МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА

Механико-математический факультет

ЛЕКЦИИ С. Б. СТЕЧКИНА
ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ
АНАЛИЗУ
Том II

Москва 2014 год

УДК 517.

Рецензент — Доктор физико-математических наук,
профессор В. М. Тихомиров

ЛЕКЦИИ С.Б. СТЕЧКИНА ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ. Том II. / Под редакцией Т.В. Радославовой, Н.Н. Холщевниковой.– М.: Издательство попечительского совета механико-математического факультета МГУ, 2014 – 304 с.

Книга представляет собой второй том лекций по математическому анализу, прочитанных профессором С.Б. Стечкиным на механико-математическом факультете МГУ в 1968 – 1969 г.г. для студентов второго курса. Книга предназначена для преподавателей и студентов, изучающих математический анализ.

Напечатано по инициативе кафедры математического анализа механико-математического факультета МГУ при поддержке механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова.

Предисловие к тому II

Книга представляет собой второй том лекций по математическому анализу, прочитанных профессором С. Б. Стечкиным на механико-математическом факультете МГУ в 1968 – 1969 г.г. для студентов второго курса.

Прочитали текст лекций и сделали ряд полезных замечаний И. Г. Царьков и В. С. Панферов. Существенную помощь в редактировании гл. 15 и § 84 оказал Ю. В. Малыхин. Помощь при редактировании главы 19 оказали В. С. Панферов, А. К. Рыбников, И. Х. Сабитов и П. В. Семенов. И. Х. Сабитов помог разобраться со ссылкой на теорему Франкля – Понтрягина и с рисунками, иллюстрирующими применение этой теоремы в пункте 88.3.

На 4-ой странице обложки помещены некоторые высказывания С. Б. Стечкина, часть которых напомнили А. Р. Алимов и С. А. Теляковский, а часть взята из работ [23] и [24].

При подготовке текста второго тома книги использовались студенческие конспекты А. Б. Кукаркина, Ю. В. Сидельникова, Б. С. Стечкина, Н. Н. Холщевниковой и др. В подготовке рисунков помогали К. Д. Кузнецова и Ю. В. Малыхин. Оказали техническое содействие при подготовке тома к печати Ю. В. Малыхин и А. С. Стечкина.

Мы благодарны за внимание к работе и. о. декана механико-математического факультета МГУ профессору В. Н. Чубарикову и профессору Т. П. Лукашенко.

Нумерация частей, глав, параграфов и страниц сквозная по всей книге, ссылки на разделы первого тома настоящих лекций даются без указания тома и без ссылки на список литературы. В сносках помещены замечания и комментарии редакторов. Нумерация сносок своя внутри глав. Нумерация рисунков сквозная внутри главы с указанием номера главы, например, рис. 18.17 – это семнадцатый рисунок в восемнадцатой главе.

Т. В. Радославова, Н. Н. Холщевникова

Оглавление

Часть V

РЯДЫ И НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Глава 13

Числовые ряды и несобственные интегралы

3 семестр
Лекция 1
(04.09.68)

Ряды и несобственные интегралы – основной аппарат для изображения и изучения достаточно широкого класса функций. Будем параллельно изучать и ряды и несобственные интегралы, чтобы яснее увидеть, в чем они схожи и в чем их различие.

Рекомендованная литература: [27] т. 2 гл. 15, 17.

§ 59. Сходимость числовых рядов и несобственных интегралов

59.1. Основные понятия

Пусть имеется числовая последовательность $\{a_n\}$, $a_n \in \mathbb{R}$ или $a_n \in \mathbb{C}$, где $\mathbb{R}$ – множество действительных чисел, а $\mathbb{C}$ – множество комплексных чисел. Понятие ряда есть распространение понятия суммы на бесконечное число слагаемых (членов последовательности): $a_1+a_2+...+a_n+...$. Надо придать этой сумме числовой смысл. Для этого построим последовательность *частичных сумм* ряда

$$s_n = a_1 + ... + a_n \quad (n = 1, 2, ...) .$$

Определение. Если последовательность частичных сумм ряда $\{s_n\}$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = A$, то говорят, что *числовой ряд* $a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$ *сходится* к числу A и A есть его сумма:

$$a_1 + a_2 + ... + a_n + ... = A .$$

Если последовательность $\{s_n\}$ расходится, то говорят, что *ряд расходится.*

Задачами при изучении рядов являются

1. *Изучение сходимости рядов.*

2. *Нахождение суммы в конечном виде.*

Например, $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... = \ln 2$ (будет доказано ниже в § 60 на с. 345). Когда мы не можем найти точное значение суммы, то по $\varepsilon > 0$ ищем $\tilde{A}$ такое, что $\left|A - \tilde{A}\right| < \varepsilon$.

3. *Исследование свойств рядов.*

Обобщая понятие суммы с конечного на бесконечное число слагаемых мы теряем какие-то свойства, присущие конечным суммам. Например, перемножая два сходящихся ряда

$$(a_1 + ... + a_n + ...)(b_1 + ... + b_n + ...) = a_1 b_1 + ...$$

получим ряд, который при некотором порядке попарных произведений не сходится, тем самым нарушается дистрибутивность.

Будем сокращенно записывать $a_1 + a_2 + ... + a_n + ... = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$; $s_n = a_1 + ... + a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$. Элементы a_n – *члены ряда*, $r_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k$ – *остатки ряда* – новые ряды, для них все те же задачи остаются. Сумма $\sum\limits_{k=n}^{N} a_k$ – *кусок ряда*. (Заметим, что при $\mu > \nu$ кусок ряда $\sum\limits_{k=\mu}^{\nu} a_k$ – пустая сумма, которую полагают равной 0.)

Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $[0, \infty)$ и для любого $\mathcal{X} > 0$ $f(x) \in R[0, \mathcal{X}]$, т.е. $\int\limits_0^{\mathcal{X}} f(x)\, dx$ существует для всякого $\mathcal{X} > 0$. Распространение интеграла Римана на бесконечный промежуток называется *несобственным интегралом* и обозначается $\int\limits_0^\infty f(x)\,dx$.

Определение. Пусть $F(\mathcal{X}) = \int\limits_0^{\mathcal{X}} f(x)\,dx$ и существует конечный предел $\lim\limits_{\mathcal{X}\to\infty} F(\mathcal{X}) = A$. Тогда несобственный интеграл $\int\limits_0^\infty f(x)\,dx$ *сходится* и имеет значение A . В противном случае несобственный интеграл *расходится.*

Заметим, что в определении несобственного интеграла имеется два предельных перехода (один в определении интеграла Римана и другой при переходе к бесконечному промежутку).

Аналогично остатку ряда определяется $r(\mathcal{X}) = \int\limits_{\mathcal{X}}^\infty f(x)\,dx$ – *остаток несобственного интеграла* с бесконечным пределом.

59.2. Критерий Коши

Критерий Коши сходимости ряда. *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^\infty a_n$ *является сходящимся тогда и только тогда, когда* $\forall\,\varepsilon > 0 \;\; \exists\, N \;\; \forall\, n \geq m \geq N$ $\left|\sum\limits_{k=m}^n a_k\right| < \varepsilon$.

Д о к а з а т е л ь с т в о следует непосредственно из критерия сходимости Коши для последовательности: $\{s_n\}$ сходится тогда и только тогда, когда $\forall\,\varepsilon > 0 \;\; \exists\, N \;\; \forall\, n > m \geq N \;\; |s_n - s_m| < \varepsilon$. Но $s_n - s_m = \sum\limits_{k=m+1}^n a_k$. ▶

Таким образом, сходится ряд такой, что все куски ряда "маленькие если нижний предел достаточно велик.

Этим критерием пользуются для доказательства расходимости рядов.

При $n = m$ из критерия Коши следует

Следствие (необходимый признак сходимости ряда). *Если числовой ряд* $\sum\limits_{n=1}^\infty a_n$ *сходится, то* $a_n \to 0$ $(\,n \to \infty\,)$.

При исследовании ряда на сходимость "прежде всего надо проверять, выполняется ли необходимый признак сходимости, а не стрелять из пушек по воробьям" (С.Б.С.).

Условие $a_n \to 0 \ (n \to \infty)$ является необходимым, но не достаточным для сходимости числового ряда.

Пример. Докажем, что гармонический ряд $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$ расходится. Критерий Коши для этого ряда не выполняется, так как для любого натурального n имеем $\sum\limits_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k} \ge \frac{1}{2n}\cdot n = \frac{1}{2}$. Значит, ряд расходится, хотя его общий член стремится к нулю.

Критерий Коши сходимости несобственного интеграла. $\int\limits_0^\infty f(u)\,du$ *сходится тогда и только тогда, когда* $\forall\,\varepsilon>0 \ \ \exists\, X \ge 0$ $\forall\, x, x' \ge X \quad \left|\int\limits_x^{x'} f(u)\,du\right| < \varepsilon\,.$

Отсюда не следует, что $f(u) \to 0$ при $u \to \infty$, так как существуют сходящиеся несобственные интегралы, у которых подынтегральная функция $f(u) \nrightarrow 0$ при $u \to \infty$.

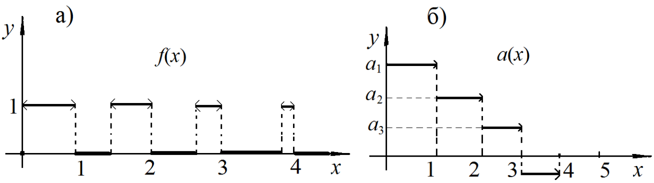


Рис. 13.1.

Пример. $f(x) = 1$ при $x \in \left(n - \frac{1}{2^{n-1}}, n\right) \ \ \forall\, n = 1, 2, \ldots$ и $f(x) = 0$ во всех остальных точках промежутка ($0 \le x < \infty$) (см. рис. 13.1 а). Функция $F(x) = \int\limits_0^x f(u)\,du \uparrow$ (возрастает) и ограничена, так как $y = f(x) \ge 0$ и $\int\limits_0^n f(u)\,du = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}} < 2$. Следовательно, по теореме о пределе монотонной функции (см. п. 11.3 с. 48 [1]) или [27] т. 1 с. 133) несобственный интеграл $\int\limits_0^\infty f(u)\,du$ сходится и $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = 2$, хотя подынтегральная функция не стремится к 0 при $u \to \infty$.

[1]) Ссылки на разделы первого тома настоящих лекций даются без указания тома и без ссылки на список литературы. (Ред.)

Замечание. Пусть дана последовательность $\{a_n\}$. Построим функцию $a(x) = a_n$ при $n-1 \le x < n$ (см. рис. 13.1 б). Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и интеграл $\int\limits_0^{\infty} a(x)\,dx$ сходятся и расходятся одновременно и значения суммы ряда и интеграла равны, если эти значения конечны. Действительно, $\int\limits_0^n a(x)\,dx = s_n = F(n)$. Поэтому, если интеграл сходится к числу A, т. е. существует $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = A$, то и $\lim\limits_{n\to\infty} F(n) = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = A$ и, значит, ряд сходится к сумме A. Обратно, если ряд сходится, то выполняется предыдущее равенство, причем $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. При $n-1 \le x < n$ имеем $|F(n) - F(x)| = (n-x)\,|a_n| \le |a_n| \to 0$ при $n \to \infty$, следовательно, $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = \lim\limits_{n\to\infty} F(n) = A$, т. е. $\int\limits_0^{\infty} a(x)\,dx = A$.

Таким образом, ряд есть частный случай несобственного интеграла, когда подынтегральная функция является кусочно-постоянной функцией со скачками в целых точках.

Пример. $\int\limits_0^{\infty} \sin x^2\,dx$ сходится. [2)]

3 семестр
Лекция 2
(06.09.68)

59.3. Признаки сходимости рядов с неотрицательными членами

Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ – ряд с неотрицательными членами, $a_n \ge 0$ $(\forall n)$. Для обозначения сходимости и расходимости рядов с неотрицательными членами пользуются символами $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$, со-

[2)] Это интеграл Френеля, его сходимость к $\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$ доказывается в [28] т. 2 с. 721–722. Сам факт сходимости можно установить, сделав замену переменных $u = x^2$ и оценив кусок интеграла $\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin u\,du}{2\sqrt{u}}$. Далее в пункте 59.6 с. 327 будет доказана с помощью признака Дирихле сходимость подобного интеграла $\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin u\,du}{u}$. (Ред.)

ответственно. В случае расходящегося ряда говорят, что его сумма равна бесконечности.

Если $a_n \geq 0$ $(\forall n)$, то последовательность частичных сумм ряда $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \geq 0$ $(\forall n)$ и возрастает. Верно и обратное: если последовательность $s_n \geq 0$ $(\forall n)$ и возрастает, то $a_n \geq 0$ $(\forall n)$. Отсюда и из свойств предела монотонной последовательности получаем

Критерий сходимости рядов с неотрицательными членами. *Для того, чтобы ряд с неотрицательными членами сходился, необходимо и достаточно, чтобы последовательность его частичных сумм была ограничена, т.е. чтобы* $\exists C \geq 0$ $\forall n$ $s_n \leq C$.

Таким образом, если ряд с неотрицательными членами расходится, то его последовательность частичных сумм $s_n \to \infty$ $(n \to \infty)$. В случае расходимости исследуют с какой скоростью ряд, т.е. последовательность частичных сумм ряда, расходится.

Пример. Ряд $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} + ...$ расходится. Следовательно, $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} \to \infty$ $(n \to \infty)$. С какой скоростью? (Ответ на этот вопрос мы получим ниже на с. 322.)

Аналогично, для несобственного интеграла от неотрицательной функции используется обозначение $\int_0^x f(u)\,du < \infty$, если интеграл сходится, и $\int_0^x f(u)\,du = \infty$, если он расходится. Если $f(x) \geq 0$ и $f \in R[0, x]$ $\forall x \geq 0$, то $F(x) = \int_0^x f(u)\,du \geq 0$ и $F(x) \uparrow$, и мы получаем

Критерий сходимости несобственного интеграла от неотрицательной функции. *Пусть* $f(x) \geq 0$ $\forall x \geq 0$. *Для того, чтобы интеграл* $\int_0^\infty f(x)\,dx$ *сходился необходимо и достаточно, чтобы* $\exists C \geq 0$ $\forall x \geq 0$ $F(x) = \int_0^x f(u)\,du \leq C$.

Теорема Коши об одновременной сходимости. *Пусть имеется ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (I) *с неотрицательными членами и* $a_n \downarrow$, *т.е.* $a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_n \geq a_{n+1} \geq ...$. *Тогда ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *и ряд*

$\sum\limits_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ (II) *сходятся и расходятся одновременно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу критерия сходимости надо доказать, что если последовательность частичных сумм ряда (I) ограничена, то частичные суммы ряда (II) тоже ограничены и наоборот. Обозначим $s_n = \sum\limits_{\nu=1}^{n} a_\nu$, $t_k = \sum\limits_{\mu=0}^{k} 2^\mu a_{2^\mu}$. Пусть ряд (I) сходится. Возьмем $s_{2^n} = \sum\limits_{\nu=1}^{2^n} a_\nu$. Тогда

$$s_{2^n} = a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + (a_5 + \ldots + a_8) + \ldots + (a_{2^{n-1}+1} + \ldots + a_{2^n}) \geq$$
$$\geq \frac{1}{2} a_1 + a_2 + 2a_4 + \ldots + 2^{n-1} a_{2^n} = \frac{1}{2}\left\{a_1 + 2a_2 + \ldots + 2^n a_{2^n}\right\} = \frac{1}{2} t_n\,.$$

Значит, последовательность $\{t_n\}$ ограничена и ряд (II) сходится.

Теперь в обратную сторону. Если ряд (II) сходится, то последовательность $\{t_n\}$ ограничена и

$$s_{2^n-1} = a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + \ldots + a_7) + \ldots + (a_{2^{n-1}} + \ldots + a_{2^n-1}) \leq$$
$$\leq a_1 + 2a_2 + \ldots + 2^{n-1} a_{2^{n-1}} = t_{n-1} \leq C\,.$$

Тогда $\{s_{2^n}\}$ ограничена, последовательность $\{s_n\}$ тоже ограничена и ряд (I) сходится. ►

Замечание. При применении теоремы Коши об одновременной сходимости надо проверять, что выполняется условие монотонности членов ряда.

Примеры. 1. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-s}$, где $s > 0$. Тогда ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} 2^{k(1-s)}$ – сумма геометрической прогрессии со знаменателем $q = 2^{1-s}$, сходится при $s > 1$ и расходится при $0 < s \leq 1$. Следовательно, по теореме Коши об одновременной сходимости и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ сходится при $s > 1$ и расходится при $0 < s \leq 1$.

2. По теореме Коши об одновременной сходимости ряды $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^s}$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 2^k \cdot 2^{-k} C k^{-s} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} C k^{-s}$ сходятся и расходятся одновременно. Значит, как следует из предыдущего примера, ряд сходится при $s>1$ и расходится при $0\le s\le 1$ (при $s=0$ исходный ряд – гармонический).

3. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n\ge n_0}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\ln n\cdot\ln\ln n\cdot\ldots\cdot(\underbrace{\ln\ldots\ln}_{k\text{ раз}} n)^s}$. По индукции получим, что ряд сходится при $s>1$ и расходится при $0\le s\le 1$.

Пусть $a_n\ge 0$. Мы уже рассматривали функцию $a(x)=a_n$ при $n-1\le x<n$, для которой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ и интеграл $\int\limits_0^{\infty}a(x)\,dx$ сходятся и расходятся одновременно и значения суммы ряда и интеграла равны, если эти значения конечны. Теперь пусть задана функция $f(x)\ge 0$ для $x\ge 0$. Построим последовательность $a_n=f(n)$ и наряду с несобственным интегралом $\int\limits_0^{\infty}f(x)\,dx$ рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$. Исследуем, как связаны между собой их сходимости.

Интегральный признак сходимости Коши для рядов. *Пусть функция $f(x)$ – монотонно убывающая, неотрицательная на $[0,\infty)$ и $a_n=f(n)$. Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ и интеграл $\int\limits_0^{\infty}f(x)\,dx$ сходятся и расходятся одновременно.*

Доказательство. Так как $f(x)\ge 0$ и $f(x)\downarrow$, то существует предел $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\alpha\ge 0$. Если $\alpha>0$, то $f(x)\ge\alpha>0$, $F(x)=\int\limits_0^{x}f(u)\,du\ge x\alpha$ и интеграл расходится. Но и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ расходится, так как общий член ряда $a_n\nrightarrow 0$ ($n\to\infty$). Если $\alpha=0$, то $f(x)\downarrow 0$ ($x\to\infty$). Имеем

$$F(n)=\int\limits_0^{n}f(u)\,du=\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{k-1}^{k}f(u)\,du\ge\sum_{k=1}^{n}f(k)=s_n\,.$$

Значит, если интеграл сходится, то $s_n\le F(n)\le\int\limits_0^{\infty}f(u)\,du$. Таким образом, из сходимости интеграла следует сходимость ряда и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\le\int\limits_0^{\infty}f(x)\,dx$.

Обратно. Пусть ряд сходится и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=A$. Имеем $a_1\ge\int\limits_1^{2}f(u)du$,

$\dots,\ a_k \geq \int\limits_k^{k+1} f(u)du$. Сложив неравенства, получим $s_n \geq \int\limits_1^{n+1} f(u)du$. Учитывая, что $s_n \leq A$, и прибавляя к обеим частям этого неравенства $\int\limits_0^1 f(u)\,du$, получим

$$A + \int\limits_0^1 f(u)\,du \geq s_n + \int\limits_0^1 f(u)\,du \geq \int\limits_0^{n+1} f(u)\,du = F(n+1)\,.$$

Значит, если сходится ряд, то функция $F(x)$ ограничена и по критерию сходимости несобственного интеграла от неотрицательной функции интеграл сходится. ▶

Замечание. При доказательстве теоремы мы получили оценку $F(n) - C_0 \leq F(n+1) - \int\limits_0^1 f(u)\,du \leq s_n \leq F(n)$, из которой следует, что $s_n = F(n) + O(1)$, т. е. с точностью до константы s_n растет как $F(n)$.

Пример. Для гармонического ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ рассмотрим $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x}$ от функции $f(x) = \frac{1}{x}$. Так как $F(x) = \int\limits_1^{x} \frac{du}{u} = \ln x \to \infty$ при $x \to \infty$, то $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x}$ расходится. Значит, по интегральному признаку Коши, гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится. При этом s_n растет как $F(n)$, т. е. как $\ln n$: $\quad 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} = \ln n + O(1)$.

Теперь мы покажем, что "не существует границы между сходимостью и расходимостью рядов а именно, имеют место следующие теоремы.

Теорема. *Для любого расходящегося ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$ *с неотрицательными членами,* $a_n \geq 0$ $(\forall\, n \in \mathbb{N})$, *существует расходящийся ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$, $b_n \geq 0$ $(\forall\, n \in \mathbb{N})$, *такой, что* $b_n = o(a_n)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Не ограничивая общности можно считать, что $a_1 > 0$. Так как $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$ и $a_n \geq 0$ $(\forall\, n \in \mathbb{N})$, то $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k > 0$ и $s_n \uparrow \infty$ $(n \to \infty)$. Пусть $t_n = \sqrt{s_n}$. Тогда

$t_n \uparrow \infty$ ($n \to \infty$). Положим $b_n = t_n - t_{n-1}$ ($n = 2, 3, \ldots$), $b_1 = t_1$. Тогда $b_n \geq 0$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) и $\sum\limits_{k=1}^{n} b_k = t_n \to \infty$ ($n \to \infty$). Воспользовавшись формулой Лагранжа для $f(s) = \sqrt{s}$ на отрезке $[s_{n-1}, s_n]$ при $n \geq 2$ получим, что найдется число $s \in [s_{n-1}, s_n]$ такое, что

$$b_n = \sqrt{s_n} - \sqrt{s_{n-1}} = \tfrac{a_n}{2} \cdot \tfrac{1}{\sqrt{s}} \leq \tfrac{1}{2} \tfrac{a_n}{\sqrt{s_{n-1}}} \, .$$

Следовательно, $b_n = o(a_n)$ при $n \to \infty$. ►

Теорема. *Для любого сходящегося ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n < \infty$ *с неотрицательными членами,* $u_n \geq 0$ ($\forall n \in \mathbb{N}$), *существует сходящийся ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n < \infty$, $v_n \geq 0$ ($\forall n \in \mathbb{N}$), *такой, что* $u_n = o(v_n)$.

Доказывается аналогично предыдущей теореме, только соответствующий пример строится с помощью остатков r_n ряда.

59.4. Признаки сходимости знакопеременных рядов

Определение. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *знакочередующимся*, если $\mathrm{sign} a_n \cdot \mathrm{sign} a_{n+1} = -1$ ($\forall n \in \mathbb{N}$).

Не ограничивая общности можно считать, что знакочередующийся ряд записан как $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$, где $u_n \geq 0$.

Признак Лейбница сходимости знакочередующихся рядов. *Пусть* $u_n \geq 0$ *и* $u_n \downarrow 0$. *Тогда знакочередующийся ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ *сходится.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что

$$s_{2m} = (u_1 - u_2) + \ldots + (u_{2m-1} - u_{2m}) \uparrow, \quad s_{2m} \leq u_1 \, ,$$

$$s_{2m+1} = u_1 - (u_2 - u_3) - \ldots - (u_{2m} - u_{2m+1}) \downarrow ,$$

$$s_{2m+1} \geq s_{2m}, \quad s_{2m+1} - s_{2m} = u_{2m+1} \to 0 \quad (m \to \infty) \, .$$

Отсюда следует, что s_{2m} и s_{2m+1} – ограниченные монотонные последовательности и имеют общий предел: $s_{2m} \to s$, $s_{2m+1} \to s$ ($m \to \infty$) и, значит, ряд сходится.

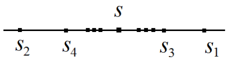


Рис. 13.2. Частичные суммы знакочередующегося ряда.

Отметим, что $s_{2m} \leq s \leq s_{2m+1}$ (см. рис. 13.2), т. е. сумма ряда заключена между четной и нечетной частичными суммами и можно судить о скорости сходимости знакочередующегося ряда. ▶

Пример. Ряд $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\ldots$ сходится (и его сумма равна $\ln 2$, как будет показано в § 60 с. 345).

3 семестр
Лекция 3
(18.09.68)

59.5. Абсолютная и условная сходимость

Определение. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n| < \infty$.

Определение. Сходящийся, но не абсолютно сходящийся, ряд называется *условно сходящимся.*

Теорема Коши. *Всякий абсолютно сходящийся ряд сходится.*

Доказательство. Так как $\left|\sum\limits_{k=n}^{m} u_k\right| \leq \sum\limits_{k=n}^{m} |u_k|$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n| < \infty$, то по критерию Коши ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ тоже сходится. ▶

Таким образом, всякий сходящийся ряд либо абсолютно, либо условно сходится. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ абсолютно сходится, то $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$ и $\sigma_n = \sum\limits_{k=1}^{n} |u_k|$ имеют конечные пределы. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ условно сходится, то s_n имеет конечный предел, а $\sigma_n \to \infty$ $(n \to \infty)$.

