Программа экзамена по математическому анализу.
1 семестр $2018 – 19$ учебного года
Лектор – профессор В. Е. Подольский.

1. Множества, основные операции на множествах. Отображения, их классификация. Обратное отображение. Аксиоматика Пеано натурального ряда. Конечные множества. Сумма и произведение натуральных чисел.
2. Отношение порядка. Порядок на $\mathbf{N}$. Целые числа. Рациональные числа, их свойства. Аксиома Архимеда. Действительные числа. Модели множества действительных чисел, полнота модели бесконечных десятичных дробей.
3. Ограниченные множества в $\mathbf{R}$. Существование точных граней у ограниченных множеств. Теорема о последовательности вложенных отрезков.
4. Отношение эквивалентности. Равномощные множества, равномощность как отношение эквивалентности. Сравнение мощностей как отношение порядка (без док-ва). Счётные множества, теорема о мощности счётного объединения счётных множеств. Примеры.
5. Несчётность интервала $(0, 1)$. Свойства бесконечных множеств. Примеры.
6. Последовательности действительных чисел, подпоследовательности. Ограниченные и неограниченные последовательности. Сходящиеся последовательности, их основные свойства. Существование сходящейся подпоследовательности у ограниченной последовательности.
7. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности, их свойства. О-символика. Теорема о сумме, произведении и отношении сходящихся последовательностей. Критерий Коши сходимости последовательности. Примеры.
8. Теоремы о предельном переходе в неравенствах. Монотонные последовательности. Сходимость монотонной и ограниченной последовательности.
9. Бином Ньютона. Неравенство Бернулли. Число "e". Числовые ряды, критерий Коши и признак сравнения.
10. Частичные пределы последовательности, замкнутость множества частичных пределов последовательности. Верхний и нижний пре-

делы ограниченной последовательности, их свойства.

11. Внутренность, внешность подмножеств **R.** Граница множеств. Открытые и замкнутые множества. Теорема о конечных и бесконечных пересечениях и объединениях открытых и замкнутых множеств.
12. Предельные точки, точки прикосновения, изолированные. Критерии замкнутости множества. Существование максимального (минимального) элемента у замкнутых ограниченных сверху (снизу) подмножеств **R.**
13. Компактные множества. Лемма Гейне-Бореля. Критерий компактности. Существование предельной точки у бесконечного ограниченного множества.
14. Два определения предела функции и их эквивалентность. Свойства предела функции. Бесконечно малые и бесконечно большие функции. O-символика. Предел суммы, произведения, частного двух функций. Односторонние пределы, их связь с пределом функции.
15. Предельный переход в неравенствах. Критерий Коши существования предела функции. Предел монотонных и ограниченных функций.
16. Непрерывные функции, их локальные свойства. Классификация точек разрыва. Теоремы Вейерштрасса о непрерывных на отрезке функциях. Теорема о промежуточных значениях непрерывной на отрезке функции.
17. Разрывы монотонной функции, критерий непрерывности монотонной на отрезке функции, непрерывность обратной функции обратной функции. Равномерно непрерывные функции. Теорема Кантора.
18. Непрерывность показательной функций. Определение и свойства основных элементарных функций. Замечательные пределы.
19. Производная функции. Непрерывность функции, имеющей производную. Производная суммы, произведения, частного двух функций. Производная композиции двух функций. Производная обратной функции. Таблица производных.
20. Дифференцируемые функции, их связь с функциями, имеющими производную. Первый дифференциал, его основные свойства. Инвариантность первого дифференциала и неинвариантность производной относительно замен переменной.

21. Полукасательные к графику функции, касательная. Геометрический смысл производной функции и её первого дифференциала. Старшие производные. Определение второго дифференциала, его неинвариантность. Дифференциалы старших порядков.
22. Теорема Ферма, теорема Ролля, формула конечных приращений Лагранжа и следствие из неё, формула Коши.
23. Связь направления монотонности функции и знака её производной. Разрывы производной дифференцируемой функции. Теорема Дарбу о промежуточных значениях производной.
24. Правила Лопиталя.
25. Формула Тейлора с остаточными членами в форме Пеано, общей форме, форме Лагранжа и форме Коши. Разложения основных элементарных функций.
26. Необходимые и достаточные условия локального экстремума. Схема поиска глобального экстремума. Асимптоты графика функции.
27. Функции, выпуклые в точке, их свойства на промежутке выпуклости.
28. Достаточные условия выпуклости. Неравенство Йенсена, неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим.