

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
СПИСОК ЗАДАЧ Л1-1

Решения принимаются до 01 октября 2015 года

- (i) Сколько различных отношений порядка можно задать на множестве из семи элементов?
(ii) Сколько различных отношений эквивалентности можно задать на множестве из четырех элементов и из пяти элементов?

- Пусть f — произвольное отображение. Верны ли равенства

$$f(A \circ B) = f(A) \circ f(B)$$

и

$$f^{-1}(A \circ B) = f^{-1}(A) \circ f^{-1}(B),$$

если через \circ обозначено (i) объединение множеств; (ii) пересечение множеств; (iii) разность множеств?

- Используя аксиому Архимеда, докажите, что в каждом непустом интервале числовой прямой есть по крайней мере одно рациональное и по крайней мере одно иррациональное число.
- Докажите, что в любом несчетном множестве треугольников на плоскости найдется по крайней мере одна пара несовпадающих треугольников, внутренности которых пересекаются. Может ли множество всех таких пар быть (i) конечным; (ii) счетным?
- Можно ли на плоскости расположить более чем счетное число попарно непересекающихся восьмерок? Букв А? Букв Т?
- Докажите, что на числовой прямой непустое множество открыто если и только если оно представимо (i) в виде объединения интервалов; (ii) в виде не более чем счетного объединения попарно не пересекающихся интервалов.
- Докажите, что на числовой прямой существует ровно два множества, которые одновременно открыты и замкнуты.
- Докажите, что не существует такого счетного набора $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ открытых подмножеств числовой прямой, что

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = \mathbb{Q}.$$

- Докажите, что если

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = [0, 1]$$

и все F_n — замкнутые подмножества числовой прямой, то только одно из них непусто.

- Существует ли биекция $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ вида $f(x, y) = \varphi(x) + \psi(y)$?