Введем обозначения: $a^+ = \max\{0, a\}$, $a^- = \min\{0, a\}$. Очевидно, что $a = a^+ + a^-$ и $|a| = a^+ - a^-$. Тогда $a^+ = \frac{1}{2}(a + |a|)$, $a^- = \frac{1}{2}(a - |a|)$. Теперь, наряду с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, рассмотрим еще два ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^+$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^-$. Пусть s_n, s_n^+, s_n^- – соответствующие частичные суммы для этих рядов. Тогда $s_n = s_n^+ + s_n^-$,

$\sigma_n = s_n^+ - s_n^-$, $s_n^+ = \frac{1}{2}(s_n + \sigma_n)$, $s_n^- = \frac{1}{2}(s_n - \sigma_n)$. Отсюда получаем, что если ряд абсолютно сходится, то существуют конечные пределы $\lim\limits_{n\to\infty} s_n^+$ и $\lim\limits_{n\to\infty} s_n^-$. Если ряд условно сходится, то $s_n^+ \to +\infty$, $s_n^- \to -\infty$ ($n \to \infty$). Таким образом, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ является условно сходящимся, если он сходится, а ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^+$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^-$ расходятся (соответственно, к $+\infty$ и к $-\infty$).

Рассмотрим аналогичные вопросы для несобственных интегралов.

Определение. Пусть функция $f(x)$ определена для всех $a \le x$ и для любого $b\mathbb{R}$, $b > a$, $f(x) \in R\,[a, b]$. Тогда несобственный интеграл $\int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx$ называется *абсолютно сходящимся*, если сходится $\int\limits_a^{\infty} |f(x)|\;dx$.

Всякий абсолютно сходящийся несобственный интеграл сходится, доказательство аналогично соответствующему доказательству для рядов.

Определение. Интеграл $\int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx$ называется *условно сходящимся*, если он сходится, а интеграл $\int\limits_a^{\infty} |f(x)|\;dx$ расходится.

Аналогично рядам, если интеграл $\int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx$ сходится условно, то $\int\limits_a^{\infty} f^+(x)\,dx = +\infty$, а $\int\limits_a^{\infty} f^-(x)\,dx = -\infty$.

59.6. Признаки сходимости Абеля и Дирихле

Признак Абеля. *Пусть числа* $u_n \in \mathbb{C}$, *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *сходится и* $\{\alpha_n\}$ – *монотонная ограниченная последовательность действительных чисел. Тогда ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n u_n$ *тоже сходится.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$ и значит, $u_n = s_n - s_{n-1}$ ($n = 1, 2, \ldots,\ s_0 = 0$). Тогда

$$t_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k u_k = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (s_k - s_{k-1}) = s_1(\alpha_1 - \alpha_2) + s_2(\alpha_2 - \alpha_3) + \ldots +$$
$$+ s_{n-1}(\alpha_{n-1} - \alpha_n) + \alpha_n s_n = \sum_{k=1}^{n-1} s_k\,(\alpha_k - \alpha_{k+1}) + \alpha_n s_n\,.$$

Преобразование $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k u_k = \sum\limits_{k=1}^{n-1} s_k\,(\alpha_k - \alpha_{k+1}) + \alpha_n s_n$ называется *преобразованием Абеля* (для суммирования оно играет роль, аналогичную интегрированию по частям для интегралов). Докажем, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} s_n(\alpha_n - \alpha_{n+1})$ абсолютно сходится. Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, то $|s_n| \le c$ ($n = 1, 2, \ldots,$) для некоторой постоянной c. Следовательно,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |s_n(\alpha_n - \alpha_{n+1})| \le c \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n - \alpha_{n+1}| = c \left| \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n - \alpha_{n+1}) \right| = c\,|\alpha_1 - \alpha|\,,$$

где $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n$. Значит, t_n стремится к конечному пределу при $n \to \infty$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n u_n$ сходится. ►

Замечание. Так как сходимость члена $\alpha_n s_n$ ясна, то после преобразования Абеля сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n u_n$ свелась к изучению сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} s_n(\alpha_n - \alpha_{n+1})$. Если в результате некоторого преобразования мы доказали, что для преобразованного ряда есть абсолютная сходимость, то отсюда не следует, вообще говоря, абсолютная сходимость первоначального ряда.

Замечание. Признак Абеля обобщается на *последовательности* $\{\alpha_n\}$ *с ограниченным изменением*, т.е. такие последовательности, для которых $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\alpha_n - \alpha_{n+1}| < \infty$.

Признак Дирихле. *Пусть* $u_n \in \mathbb{C}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *– такой ряд, что* $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k = O(1)$, *и последовательность* $\{\alpha_n\}$ ($\alpha_n \in \mathbb{R}$) *монотонна и* $\alpha_n \to 0$ *при* $n \to \infty$. *Тогда ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n u_n$ *сходится.*

Д о к а з а т е л ь с т в о аналогично предыдущему проводится с помощью преобразования Абеля. При этом мы получим, что ряд

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} s_n(\alpha_n - \alpha_{n+1})$ сходится абсолютно и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n u_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} s_n(\alpha_n - \alpha_{n+1})$, так как $s_n\alpha_n \to 0$ ($n \to \infty$). ►

Признаки Абеля и Дирихле имеют аналоги для несобственных интегралов. Для доказательства надо применить метод интегрирования по частям. Отметим, что условия непрерывности функции f и производной $\alpha'(x)$ на самом деле излишни. [3)]

Признак Абеля сходимости несобственных интегралов. *Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[a, \infty)$, несобственный интеграл $\int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx$ сходится, функция $\alpha(x)$ монотонна, ограничена и имеет непрерывную производную на $[a, \infty)$. Тогда несобственный интеграл $\int\limits_a^{\infty} \alpha(x) f(x)\,dx$ сходится.*

Признак Дирихле сходимости несобственных интегралов. *Пусть функция f непрерывна на $[a, \infty)$, функция $\Phi(x) = \int\limits_a^{x} f(u)\,du$ ограничена на $[a, \infty)$, функция $\alpha(x)$ монотонна, имеет непрерывную производную на $[a, \infty)$ и $\alpha(x) \to 0$ при $x \to \infty$. Тогда несобственный интеграл $\int\limits_a^{\infty} \alpha(x) f(x)\,dx$ сходится.*

Пример. $\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \int\limits_0^{1} \frac{\sin x}{x}\,dx + \int\limits_1^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$. Первый интеграл – собственный интеграл Римана, так как $\left|\frac{\sin x}{x}\right| \le C$ на $[0, 1]$, а второй интеграл сходится по признаку Дирихле ($\alpha(x) = \frac{1}{x}$). Следовательно, интеграл $\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ сходится, но он не является абсолютно сходящимся.

[3)] Обобщенная формула интегрирования по частям и обобщенная теорема о среднем, которые будут доказаны в п. 74.1, позволят доказать теоремы Абеля и Дирихле для интегралов без этих условий в более общей формулировке (см., например, [28] т. 2 с. 564.) (Ред.)

59.7. Специальные признаки сходимости рядов с положительными членами

Теорема сравнения. *Пусть даны два ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ (I), $a_n \geq 0$ $(\forall n \in \mathbb{N})$, *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ (II), $b_n \geq 0$ $(\forall n \in \mathbb{N})$.

1) *Пусть* $\exists K > 0 \;\; \exists N \;\; \forall n \geq N \;\; a_n \leq K b_n$. *Тогда, если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *сходится, то и ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится. Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *расходится, то и ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *расходится.*

2) *Пусть* [4] $\frac{a_n}{a_{n+1}} \geq \frac{b_n}{b_{n+1}}$ $(\forall n \geq N)$. *Тогда если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *сходится, то сходится ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *расходится, то и ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *расходится.*

Д о к а з а т е л ь с т в о 1). Так как при $n \geq N$ частичная сумма ряда (I) $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k \leq \sum\limits_{k=1}^{N-1} a_k + K \sum\limits_{k=N}^{n} b_k$, то в силу критерия сходимости рядов с неотрицательными членами, из сходимости ряда (II) следует сходимость ряда (I), а из расходимости ряда (I) следует расходимость ряда (II).

2) Из неравенства $\frac{a_n}{a_{n+1}} \geq \frac{b_n}{b_{n+1}}$ следует $\frac{a_n}{b_n} \geq \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}$, следовательно, последовательность $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ убывающая и $\frac{a_n}{b_n} \leq \frac{a_1}{b_1}$. Полагая $\frac{a_1}{b_1} = K$, получим $a_n \leq \frac{a_1}{b_1} b_n = K b_n$, $n > N$. Отсюда и из 1) следует утверждение 2). ▶

Эта теорема используется при доказательстве признаков Коши и Даламбера. При этом сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ доказывается сравнением с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$, где $q < 1$. Расходимость же следует из того, что для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ не будет выполняться необходимый признак сходимости.

Признак Коши. *Если для ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *с неотрицательными*

---

[4] Конечно, a_n и b_n предполагаются отличными от нуля. (Ред.)

членами $\sqrt[n]{a_n} \le q < 1$ $(\forall n \ge N)$, *то ряд сходится, если* $\sqrt[n]{a_n} \ge 1$ $(\forall n \ge N)$, *то ряд расходится.*

Признак Даламбера. *Если для ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *с неотрицательными членами* $\frac{a_n}{a_{n+1}} \ge \gamma > 1$ $(\forall n \ge N)$, *то ряд сходится; если* $\frac{a_n}{a_{n+1}} \le 1$ $(\forall n \ge N)$, *то ряд расходится.*

Признак Гаусса. *Пусть* $a_n > 0$ $(\forall n \ge N)$ *и* $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \alpha + \frac{\beta}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. *Тогда если* $\alpha > 1$ *или* $\alpha = 1$ *и* $\beta > 1$, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится. В остальных случаях ряд расходится.*

Доказательство. **1.** $\alpha > 1$. Ряд сходится по признаку Даламбера.

2. $0 \le \alpha < 1$. Ряд расходится по признаку Даламбера.

3. $\alpha = 1$, $\beta > 1$. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, где $b_n = \frac{1}{n^s}$, сходящийся при $s > 1$. Тогда $\frac{b_n}{b_{n+1}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^s = 1 + \frac{s}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Если $\beta > 1$, то найдется s такое, что $\beta > s > 1$ и $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ больше $\frac{b_n}{b_{n+1}}$ при $n \ge n_0$. По теореме сравнения ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

4. $\alpha = 1$, $\beta \le 1$. Возьмем $b_n = \frac{1}{n \ln(n-1)}$ $(n \ge 3)$. Легко проверить, что ряд $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n-1)}$ расходится (например, по интегральному признаку Коши; или см. на с. 320 пример 2 к теореме Коши об одновременной сходимости).

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{(n+1)\ln n}{n \ln(n-1)} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{\ln n - \ln(n-1)}{\ln(n-1)}\right) =$$
$$= 1 + \frac{1}{n} + \left(1 + \frac{1}{n}\right)\frac{\ln n - \ln(n-1)}{\ln(n-1)} \ge 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n \ln n},$$

так как по формуле Лагранжа $\ln n - \ln(n-1) = \frac{1}{n-1+\theta}$, где $0 < \theta < 1$. Также имеем

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{\beta}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = 1 + \frac{\beta}{n} + o\left(\frac{1}{n \ln n}\right),$$
$$1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n \ln n} \ge 1 + \frac{\beta}{n} + o\left(\frac{1}{n \ln n}\right)$$

при $n \ge n_0$ $(n \to \infty)$. Действительно , при $\beta < 1$ это ясно, а при $\beta = 1$ следует из сравнения третьих членов: $\frac{1}{n \ln n} > o\left(\frac{1}{n \ln n}\right)$. Таким образом, $\frac{a_n}{a_{n+1}} \le \frac{b_n}{b_{n+1}}$ при $n \ge n_0$. Так как $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ расходится, то и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится. ►

3 семестр
Лекция 4
(20.09.68)

В частности в пункте 4 предыдущей теоремы доказан
Признак Раабе (обобщенное правило Раабе). *Пусть* $a_n > 0$, $\beta \le 1$ *и* $\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{\beta}{n} + o\left(\frac{1}{n \ln n}\right)$ $(n \to \infty)$. *Тогда ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *расходится.*

Теорема сравнения для несобственных интегралов. *Пусть функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *определены на полупрямой* $(a \le x < \infty)$, $f(x) \ge 0$, $g(x) \ge 0$ $(\forall x \ge a)$ *и* $\forall b > a$ $f(x), g(x) \in R[a, b]$. *Пусть существует* $C > 0$ *такое, что для* $\forall x \ge a$ $f(x) \le C g(x)$. *Тогда*

если $\int\limits_a^{\infty} g(x)\, dx < \infty$, *то* $\int\limits_a^{\infty} f(x)\, dx < \infty$;

если $\int\limits_a^{\infty} f(x)\, dx = \infty$, *то* $\int\limits_a^{\infty} g(x)\, dx = \infty$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы сравнения для рядов.

