Вопросы коллоквиума по математическому анализу
1 курс 1 поток 1 семестр 2019/20 уч. г. Лектор — проф. Т.П. Лукашенко

1. Множества и операции над ними. Свойства отношения включения.
2. Свойства операций объединения и пересечения.
3. Законы Моргана.
4. Аксиомы Пеано натуральных чисел.
5. Упорядочивание натуральных чисел.
6. Аксиома индукции и существование наименьшего элемента в подмножествах натуральных чисел.
7. Аксиоматика действительных чисел. Бесконечные десятичные дроби как модель действительных чисел.
8. Аксиома полноты и принципы полноты Дедекинда и Вейерштрасса.
9. Аксиома Архимеда и принцип полноты Кантора, их вывод из принципа полноты Вейерштрасса.
10. Неравенство Бернулли. Вывод аксиомы полноты из аксиомы Архимеда и принципа полноты Кантора.
11. Эквивалентные множества. Счётные множества и их свойства.
12. Несчётные множества. Теоремы Кантора о множестве двузначных функций и множестве подмножеств множества.
13. Сравнение мощностей. Теорема Кантора-Бернштейна.
14. Бином Ньютона.
15. Открытые и замкнутые множества, их объединения и пересечения.
16. Эквивалентные условия замкнутости множества.
17. Теорема Гейне-Бореля о конечном подпокрытии отрезка. Теорема Лебега.
18. Теорема Больцано-Вейерштрасса о существовании предельной точки.
19. Расширенная числовая прямая. Теоремы о конечном подпокрытии и существовании предельной точки.
20. Предел последовательности и его свойства: предел подпоследовательности; единственность предела; ограниченность сходящейся последовательности; отделимость.
21. Свойства предела: независимость от сдвига на конечное число номеров и от конечного числа членов последовательности.
22. Бесконечно малые последовательности и их свойства.
23. Предел суммы, разности, произведения, частного.
24. Переход к пределу в неравенствах; теорема о зажатой последовательности.
25. Предел монотонной ограниченной последовательности.
26. Число "**e**".
27. Критерий Коши сходимости последовательности.
28. Сходимость к $\pm\infty$, бесконечно большие последовательности.
29. Частичные пределы последовательности, структура множества частичных пределов.
30. Верхний и нижний пределы последовательности. Критерий сходимости последовательности.
31. Бесконечные ряды. Критерий Коши сходимости. Необходимое условие сходимости.

Список задач к коллоквиуму.

1. Доказать, что для любого натурального n верно, что $\mathbb{R}^n \sim \mathbb{R}$.
2. Доказать, что множество всех числовых последовательностей эквивалентно $\mathbb{R}$.
3. Множество Кантора на $[0,1]$, его эквивалентность $\mathbb{R}$.
4. Доказать, что если последовательность a_n сходится к числу a, то последовательность её средних арифметических $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$ также сходится к a.
5. Доказать, что если последовательность a_n сходится к $+\infty$, то последовательность её средних арифметических $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$ также сходится к $+\infty$.
6. Доказать, что если строго положительная последовательность a_n сходится к числу a, то последовательность её средних геометрических $\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n}$ также сходится к числу a.
7. Доказать, что если строго положительная последовательность a_n сходится к $+\infty$, то последовательность её средних геометрических $\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n}$ также сходится к $+\infty$.
8. Примеры расходящихся ограниченных и неограниченных последовательностей, для которых последовательность средних арифметических сходится. Доказать, что если последовательность средних арифметических последовательности a_n сходится, то $a_n = o(n)$.
9. Пример последовательности для которой каждое действительное число является частичным пределом.
10. Пример последовательности для которой множество её частичных пределов — множество Кантора.

Т.П. Лукашенко