt[n]{n!}$.

4. Найдите множество частичных пределов последовательности
(i) $\{\sin \sqrt{n}\}_{n=1}^{\infty}$;
(ii) $\{\sin n\}_{n=1}^{\infty}$
(без доказательства можно использовать иррациональность числа π).

5. Докажите: что для любого непустого замкнутого множества F существует последовательность, множество частичных пределов которой совпадает с F.

6. По последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ строится последовательность $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$:
$$b_n = \frac{a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \ldots + na_n}{n^2/2}.$$
Верно ли, что если последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится, то и последовательность $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится? Верно ли, что если последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ расходится, то и последовательность $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ расходится?

7. По последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ строится последовательность $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$:
$$c_n = \frac{a_1 + 2a_2 + 4a_3 + \ldots + 2^{n-1}a_n}{2^n}.$$
Верно ли, что если последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится, то и последовательность $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится? Верно ли, что если последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ расходится, то и последовательность $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ расходится?

8. Приведите пример ряда $(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots)$, для которого расстановкой скобок (то есть переходом к ряду $(a_1 + a_2 + \ldots + a_{k_1}) + (a_{k_1+1} + a_{k_1+2} + \ldots + a_{k_2}) + \ldots)$) в качестве суммы можно получить любое наперед заданной число.

9. Докажите, что сумма $S_k(n) = 1^k + ... + n^k$ является многочленом от n степени $k+1$. Найдите $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{S_k(n)}{n^{k+1}}$.

10. Докажите, что для каждого натурального n число e представимо в виде
$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{\theta_n}{n \cdot n!},$$
где θ_n — некоторое число из интервала $(0;1)$. Используя этот факт, докажите иррациональность числа e.

11. Докажите, что $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} \sim 2\sqrt{n}$ $(n \to \infty)$.

12. Существует ли такая совокупность $\mathcal{A}$ подмножеств множества натуральных чисел, что для любых $A, B \in \mathcal{A}$ выполняется включение $A \subset B$ или включение $B \subset A$ и при этом $\mathcal{A}$ континуальна?