Пример. Интеграл $\int\limits_a^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x^{\alpha}}\, dx$ $(a > 0,\ 0 < m \le \varphi(x) \le M)$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \le 1$. Действительно, $\int\limits_a^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}}\, dx$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \le 1$. Тогда по теореме сравнения для несобственных интегралов $\int\limits_a^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x^{\alpha}}\, dx$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \le 1$.

Пример. $\int\limits_a^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^{\beta}}$ $(a > 0)$ сходится при $\beta > 1$ и расходится при $\beta \le 1$.

59.8. Свойства сходящихся рядов

1) *Сходимость ряда не зависит от конечного числа членов ряда.*
Действительно, пусть для рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ $\exists n_0$ $\forall n \ge n_0$ $u_n = v_n$. Обозначим соответственно s_n, t_n частичные суммы этих рядов. Тогда $s_n - t_n = A$ при $n \ge n_0$ и обе последовательности частичных сумм имеют или не имеют предел одновременно. ▶

2) *Транслятивность. От вычеркивания или подстановки конечного числа членов ряда его сходимость не изменится.*

Для частичных сумм исходного ряда и получившегося нового ряда разность $s_n - t_m = A$ при $n - m = p$ для некоторого p. Тогда обе последовательности сходятся или расходятся одновременно. ►

3) *Пусть* $a \neq 0$. *Тогда ряды* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a u_n$ *одновременно сходятся или расходятся.*

Частичные суммы этих рядов s_n и $a s_n$ сходятся или расходятся одновременно. ►

Замечание. Что будет, если члены сходящегося ряда будем умножать не на постоянное число a, а каждое u_n умножим на свой множитель α_n, т. е. члены ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ умножим на члены ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ и рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n u_n$? В силу замечания к признаку Абеля, если последовательность α_n является последовательностью с ограниченным изменением, т. е. сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\alpha_n - \alpha_{n-1}| < \infty$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n u_n$ сходится. Если α_n не является последовательностью с ограниченным изменением, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n u_n$ может расходиться. Например, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ сходится по признаку Лейбница, а последовательность $\left\{\alpha_n = (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n}}\right\}$ не является последовательностью с ограниченным изменением и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n \alpha_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится.

Оказывается, что справедливо следующее утверждение:

Для того, чтобы из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *следовала сходимость ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n u_n$, *необходимо и достаточно, чтобы* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\alpha_n - \alpha_{n-1}| < \infty$. *Если последовательность* α_n *не является последовательностью с ограниченным изменением, то найдется сходящийся ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, *переходящий в расходящийся (т.е.*

такой, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n u_n$ *расходится*).

4) *Сходящиеся ряды можно почленно складывать друг с другом.*

Пусть ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ сходятся и $s_n^u=\sum\limits_{k=1}^{n} u_k$, $s_n^v=\sum\limits_{k=1}^{n} u_k$ – их частичные суммы. Тогда по свойствам пределов последовательностей $\lim\limits_{n\to\infty}(s_n^u+s_n^v)=\lim\limits_{n\to\infty}s_n^u+\lim\limits_{n\to\infty}s_n^v$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ сходится и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n+\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$. ►

5) Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится. Обозначим

$$v_k=\sum_{n=n_{k-1}+1}^{n_k} u_n, \quad 0=n_0<n_1<...<n_k<... .$$

Рассмотрим новый ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$ с частичными суммами

$$t_k=\sum_{l=1}^{k} v_l=\sum_{l=1}^{k}\sum_{n=n_{l-1}+1}^{n_l} u_n=s_{n_k} .$$

Сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ означает, что существует $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=s$, тогда существует и $\lim\limits_{k\to\infty}t_k=\lim\limits_{k\to\infty}s_{n_k}=s$. Таким образом,

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=(u_1+...+u_{n_1})+(u_{n_1+1}+...+u_{n_2})+$$
$$+...+\left(u_{n_{k-1}+1}+...+u_{n_k}\right)+...=\sum_{k=1}^{\infty}v_k .$$

Мы получили следующее свойство сходящихся рядов:
Во всяком сходящемся ряде можно расставлять скобки, при этом сумма ряда не изменится.

Обратное утверждение неверно.

Пример. Ряд $(1-1)+(1-1)+...+(1-1)+...$ сходится, а при раскрытии скобок расходится.

►

6) *Коммутативность.*

Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, $\{p_k\}$ – перестановка последовательности натуральных чисел $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & n & ... \\ p_1 & p_2 & p_3 & ... & p_n & ... \end{pmatrix}$, т. е. такая последовательность натуральных чисел, что для любого натурального m существует и притом единственное число $p_k = m$. Рассмотрим переставленный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_{p_k}$. Под коммутативной сходимостью понимается такая сходимость ряда, что всякий переставленный ряд сходится к той же сумме, что и сам ряд.

Вообще говоря, коммутативность не имеет места и новый переставленный ряд может расходиться.

Определение. Ряд называется *безусловно сходящимся*, если для любой перестановки его членов он остается сходящимся.

Сходящиеся ряды бывают безусловно и небезусловно сходящимися.

Теорема Дирихле – Римана о безусловной сходимости. *Для того, чтобы ряд безусловно сходился необходимо и достаточно, чтобы он абсолютно сходился (при этом его сумма не зависит от порядка членов ряда).*

Из этой теоремы следует, что класс безусловно сходящихся числовых рядов совпадает с классом абсолютно сходящихся рядов, а класс небезусловно сходящихся – с классом условно сходящихся рядов. Абсолютно сходящиеся ряды похожи по своим свойствам на конечные суммы. Доказательство и уточнение теоремы будет следовать из следующих двух теорем.

Теорема Дирихле. *Пусть ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *абсолютно сходится, т. е.* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n| < \infty$. *Тогда он коммутативно, т. е. безусловно, сходится к своей сумме.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\{p_k\}$ – произвольная перестановка натуральных чисел. Рассмотрим переставленный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_{p_k}$. Обозначим s_n – частичные суммы исходного ряда, а $t_k = u_{p_1} + u_{p_2} + ... + u_{p_k}$ – частичные суммы переставленного ряда. Пусть $Q_k = \max\{p_1, ..., p_k\}$ и τ_k – частичные суммы ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |u_{p_k}|$. Тогда $\tau_k = |u_{p_1}| + |u_{p_2}| + ... + |u_{p_k}| \le \sum\limits_{n=1}^{Q_k} |u_n| = \sigma_{Q_k} \le C$ ($\forall k \in \mathbb{N}$). Следовательно, переставленный ряд абсолютно сходится.

Докажем, что для любой перестановки $\{p_k\}$ натуральных чисел $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_{p_k}$. Пусть N – некоторое натуральное число. Рассмотрим $p_k = m$ ($m = 1, 2, ..., N$), где $k = k_m$. Пусть $L_N = \max\{k_1, k_2, ..., k_N\}$. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_{p_k}$ сходится к некоторой сумме t, т. е. его частичные суммы $t_k \to t$ ($k \to \infty$). Имеем

$$t_{L_N} = \sum_{k=1}^{L_N} u_{p_k} = \sum_{n=1}^{N} u_n + \sum_{n>N}{}' u_n = s_N + \rho_N ,$$

где ρ_N содержит конечное число слагаемых с номерами большими N. По критерию Коши $|\rho_N| \le \sum\limits_{n=N+1}^{M} |u_n| < \varepsilon$ для $N \ge N_0(\varepsilon)$. Тогда $|t_{L_N} - s_N| < \varepsilon$ ($N \ge N_0(\varepsilon)$) и, следовательно, $t_{L_N} \to s$ и $t_k \to t = s$ ($k \to \infty$), где s – сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$. Таким образом, всякий абсолютно сходящийся ряд коммутативно, т. е. безусловно, сходится к своей сумме. ►

Теорема Римана. *Пусть ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, $u_n \in \mathbb{R}$, *условно сходится. Тогда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *не является безусловно сходящимся. Именно, докажем, что*

существует перестановка $\{p_k\}$ *такая, что* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_{p_k} = \infty$;

существует перестановка $\{p'_k\}$ *такая, что* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_{p'_k} = -\infty$;

для любого $s \in \mathbb{R}$ *существует перестановка* $\{p_k\}$ *такая, что* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_{p_k} = s$.

Доказательство. Все утверждения доказываются аналогично. Докажем последнее, т. е. что для любого $s \in \mathbb{R}$ найдется перестановка натуральных чисел $\{p_k\}$ такая, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_{p_k} = s$.

3 семестр
Лекция 5
(25.09.68)

Рассмотрим неотрицательные члены исходного ряда $u_n \ge 0$ и составим из них новый ряд (запишем члены этого ряда подряд)

$$a_1 + a_2 + ... + a_k + ... = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = +\infty$$

и члены исходного ряда $u_n < 0$ и составим из них ряд

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_l + \ldots = \sum_{l=1}^{\infty} b_l = -\infty\,.$$

Так как $u_n \to 0$ ($n \to \infty$), то $a_k \to 0$ ($k \to \infty$) и $b_l \to 0$ ($l \to \infty$). Обозначим $s_k = \sum\limits_{\kappa=1}^{k} a_\kappa$ и $t_l = \sum\limits_{\lambda=1}^{l} b_\lambda$. Тогда $s_k \to +\infty$ ($k \to \infty$), $t_l \to -\infty$ ($l \to \infty$). Из этих двух рядов, поместив члены в определенном порядке друг за другом, построим ряд, сходящийся к s.

Не ограничивая общности, можем считать, что $s > 0$ (если $s \le 0$, то конструкция начинается с отрицательных членов $\{b_\lambda\}$). Заметим, что $s_{k+1} \ge s_k$, $t_{l+1} < t_l$. Найдем $k_1 = \min\{k : s_k \ge s\}$. Тогда $s_{k_1} \ge s > s_{k_1-1}$. Теперь к $\sum\limits_{\kappa=1}^{k_1} a_\kappa$ будем добавлять члены $\{b_\lambda\}$ до такого минимального номера l_1: $\sum\limits_{\kappa=1}^{k_1} a_\kappa + \sum\limits_{\lambda=1}^{l_1} b_\lambda$, чтобы $s_{k_1} + t_{l_1} < s \le s_{k_1} + t_{l_1-1}$. При этом по крайней мере один член последовательности $\{b_\lambda\}$ будет взят. Затем будем добавлять члены $\{a_\kappa\}$ и снова $\{b_\lambda\}$:

$$\sum_{\kappa=1}^{k_1} a_\kappa + \sum_{\lambda=1}^{l_1} b_\lambda + \sum_{\kappa=k_1+1}^{k_2} a_\kappa + \sum_{\lambda=l_1+1}^{l_2} b_\lambda$$

так, чтобы $s_{k_2} + t_{l_1} \ge s > s_{k_2-1} + t_{l_1}$, $s_{k_2} + t_{l_2} < s \le s_{k_2} + t_{l_2-1}$ и так далее:

$$\sum_{\kappa=1}^{k_1} a_\kappa + \sum_{\lambda=1}^{l_1} b_\lambda + \ldots + \sum_{\kappa=k_q+1}^{k_{q+1}} a_\kappa + \sum_{\lambda=l_q+1}^{l_{q+1}} b_\lambda + \ldots\,,$$

$k_q, l_q \uparrow\uparrow$ ($q \to \infty$). Получим ряд, который является перестановкой исходного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$. Докажем, что полученный ряд сходится и имеет суммой s. Обозначим σ_n частичные суммы полученного ряда. Имеем

$$\sigma_{k_{q+1}+l_q} \ge s > \sigma_{k_{q+1}+l_q-1}\,, \quad \sigma_{k_{q+1}+l_{q+1}} < s \le \sigma_{k_{q+1}+l_{q+1}-1}\,,$$

откуда

$$\left|\sigma_{k_{q+1}+l_q} - s\right| \le a_{k_{q+1}}\,, \quad \left|\sigma_{k_{q+1}+l_{q+1}} - s\right| \le \left|b_{l_{q+1}}\right|.$$

Следовательно, $\sigma_{k_{q+1}+l_q} \to s$ ($q \to \infty$), $\sigma_{k_{q+1}+l_{q+1}} \to s$ ($q \to \infty$). Покажем, что вся последовательность частичных сумм стремится к s. Так как

$$\sigma_{k_q+l_q} \le \sigma_n \le \sigma_{k_{q+1}+l_q} \quad (k_q + l_q \le n \le k_{q+1} + l_q)\,,$$

$$\sigma_{k_{q+1}+l_q} \geq \sigma_n \geq \sigma_{k_{q+1}+l_{q+1}} \quad (k_{q+1}+l_q \leq n \leq k_{q+1}+l_{q+1})\,,$$

то вся последовательность $\{\sigma_n\}$ заключена между двумя последовательностями $\left\{\sigma_{k_q+l_q}\right\}$ и $\left\{\sigma_{k_{q+1}+l_q}\right\}$, которые сходятся к s, значит и $\{\sigma_n\}$ сходится к s.

Доказательство теоремы Римана осуществляет следующую геометрическую идею (см. рис. 13.3): набираем сначала положительные члены, чтобы сумма стала больше s, потом набираем отрицательные члены, пока сумма не станет меньше s. ▶

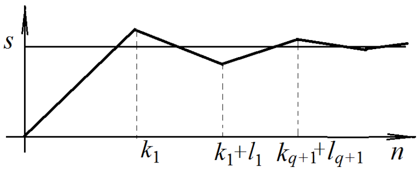


Рис. 13.3.

Замечание. Если предположить, что $u_n \in \mathbb{C}$, то теорема формулируется иначе.

Теорема. *Условно сходящийся ряд с комплексными членами не является безусловно сходящимся.*

Действительно, пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ ($u_n = \alpha_n + i\beta_n$) сходится условно. Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n| = \infty$ и по крайней мере один из рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|$ или $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\beta_n|$ расходится. Пусть для определенности расходится $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|$. Тогда найдем такую перестановку ряда из комплексных чисел, что он не будет сходиться (это такая перестановка, для которой расходится действительная часть ряда, поведение мнимой части при этом не играет роли). Но в общем случае переставленный ряд не может сходиться к произвольному числу s. ▶

7) *Перемножение рядов*. Пусть ряды $U = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ и $V = \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ сходятся. Обозначим $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n\right)\left(\sum\limits_{m=1}^{\infty} v_m\right) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} w_k \overset{?}{=} UV$, где $w_k = u_n v_m$ и $k \leftrightarrow (n,m)$ – взаимно однозначное соответствие. Оказывается, существует пара сходящихся рядов и такая расстановка их попарных произведений, что соответствующий ряд-произведение будет расходиться.

Пример. $u_n = v_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$, расставим попарные произведения по конечным диагоналям (см. рис. 13.4)

$$\sum_{k=1}^{\infty} w_k = u_1v_1 + u_1v_2 + u_2v_1 + u_1v_3 + u_2v_2 + u_3v_1 + \ldots .$$

Тогда $\frac{1}{\sqrt{1}\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{1}\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{1}\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{1}} - \ldots$. Рассмотрим сумму таких членов ряда-произведения, что сумма $n + m = k$: $(-1)^k \left\{ \frac{1}{\sqrt{1}\sqrt{k-1}} + \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{k-2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{k-1}\sqrt{1}} \right\}$. Для модуля суммы этих членов имеем $\sum\limits_{\kappa=1}^{k-1} \frac{1}{\sqrt{\kappa}\sqrt{k-\kappa}} \geq (k-1) \cdot \frac{1}{\sqrt{(k-1)(k-1)}} = 1$, и мы нашли кусок ряда-произведения, сколь угодно далекий, такой, что он по модулю больше 1. Следовательно, по критерию Коши ряд расходится.

Возникает вопрос, когда ряд-произведение будет сходиться безусловно? А при условной сходимости найти такое упорядочение попарных произведений членов исходных рядов, чтобы сумма была равна UV .

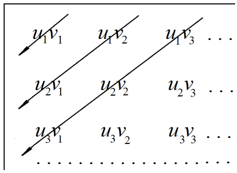


Рис. 13.4. Схема перемножения рядов по конечным диагоналям.

Теорема о произведении абсолютно сходящихся рядов. *Пусть* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = U$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n| < \infty$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n = V$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |v_n| < \infty$. *Тогда ряд-произведение* $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n\right)\left(\sum\limits_{m=1}^{\infty} v_m\right) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} w_k$ *при произвольном порядке его членов* $u_n v_n$ *абсолютно сходится и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} w_n = UV$.

Таким образом, абсолютно сходящиеся ряды можно перемножать почленно.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем, что ряд-произведение абсолютно сходится. Имеем

$$\sum_{\kappa=1}^{k} |w_\kappa| = \sum_{\kappa=1}^{k} |u_{n_\kappa} v_{n_\kappa}| \leq \sum_{n=1}^{N_k} \sum_{m=1}^{M_k} |u_n v_m| \leq$$
$$\leq \sum_{n=1}^{N_k} |u_n| \cdot \sum_{m=1}^{M_k} |v_m| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |u_n| \cdot \sum_{m=1}^{\infty} |v_m| = C < +\infty ,$$

где $N_k = \max\limits_{\kappa=1,\ldots,k} n_\kappa$, $M_k = \max\limits_{\kappa=1,\ldots,k} m_\kappa$. Таким образом, частичные суммы ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |w_n|$ ограничены, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |w_n| < \infty$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} w_n$ сходится абсолютно, значит, он сходится и безусловно. Следовательно, члены $w_k = u_n v_m$ ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} w_n$ можем поставить в

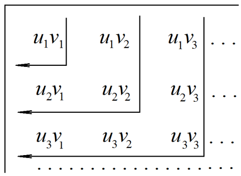


Рис. 13.5. Схема перемножения рядов по прямоугольникам.

удобном для нас порядке. Занумеруем члены прямоугольной таблицы попарных произведений по прямоугольникам (см. рис. 13.5). Тогда, расставляя соответствующим образом скобки, получим ряд, имеющий ту же сумму

$$\sum_{k=1}^{\infty} w_k = u_1v_1 + (u_1v_2 + u_2v_2 + u_2v_1) + (...) + ...$$

Частичные суммы этого ряда с расставленными скобками имеют вид

$$\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N} u_n v_m = \sum_{n=1}^{N} u_n \sum_{m=1}^{N} v_m = U_N V_N \to UV \quad (N \to \infty)$$

(U_N и V_N – частичные суммы рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$). В силу безусловной сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} w_n$ при любом порядке членов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} w_n = UV$. ►

Теорема Мертенса. *Пусть ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *абсолютно сходится:* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = U$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n| < \infty$, *и ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ *сходится:* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n = V$. *Тогда ряд* $\sum\limits_{k=2}^{\infty} W_k$, *где* $W_k = \sum\limits_{\kappa}^{k-1} u_{k-\kappa} v_\kappa = \sum\limits_{n+m=k} u_n v_m$ *(суммирование по конечным диагоналям) сходится и* $\sum\limits_{k=2}^{\infty} W_k = U \cdot V$.

Доказательство. Обозначим $s_n = \sum\limits_{\nu=1}^{n} u_\nu$, $t_m = \sum\limits_{\mu=1}^{m} v_\mu$, $\sigma_k = \sum\limits_{\kappa=2}^{k} W_\kappa$. Тогда

$$\sigma_k = \sum_{\kappa=2}^{k} W_\kappa = u_1(v_1 + v_2 + ... + v_{k-1}) +$$
$$+ u_2(v_1 + v_2 + ... + v_{k-2}) + ... + u_{k-1}v_1 ,$$

$$\sigma_{n+1} = u_1t_n + u_2t_{n-1} + ... + u_nt_1 , \quad s_nt_n = u_1t_n + u_2t_n + ... + u_nt_n .$$

Следовательно,

$$\sigma_{n+1} - s_nt_n = -u_2(t_n - t_{n-1}) - u_3(t_n - t_{n-2}) - ... - u_n(t_n - t_1)$$

и

$$|\sigma_{n+1} - s_n t_n| \le |u_2|\,|t_n - t_{n-1}| + |u_3|\,|t_n - t_{n-2}| + \ldots +$$
$$+ |u_m|\,|t_n - t_{n-m+1}| + |u_{m+1}|\,|t_n - t_{n-m}| + \ldots + |u_n|\,|t_n - t_1| \,.$$

В силу сходимости рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ для всякого положительного ε найдется номер $N_0(\varepsilon)$ такой, что при $n, k \ge N_0(\varepsilon)$ выполняются неравенства $|t_n - t_k| \le \varepsilon$, $\sum\limits_{\nu=k}^{n} |u_\nu| \le \varepsilon$. Тогда при $n \ge 2N_0(\varepsilon)$, $\frac{n}{2} \le m \le \frac{n}{2} + 1$

$$|u_2|\,|t_n - t_{n-1}| + |u_3|\,|t_n - t_{n-2}| + \ldots + |u_m|\,|t_n - t_{n-m+1}| \le \varepsilon \sum_{\nu=2}^{m} |u_\nu|$$

и, в силу ограниченности последовательности $\{t_\nu\}$,

$$|u_{m+1}|\,|t_n - t_{n-m}| + \ldots + |u_n|\,|t_n - t_1| \le C \sum_{k=m+1}^{n} |u_k| \le C\varepsilon \,.$$

Следовательно, $|\sigma_{n+1} - s_n t_n| \le K\varepsilon$ при $n \ge n_0(\varepsilon) = 2N_0(\varepsilon)$. ▶

3 семестр
Лекция 6
(27.09.68)

Если произведение рядов определяется правилом умножения (формулой) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n \sum\limits_{m=1}^{\infty} v_m = \sum\limits_{k=1}^{\infty} W_k$, где

$$W_k = \sum_{\kappa=1}^{k} u_\kappa v_{k+1-\kappa} = \sum_{n+m=k+1} u_n v_m \,,$$

то такое перемножение называется перемножением по правилу Коши. Правило Коши позволяет при перемножении степенных рядов получить снова степенной ряд:

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n \sum_{m=0}^{\infty} v_m x^m = \sum_{k=0}^{\infty} W_k x^k \,, \quad x \in \mathbb{R} \,.$$

Обратим внимание, что при правилах умножения не только порядок слагаемых устанавливается, а еще и скобки в ряде ставятся.

При перемножении рядов Дирихле, т. е. рядов вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{n^\alpha}$, чтобы получить ряд такого же вида, используют правило Дирихле:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{n^\alpha} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{v_m}{m^\alpha} = \sum_{n,m} \frac{u_n v_m}{(n \cdot m)^\alpha} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{D_k}{k^\alpha} \,,$$

где $k = n \cdot m$ и $D_k = \sum\limits_{k=n\cdot m} u_n v_m$.

В зависимости от того, какой класс рядов в каждой данной задаче рассматривается, естественно применять свое правило перемножения рядов.

59.9. Простейшие свойства несобственных интегралов

Мы уже рассматривали несобственные интегралы вида $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$. Рассмотрим теперь несобственные интегралы от неограниченных функций.

Пусть функция $f(x)$ определена на полуинтервале $(a, b]$ и $\forall \varepsilon > 0 \quad f(x) \in R\,[a+\varepsilon, b]$, а на интервале $(a, a+\varepsilon)$ функция неограничена (см. рис. 13.6 а).

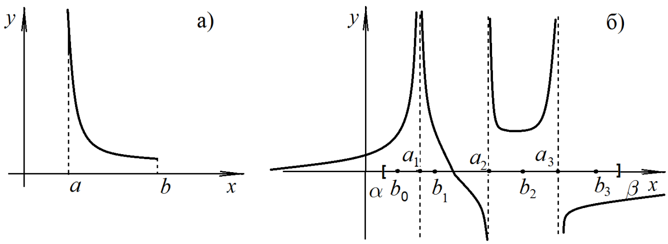


Рис. 13.6.

Определение. *Несобственный интеграл Римана* $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *от неограниченной функции* есть предел $\int\limits_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx$ при $\varepsilon \to +0$:
$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{\varepsilon\to+0} \int\limits_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx$.

Все, что было сказано для интегралов с бесконечным пределом $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$, переносится на несобственный интеграл от неограниченной функции. Положим $x = a + \frac{1}{y}$ в интеграле $\int\limits_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx$.

Тогда $\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx = \int\limits_{\frac{1}{b-a}}^{\frac{1}{\varepsilon}} f\left(a+\frac{1}{y}\right)\frac{dy}{y^2} \to \int\limits_{\frac{1}{b-a}}^{\infty} f\left(a+\frac{1}{y}\right)\frac{dy}{y^2}$ $(\varepsilon \to 0)$.

Итак, несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ от неограниченной функции существует тогда и только тогда, когда существует несобственный интеграл с бесконечным пределом $\int\limits_{\frac{1}{b-a}}^{\infty} f\left(a+\frac{1}{y}\right)\frac{dy}{y^2}$ и

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_{\frac{1}{b-a}}^{\infty} f\left(a+\frac{1}{y}\right)\frac{dy}{y^2}.$$

Упражнения. 1) Сформулировать признаки сходимости для несобственных интегралов от неограниченных функций.

2) При каких значениях α интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}\,dx$ сходится?

Пусть теперь функция $f(x)$ (см. рис. 13.6 б) определена на числовой прямой $(-\infty,+\infty)$ и имеет конечное число особенностей – точек $a_1, a_2, ..., a_n$ ($a_1 < a_2 < ... < a_n$), в окрестности которых функция неограничена, и таких, что $f(x) \in R[\alpha,\beta]$, если $a_i \notin [\alpha,\beta]$ ($i = 1, 2, ...n$). Зададим произвольные точки $b_0, b_1, ..., b_n$ так, что $b_0 < a_1 < b_1 < ... < a_n < b_n$.

Определение.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{b_0} f(x)dx + \int\limits_{b_0}^{a_1} f(x)dx + \int\limits_{a_1}^{b_1} f(x)dx + ... + \int\limits_{a_n}^{b_n} f(x)dx + \int\limits_{b_n}^{\infty} f(x)dx,$$

причем интеграл слева сходится тогда и только тогда, когда сходится каждый из интегралов в правой части равенства.

Свойство 1. *$\int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx$ и $\int\limits_b^{\infty} f(x)\,dx$, где $b > a$, сходятся и расходятся одновременно, причем $\int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx = \int\limits_a^{b} f(x)\,dx + \int\limits_b^{\infty} f(x)\,dx$.*

В частности, отсюда получаем, что если интеграл $\int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx$ сходится, то $\int\limits_b^{\infty} f(x)\,dx \to 0$ $(b \to \infty)$ – аналог свойства $r_n \to 0$ $(n \to \infty)$ для рядов, где r_n – остаток сходящегося ряда.

Свойства 2, 3, 4 те же, что у рядов.

Свойство 5. Замена переменной. Свойству рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=n_{k-1}+1}^{n_k} u_n$$

(можно расставлять скобки) соответствует замена переменной в интеграле.

Для замены переменной в интеграле $\int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx$ правила замены переменной применим к интегралу $\int\limits_a^{b} f(x)\,dx$ и затем b устремим к бесконечности. Пусть $\int\limits_a^{b} f(x)\,dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$, где $\varphi(t)$ строго монотонна, непрерывна и удовлетворяет условиям, сформулированным в теореме о замене переменных для собственных интегралов. Если $\varphi(\beta) \to \infty$ при $\beta \to \beta_0$, причем β_0 может быть и бесконечностью, то переходя в равенстве для собственных интегралов к пределу при $b \to \infty$, $\beta \to \beta_0$, получим

$$\int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta_0} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt\,.$$

Аналогичные формулы справедливы и для других несобственных интегралов (от неограниченных функций или с двумя бесконечными пределами). Оба интеграла сходятся или расходятся одновременно.

Свойство 6. Интегрирование по частям. Предполагаем, что для любого b функции u и v удовлетворяют на $[a,b]$ условиям интегрирования по частям для собственного интеграла. Тогда $\int\limits_a^{b} u\,dv = uv|_a^b - \int\limits_a^{b} v\,du$. Перейдем к пределу при $b \to \infty$. Получим

$$\int\limits_a^{\infty} u\,dv = uv|_a^{\infty} - \int\limits_a^{\infty} v\,du\,,$$

при этом, если существуют пределы для двух членов последнего выражения, то существует предел третьего члена и формула верна.

§ 60. Разложение функций в ряды Тейлора

Ряды Тейлора – основное приложение теории рядов.

Если $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, то говорят, что функция раскладывается в степенной ряд. Разложение в степенные ряды – один из способов представления функций. Степенными рядами можно представить узкий класс функций, которые называются аналитическими. Такое представление позволяет продолжить функцию действительного переменного на комплексную область. Если при $x = \alpha + i\beta$ степенной ряд сходится, то будем считать значение суммы ряда значением функции при взятом комплексном значении x .

Пусть по формуле Тейлора

$$f(x) = f(0) + \tfrac{f'(0)}{1!}x + ... + \tfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + r_n(x) .$$

Если у функции, определенной на интервале $(-a, a)$ существуют все производные $f^{(n)}(0)$ ($\forall\, n \in \mathbb{N}$), то можем формально написать ее ряд Тейлора

$$\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0)\tfrac{x^n}{n!} \sim f(x) .$$

Ряд Тейлора формально можем сопоставить каждой функции, бесконечно дифференцируемой в точке 0. При этом может оказаться, что ряд Тейлора сходится в некоторой окрестности точки 0; может оказаться, что он расходится везде, кроме точки 0; ряд может сходиться, но к другой функции.

Пример. Для функции $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ при $x \neq 0$ и $f(0) = 0$ все $f^{(n)}(0) = 0$ ($n = 0, 1, 2, ...$). Ряд Тейлора $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \equiv 0$ и следовательно, не представляет функцию.

Основной вопрос в том, когда имеет место равенство

$$\sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{f^{(n)}(0)}{n!}\, x^n = f(x) ,$$

т. е. когда $r_n(x) \to 0$ ($n \to \infty$).

Разложение функций e^x , $\sin x$, $\cos x$ в ряды Тейлора. Рассмотрим функцию $f(x) = e^x$. По формуле Тейлора

$$e^x = 1 + \tfrac{x}{1!} + ... + \tfrac{x^n}{n!} + r_n(x) ,$$

где $r_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}$ ($0 < \theta < 1$). Так как $\left|e^{\theta x}\right| \leq e^{|x|}$ и факториал $(n+1)!$ растет быстрее, чем $|x|^{n+1}$, то $r_n(x) \to 0$ ($n \to \infty$) для любого действительного x . Таким образом, справедлива формула

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (\forall\, x \in \mathbb{R}).$$

Аналогично доказывается, что для любого $x \in \mathbb{R}$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots, \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots .$$

Если $z = x + iy$, то определим $e^z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$. Докажем, что основное свойство показательной функции $e^{x_1} \cdot e^{x_2} = e^{x_1+x_2}$ при любых $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ выполняется и для комплексных чисел, т. е. $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$ для любых $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ абсолютно сходится. По теореме о произведении абсолютно сходящихся рядов можно перемножить ряды для e^{z_1} и для e^{z_2} по любому правилу. Перемножим их по правилу Коши:

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_1^n}{n!}\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{z_2^m}{m!}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{k} \frac{z_1^l z_2^{k-l}}{l!(k-l)!} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{l=0}^{k} \frac{k! z_1^l z_2^{k-l}}{l!(k-l)!} = \sum_{k=0}^{\infty} (z_1 + z_2)^k \cdot \frac{1}{k!} = e^{z_1+z_2}$$

(мы воспользовались формулой бинома Ньютона).

Если $z = ix$, то в силу абсолютной сходимости

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} =$$

$$= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots\right) = \cos x + i \sin x .$$

Формула

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

называется *формулой Эйлера*. В частности, из этой формулы следует, что $\left|e^{ix}\right| = 1$.

Упражнение. Сравнить $\sin ix$ и $\cos ix$ с гиперболическими функциями.

Пусть в некоторой области, содержащей точку 0, функция имеет все производные. По формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа (п. 27.4) $r_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x)$, где $0 < \theta < 1$. Если для всякого $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $|r_n(x)| \le \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} M(x)$ для некоторой функции $M(x)$, то $r_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$ для всех x, для которых справедлива эта формула. Следовательно, $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$, и мы имеем достаточное условие разложения функции в ряд Тейлора. В частности, если производные ограничены в области в совокупности, то $M(x)$ тождественно постоянная и функция раскладывается в области в ряд Тейлора.

3 семестр
Лекция 7
(02.10.68)

Разложение функции $\ln(1+x)$ в ряд Тейлора. Для функции $\ln(1+x)$ имеет место формула

$$\ln(1+x) = x - \tfrac{x^2}{2} + \tfrac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\tfrac{x^n}{n} + r_n(x)\,,$$

где $r_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{(-1)^n n!}{(1+\theta x)^{n+1}} = \frac{(-1)^n}{n+1}\left(\frac{x}{1+\theta x}\right)^{n+1}$. Если $0 \le x \le 1$, то $r_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$. Значит, для $0 \le x \le 1$ функция $\ln(1+x)$ раскладывается в ряд Тейлора. Отсюда, в частности, следует, что $\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$. Докажем, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$ сходится тогда и только тогда, когда x принадлежит $(-1,1]$. Пусть $-1 < x \le 0$. Возьмем остаточный член формулы Тейлора в форме Коши (п. 27.7)

$$r_n(x) = \tfrac{x^{n+1}}{(n)!}(1-\theta)^n f^{(n+1)}(\theta x) =$$
$$= (-1)^n x^{n+1}\tfrac{(1-\theta)^n}{(1+\theta x)^{n+1}} = (-1)^n x^{n+1}\tfrac{1}{1+\theta x}\left(\tfrac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n,$$

где $0<\theta<1$. Тогда $|r_n(x)| \le |x|^{n+1}\frac{1}{1-|x|}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n$. Но $\left|\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right| < 1$, если $-1 < x \le 0$. Значит, $r_n(x) \to 0$ ($n \to \infty$). Мы доказали, что справедлива формула $\ln(1+x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$ для всех x, для которых ряд сходится, т. е. для $-1 < x \le 1$.

Замечание. Как вычислить сумму числового ряда? Для этого надо постараться подобрать функцию такую, что этот ряд был бы для нее рядом Тейлора.

Пример. Определить сумму ряда $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots$. Рассмотрим ряд $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots$. Продифференцировав этот ряд почленно (далее мы узнаем, что степенные ряды можно почленно дифференцировать и интегрировать), получим ряд $1 - x^2 + x^4 - \ldots$, сходящийся к $\frac{1}{1+x^2} = \operatorname{arctg}' x$. Можно ожидать, что проинтегрировав почленно последний ряд, мы получим ряд Тейлора для

$\operatorname{arctg} x = \int\limits_0^x \frac{du}{1+u^2} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots$. Тогда сумма первоначального ряда есть $\operatorname{arctg} 1$. Значит, получим $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots$. ▶

Биномиальный ряд

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \ldots = \\ = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}x^k .$$

По признаку Даламбера биномиальный ряд сходится при $|x| < 1$. При натуральном $\alpha = N$ ряд обрывается (коэффициенты обращаются в 0 при $n > N$), а сам ряд представляет собой конечную сумму – бином Ньютона. В этом случае формула справедлива для всякого x .

Если α не является натуральным числом, то при $|x| > 1$ биномиальный ряд расходится. Неисследованными остаются точки $x = \pm 1$. Точку $x = -1$ имеет смысл рассматривать только для $\alpha > 0$. Заметим, что для некоторых α формула справедлива и для $|x| = 1$.[5] Например, при $\alpha = \frac{1}{2}$ сумма биномиального ряда представляет собой арифметическое значение функции $\sqrt{1+x}$ для $-1 \le x \le 1$.

Докажем, что формула верна для $|x| < 1$ для всякого $\alpha \in \mathbb{R}$. По формуле Тейлора $(1+x)^\alpha = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}x^k + r_n(x)$. Остаточный член в форме Коши

$$r_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n)!}(1-\theta)^n f^{(n+1)}(\theta x) = \\ = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)}{n!}x^{n+1}(1-\theta)^n(1+\theta x)^{\alpha-n-1} = \\ = \frac{(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)}{n!}x^n \alpha x(1+\theta x)^{\alpha-1}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n \to 0 \quad (n\to\infty),$$

если $|x| < 1$, так как $\frac{(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)}{n!}x^n \to 0$, как член ряда Тейлора для $(1+x)^{\alpha-1}$, а величины $\alpha x(1+\theta x)^{\alpha-1}$ и $\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n$ ограничены.

§ 61. Бесконечные произведения

Как следует из основной теоремы алгебры, всякий многочлен $p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ над полем комплексных чисел рас-

[5] См., например, задачу 26 в [8] т. 1 § 37 с. 648 и [28] т. 2 гл. 11 п. 407 с. 373. Важно подчеркнуть, что в случае рационального α сумма биномиального ряда дает всегда арифметическое значение радикала. (Ред.)

кладывается на множители $p(x) = a_n(x-\alpha_1)...(x-\alpha_n)$, где α_i ($i = 1,...,n$) – корни этого многочлена. Запишем это разложение в несколько иной форме, обозначив через λ кратность нуля, если он является корнем многочлена ($\lambda = 0$, если 0 не является корнем): $p(x) = Cx^\lambda\left(1-\frac{x}{\alpha_{\lambda+1}}\right)...\left(1-\frac{x}{\alpha_n}\right)$. Если аналитическая во всей комплексной плоскости функция имеет нули α_i ($i = 1,...,n,...$), то в некоторых случаях она имеет аналогичное разложение, но уже на счетное множество сомножителей $f(x) = Cx^\lambda\left(1-\frac{x}{\alpha_{\lambda+1}}\right)...\left(1-\frac{x}{\alpha_n}\right)...$. Например, для функции $f(x) = \sin x$, имеющей нули в точках $x = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, справедливо разложение [6)]

$$\sin x = x\left(1-\frac{x}{\pi}\right)\left(1+\frac{x}{\pi}\right)...\left(1-\frac{x}{\pi k}\right)\left(1+\frac{x}{\pi k}\right)... = x\cdot\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right).$$

Определение. *Бесконечным произведением* называется выражение $\prod\limits_{k=1}^{\infty} p_k$ ($p_k \neq 0$). Бесконечное произведение называется *сходящимся*, если предел $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=1}^{n} p_k$ существует и не равен 0. В противном случае произведение называется *расходящимся*.

Из определения следует, что в сходящемся бесконечном произведении, начиная с некоторого номера k_0 сомножители будут положительны, так как иначе частичные произведения $\prod\limits_{k=1}^{n} p_k$ меняли бы знак и не сходились бы к числу, не равному нулю. Бесконечные произведения $\prod\limits_{k=1}^{\infty} p_k$ и $\prod\limits_{k=k_0}^{\infty} p_k$ сходятся и расходятся одновременно. Положим $p_k = \exp\ln p_k$ при $k \geq k_0$. Тогда $\prod\limits_{k=k_0}^{n} p_k = \exp\sum\limits_{k=k_0}^{n}\ln p_k$. Отсюда следует, что бесконечное произведение $\prod\limits_{k=1}^{\infty} p_k$ сходится тогда и только тогда, когда $\sum\limits_{k=k_0}^{\infty}\ln p_k$ сходится и мы получаем

Критерий сходимости бесконечного произведения. *Бесконечное произведение $\prod\limits_{k=1}^{\infty} p_k$ сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд $\sum\limits_{k=k_0}^{\infty}\ln p_k$ (где k_0 – номер, начиная с которого*

[6)] См. [13] с. 251. (Ред.)

p_k *положительны*).

Для сходимости ряда $\sum\limits_{k=k_0}^{\infty} \ln p_k = \sum\limits_{k=k_0}^{\infty} \ln(1+\alpha_k)$ необходимо $\alpha_k \to 0$ ($k \to \infty$), откуда следует, $p_k \to 1$ ($k \to \infty$). Таким образом, справедлив

Необходимый признак сходимости бесконечного произведения. *Если бесконечное произведение* $\prod\limits_{k=1}^{\infty} p_k$ *сходится, то* $p_k \to 1$ ($k \to \infty$).

Отсюда следует, что в случае сходимости бесконечного произведения $\alpha_k \to 0$ ($k \to \infty$) и, следовательно, $\frac{\ln(1+\alpha_k)}{\alpha_k} \to 1$ ($k \to \infty$).

В частности, если $p_k = 1+\alpha_k > 1$, т. е. $\alpha_k > 0$, то по теореме сравнения ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \ln(1+\alpha_k)$ сходится и расходится одновременно с рядом $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k$. Отсюда следует

Условие сходимости бесконечного произведения при $p_k > 1$. *Для сходимости бесконечного произведения* $\prod\limits_{k=1}^{\infty} p_k$ $(p_k = 1+\alpha_k > 1)$ *необходимо и достаточно, чтобы ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ *сходился.*

Бесконечное произведение называется безусловно сходящимся, если его сходимость не зависит от порядка сомножителей.

Условие безусловной сходимости бесконечного произведения. *Бесконечное произведение* $\prod\limits_{k=1}^{\infty} p_k$ *с положительными членами* $p_k = 1 + \alpha_k > 0$ *безусловно сходится тогда и только тогда, когда ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ *сходится абсолютно.*

Действительно, для того, чтобы бесконечное произведение было безусловно сходящимся, необходимо и достаточно, чтобы ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \ln(1+\alpha_k)$ был безусловно, а значит, абсолютно сходящимся, для чего, в свою очередь, необходимо и достаточно, чтобы ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ сходился абсолютно. ►

Глава 14

Функциональные последовательности и ряды

§ 62. Сходимость последовательности функций

В этой главе мы будем рассматривать функциональные последовательности $\{f_n(x)\}$ и ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, определенные на множестве X. Сходимость функциональных последовательностей и рядов будем рассматривать поточечную и в смысле некоторых метрик.

62.1. Поточечная (простая) сходимость

Определение. Говорят, что последовательность функций $\{f_n(x)\}$ *поточечно сходится* на множестве $M \subset X$ к функции $f(x)$, обозначается $f_n(x) \to f(x)$ ($n \to \infty$), если для любого $x_0 \in M$ числовая последовательность $f_n(x_0)$ сходится к $f(x_0)$.

Пример. На множестве $X = [0, 1]$ задана последовательность $f_n(x)$ (см. рис. 14.1 а) непрерывных функций. Тогда предельная функция $f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ 1, & 0 < x \le 1, \end{cases}$ разрывна, интегрируема по Риману на $[0,1]$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^1 f_n(x)\,dx = \int\limits_0^1 f(x)\,dx$. Но, вообще говоря,[1] $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_a^b f_n(x)\,dx \ne \int\limits_a^b f(x)\,dx$.

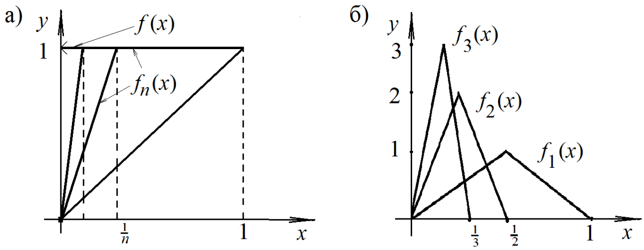


Рис. 14.1.

Пример. На рисунке 14.1 б) изображена последовательность функций $f_n(x)$, заданных на множестве $X = [0,1]$, сходящаяся к $f(x) \equiv 0$ на $[0,1]$. Площади под графиками функций $f_n(x)$ сохраняются, $\int\limits_0^1 f_n(x)\,dx = \frac{1}{2}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^1 f_n(x)\,dx = \frac{1}{2} \ne \int\limits_0^1 f(x)\,dx = 0$.

62.2. Сходимость в среднем

Пусть $f_n(x),\ f(x) \in R\,[a,b]$.

Определение. Будем говорить, что $\{f_n(x)\}$ *сходится в среднем* к $f(x)$, если $\int\limits_a^b |f(x) - f_n(x)|\,dx \to 0$ ($n \to \infty$).

Определение может быть дано для любого интеграла, не только для интеграла Римана. Ясно, что $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_a^b f_n(x)\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx$.

[1] Как показывает следующий пример, предельная функция для последовательности интегрируемых по Риману функций может быть и неинтегрируемой. Пусть r_n – перенумерованные все рациональные числа из отрезка $[0,1]$. Последовательность функций $f_n(x) = \begin{cases} 1, & x = r_i \quad (i = 1, \dots, n), \\ 0, & \text{в остальных точках,} \end{cases}$ сходится к функции Дирихле $D(x)$, неинтегрируемой на $[0,1]$ (см. § 39). (Ред.)

62.3. Сходимость в смысле среднего квадратичного

Определение. Последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится к $f(x)$ *в смысле среднего квадратичного*, если $\int\limits_a^b \{f(x)-f_n(x)\}^2\,dx \to 0$ ($n\to\infty$).

Если $b-a<\infty$, то по неравенству Буняковского (один сомножитель равен 1) (см. § 47)

$$\int\limits_a^b |f(x)-f_n(x)|\,dx \le \sqrt{(b-a)\int\limits_a^b |f(x)-f_n(x)|^2\,dx}\,,$$

откуда следует, что если последовательность сходится в смысле среднего квадратичного, то она сходится в среднем.

3 семестр
Лекция 8
(04.10.68)

Замечание. Пусть $f_n\in C[a,b]$ $\forall n$ и $f_n\to f(x)$ ($n\to\infty$). Как мы уже видели, предельная функция $f(x)$ может оказаться разрывной. Изучение поточечной сходимости непрерывных функций приводит к более широкому классу функций. Функции, являющиеся поточечными пределами непрерывных функций, называются функциями первого класса Бэра. Класс этих функций обозначается B_1, а класс непрерывных функций обозначается также B_0. Аналогично, поточечные пределы функций из n-го класса Бэра образуют класс B_{n+1}.[2] Получается классификация функций Бэра:

$$B_0\subset B_1\subset \ldots \subset B_n\subset \ldots \subset B_\omega \subset \ldots .$$

Пусть $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, $x\in[a,b]$. Такое представление функции может дать средства к ее изучению. Нас будет интересовать

[2] Функция первого класса Бэра непрерывна всюду, кроме множества точек первой категории. В частности, функция первого класса Бэра не может быть разрывной всюду. Таким образом, пример в сноске на с. 350 показывает, что функция Дирихле второго, но не первого класса Бэра.

О классификации Бэра можно прочесть в книге [15] гл. XV и в [9]. Классы Бэра расширяются по существу и нумеруются всеми счетными ординалами (трансфинитами). B_ω, например, занумерован первым бесконечным ординалом и представляет собой класс функций, являющихся пределами последовательностей функций $\{f_n\}$, где $f_n\in B_n$. (Ред.)

возможность почленного интегрирования и дифференцирования рядов: когда $\int\limits_a^x f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_a^x u_n(x)$ и когда $f'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$? Задача сводится к возможности изменения порядка повторного предела. Требуется определить такую сходимость, при которой будут выполняться подобные равенства. Равномерная сходимость, к изучению которой мы переходим, делает законными эти основные операции анализа.

62.4. Равномерная сходимость

Пусть функции $f_n(x)$ определены на множестве $X \subset \mathbb{R}$ и $M \subset X$. Равномерная сходимость – понятие, связанное с последовательностью функций и областью сходимости M .

Определение. Последовательность $\{f_n(x)\}$ *равномерно сходится на множестве* $M \subset X$, если

1) $\forall x \in M \quad \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$;

2) $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N \ \ \forall n \geq N \ \ \forall x \in M \ \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Будем обозначать равномерную сходимость следующим образом: $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ ($x \in M$, $n \to \infty$).

Заметим, что $N = N(\varepsilon)$ и не зависит от x в отличие от поточечной сходимости, там $N = N(\varepsilon, x)$. Мы говорим, что разность $f_n(x) - f(x)$ на множестве M равномерно мала.

Условие 1) – условие простой поточечной сходимости – означает, что

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \forall x \in M \ \ \exists N \ \ \forall n \geq N = N(\varepsilon, x) \ \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon .$$

Условие 2) можно переформулировать так:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N \ \ \forall n \geq N \ \ \sup_{x \in M} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon .$$

Пусть дана последовательность $\{u_n(x)\}$ определенных на X функций и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) = f(x)$ ($x \in X$).

Определение. Говорят, что *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *сходится равномерно на* M, если для последовательности $r_n(x) = f(x) - \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x)$ $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N \ \ \forall n \geq N \ \ \forall x \in M \ \ |r_n(x)| < \varepsilon$.

Иначе говоря, $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n \geq N \quad \sup\limits_{x \in M} |r_n(x)| < \varepsilon$, т.е. $\sup\limits_{x \in M} |r_n(x)| \to 0$ при $n \to \infty$.

Пусть M – конечное множество. Ясно, что если ряд сходится на M, то он и равномерно сходится: для конечного множества эти два понятия сходимости и равномерной сходимости совпадают. Так что интересен случай, когда M – бесконечное множество.

Если ряд равномерно сходится на M_1 и сходится равномерно на M_2, то он равномерно сходится и на $M_1 \bigcup M_2$. Для счетного объединения множеств, на каждом из которых ряд равномерно сходится, это уже неверно.

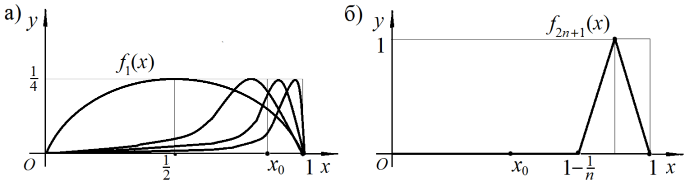


Рис. 14.2. а) $f_n(x) = x^n(1 - x^n)$; б) сходимость с "прилипанием".

Пример. Пусть $f_n(x) = x^n(1 - x^n)$, $x \in [0, 1]$, $n \in \mathbb{N}$ (см. рис. 14.2 а). Так как $f_n(0) = 0$, $f_n(1) = 0$, $0 < f_n(x) \leq x^n \to 0$ при $n \to \infty$, то $f_n(x) \to 0 = f(x)$ для любого $x \in [0, 1]$. Таким образом, последовательность поточечно сходится к тождественно нулевой функции на $[0, 1]$. Положим $r_n(x) = f_n(x) - f(x) = f_n(x)$. В точке $x = \frac{1}{2}$ функция $y_1 = f_1(x) = x(1 - x)$ имеет максимум, равный $\frac{1}{4}$. Тогда для функции $f_n(x)$ максимум будет в точке $x_n = \sqrt[n]{\frac{1}{2}}$, причем $f_n(x_n) = \frac{1}{4}$, т.е. $\max\limits_{x \in [0,1]} r_n(x) = f_n(x_n) = \frac{1}{4}$. Значит, сходимость на $[0, 1]$ неравномерная. Если $M(x_0) = [0, x_0]$, $0 < x_0 < 1$, то для любого $x \in [0, x_0]$ $f_n(x) \leq (x_0)^n \to 0$ при $n \to \infty$. Таким образом, $f_n(x)$ равномерно сходится на $M(x_0) = [0, x_0]$. На $[0, 1)$ равномерной сходимости не будет. $[0, 1) = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \left[0, 1 - \frac{1}{k+1}\right]$, и мы видим, что на объединении множеств равномерная сходимость не сохранилась. (Таким образом, из сходимости на каждом из объединяемых множеств следует сходимость, но не следует равномерная сходимость.)

Пример. Рассмотрим последовательность $\{f_n(x)\}$, для которой

$f_{2n}(x) \equiv 0$ при $0 \le x \le 1$; $f_{2n+1}(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x \le 1 - \frac{1}{n}, \\ 1, & x = 1 - \frac{1}{2n}, \\ 0, & x = 1, \end{cases}$ линейна на $[1 - \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{2n}]$ и на $[1 - \frac{1}{2n}, 1]$ (см. рис. 14.2 б). Для этой последовательности $f_n(x) \to 0$ $\forall x \in [0,1]$ ($n \to \infty$) и $\forall x_0$, $0 \le x_0 < 1$, $\exists N(x_0)$ $\forall n \ge N(x_0)$ $f_n(x_0) = 0$ – такая сходимость последовательности называется сходимостью с "прилипанием". Так как $f_{2n+1}\left(1 - \frac{1}{2n}\right) = 1$, то сходимость на $[0,1]$ неравномерная. На всяком отрезке $[0, 1-\varepsilon]$, $0 < \varepsilon < 1$, последовательность сходится равномерно.

Определение. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называется *абсолютно сходящимся на множестве* M, если на M сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$.

Замечание. Равномерная сходимость ряда не следует из абсолютной сходимости (см. примеры на рисунке 14.2).

Критерий Коши равномерной сходимости последовательностей. *Для того, чтобы последовательность* $\{f_n(x)\}$ *равномерно сходилась на множестве* M, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n, m \ge N \quad \forall x \in M \quad |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon .$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ ($x \in M$, $n \to \infty$), т.е. $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N$ $\forall n \ge N$ $\forall x \in M$ $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ и $\forall m \ge N$ $\forall x \in M$ $|f_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Следовательно, $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ $\forall x \in M$. Достаточность. В каждой точке $x_0 \in M$ последовательность $\{f_n(x_0)\}$ удовлетворяет критерию сходимости Коши для числовых последовательностей. Значит, $f_n(x_0) \to f(x_0)$ ($n \to \infty$). Так как по условию $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N$ $\forall n, m \ge N$ и $\forall x \in M$ $|f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$, то перейдя к пределу при $m \to \infty$, получим $|f_n(x) - f(x)| \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ ($\forall x \in M$). Значит $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ ($x \in M$). ►

Пусть дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ ($x \in M$) и $s_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x)$ ($x \in M$) – его частичные суммы. Равномерная сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ есть равномерная сходимость последовательности частичных сумм этого ряда. Таким образом, ряд сходится равномерно на M тогда и только тогда, когда $\forall\,\varepsilon>0\ \ \exists\,N\ \ \forall\,n,m\ge N$ $\forall\,x\in M\ \ |s_n(x)-s_m(x)|<\varepsilon$. Подставив вместо s_n и s_m их выражения, получим $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{m}u_k(x)\right|<\varepsilon$ ($\forall\,x\in M$) или, если переобозначим индекс суммирования, $\left|\sum\limits_{k=n}^{m}u_k(x)\right|<\varepsilon$, т. е. далекие куски ряда равномерно малы. Следовательно, имеет место

Критерий Коши равномерной сходимости рядов. *Для того, чтобы ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ *равномерно сходился на множестве* M, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\forall\,\varepsilon>0\quad\exists\,N\quad\forall\,n,m\ge N\quad\forall\,x\in M\qquad\left|\sum_{k=n}^{m}u_k(x)\right|<\varepsilon\,.$$

3 семестр
Лекция 9
(09.10.68)

Пусть $f_n(x)\rightrightarrows f(x)$ на отрезке $[a,b]$. Это значит, что $\forall\,\varepsilon>0$ $\exists\,N=N(\varepsilon)\ \ \forall\,n\ge N\ \ \forall\,x\in[a,b]\ \ R_n=\sup\limits_{x\in[a,b]}|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$. Но тогда $f(x)-\varepsilon<f_n(x)<f(x)+\varepsilon\ \ \forall\,n\ge N(\varepsilon)\ \ \forall\,x\in[a,b]$. Геометрически это означает, что значения $f_n(x)$ для всех $x\in[a,b]$ и при достаточно больших $n\ge N(\varepsilon)$ лежат в полоске высотой 2ε (см. рис. 14.3 а, б); в частности, может получиться, например, что в левой части полоски $f_n(x)$ лежат ниже $f(x)$, а в правой – выше, как на рис. 14.3 б).

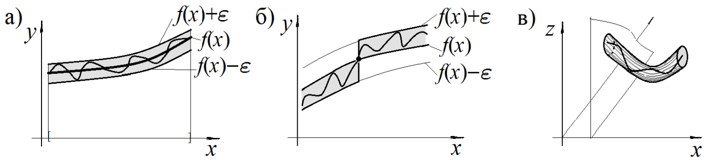


Рис. 14.3. Геометрический смысл равномерной сходимости.

Аналогично, при равномерной сходимости последовательности вектор-функций $g_n(x)\rightrightarrows g(x)$ на отрезке $[a,b]$ ($g(x),g_n(x)$ принимают значения из $\mathbb{R}^2$), значения $g_n(x)$ для всех $x\in[a,b]$ и при достаточно больших $n\ge N(\varepsilon)$ лежат в трубке, сечение которой плоскостью, перпендикулярной оси абсцисс, есть кружок радиуса ε (см. рис. 14.3 в).

Построим метрику такую, чтобы сходимость по метрике была равномерной сходимостью. Рассмотрим множество $\mathcal{M}$ ограниченных на отрезке $[a,b]$ функций. Определим на $\mathcal{M}$ расстояние между двумя функциями формулой

$$\rho(f,g) = \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)| \ .$$

Нетрудно проверить, что это действительно расстояние, выполняются все свойства метрики (см. т. 1 § 47). Такая метрика называется *чебышёвской*. Введение чебышёвской метрики превращает $\mathcal{M}$ в метрическое пространство, в котором сходимость равномерная. Пространство непрерывных на $[a,b]$ функций с чебышёвской метрикой обозначается $C\,[a,b]$. Если $f,g \in C\,[a,b]$, то

$$\rho(f,g) = \max_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)| \ .$$

Аналогично можно определить пространство $C(K)$ на произвольном компакте K .

Понятие равномерной сходимости отображений метрических пространств в точности такое же, как и понятие равномерной сходимости функций. При этом критерий Коши равномерной сходимости остается справедливым в случае, если пространство образов является полным.

§ 63. Признаки равномерной сходимости последовательности функций

63.1. Правильная (регулярная) сходимость функциональных рядов

Пусть на множестве $X \subset \mathbb{R}$ задан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.

Определение. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *правильно сходится на множестве* $M \subset X$, если существует такая числовая последовательность $A_n \geq 0$ $(\forall\, n \in \mathbb{N})$, что

1) $\forall x \in M \quad |u_n(x)| \le A_n \ (\forall n \in \mathbb{N})$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n < \infty$.

Понятие правильной сходимости ввел Вейерштрасс. Это одно из основных понятий в теории функций комплексного переменного.

Обозначим $A_n^* = \sup\limits_{x \in M} |u_n(x)|$. Таким образом, условием правильной сходимости ряда является условие

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x \in M} |u_n(x)| = \sum_{n=1}^{\infty} A_n^* < \infty .$$

Признак Вейерштрасса равномерной сходимости рядов. *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *правильно сходится, то он и равномерно сходится.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если ряд правильно сходится, то он сходится абсолютно, так как $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n(x)| \le \sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n < \infty \ (\forall x \in M)$. Оценим остаток ряда $\sum\limits_{k=n}^{\infty} u_k(x)$. Так как $\sum\limits_{k=n}^{\infty} A_k \to 0 \ (n \to \infty)$, то $\left|\sum\limits_{k=n}^{\infty} u_k(x)\right| \le \sum\limits_{k=n}^{\infty} A_k \to 0 \ (\forall x \in M ,\ n \to \infty)$, откуда следует, что ряд сходится равномерно на M . ▶

Обратная теорема не верна.

Пример. Возьмем $u_n(x) = \frac{(-1)^n}{n}$, $0 \le x \le 1$. Тогда $A_n^* = \frac{1}{n}$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ сходится с одинаковой скоростью для любого x , $0 \le x \le 1$, значит равномерно сходится. Правильной сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ нет, так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n^* = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится.

Замечание. Теорема Вейерштрасса верна, если $u_n : X \to Y$, где X – метрическое пространство, а $Y = \mathbb{R}^n$, и не может быть переформулирована для произвольного метрического пространства Y .

63.2. Признак Дини равномерной сходимости

Пусть $f_n(x) \to f(x) \ (n \to \infty) \ (x \in X \subset \mathbb{R})$. Тогда $r_n(x) \to 0$ $(n \to \infty ,\ x \in X)$. Рассмотрим $r_n(x)$ как функцию от n. Пусть последовательность $r_n(x)$ монотонно сходится, будем это обозначать $r_n(x) \underset{n}{\downarrow} 0$ $(\forall x \in X)$,

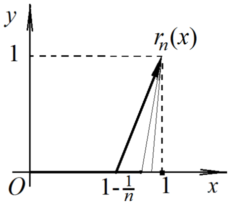


Рис. 14.4.

т.е. $\forall x \in X \quad 0 \le r_{n+1}(x) \le r_n(x) \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Монотонная сходимость не влечет, вообще говоря, равномерной сходимости.

Пример. $X = [0,1]$, $f_n(x) = 0$ на $\left[0, 1-\frac{1}{n}\right]$, $f_n(1) = 1$, а на $\left[1-\frac{1}{n}, 1\right]$ линейно возрастает до 1. Тогда $r_n(x) \to 0$ (см. рис. 14.4), но равномерной сходимости на $[0,1]$ нет. На $[0,1)$ $r_n(x)$ непрерывна, но равномерной сходимости на $[0,1)$ тоже нет.

Теорема Дини о равномерной сходимости. *Пусть K – компактное метрическое пространство, на K задана последовательность $\{f_n(x)\}$ со значениями в $\mathbb{R}$ и $f_n(x) \to f(x)$ $\forall x \in K$ при $n \to \infty$. Пусть $r_n(x) = f(x) - f_n(x) \in C(K)$ и $r_n(x) \underset{n}{\downarrow} 0$ $\forall x \in K$, т. е. $0 \le r_{n+1}(x) \le r_n(x)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ и $\forall x \in K$. Тогда $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на K $(n \to \infty)$.*

Доказательство. Докажем, что $r_n(x) \rightrightarrows 0$ на K $(n \to \infty)$. Пусть x_0 – произвольная точка компакта K. $r_n(x) \in C(x_0)$ и $r_n(x_0) \to 0$ $(n \to \infty)$. Зададим $\varepsilon > 0$. Тогда $\exists n_0 \quad 0 \le r_n(x_0) < \varepsilon$ $\forall n > n_0$. Так как $r_{n_0}(x) \in C(x_0)$, то найдется окрестность $O(x_0)$ такая, что $0 \le r_{n_0}(x) < \varepsilon \quad \forall x \in O(x_0)$. Построив такую окрестность $O(x_0)$ для каждого x_0 из компакта K, получим открытое покрытие $\{O(x_0),\ x_0 \in K\}$ пространства K. K компактно, значит можно выделить из этого покрытия конечное подпокрытие $\{O(x_k),\ k = 1, ..., N\}$. Тогда $\bigcup\limits_{k=1}^{N} O(x_k) = K$ и $0 \le r_{n_k}(x) < \varepsilon \quad \forall x \in O(x_k)$ $(k = 1, 2, ..., N)$. Так как по условию теоремы $r_n(x) \underset{n}{\downarrow} 0$, то $\forall n \ge n_k \quad 0 \le r_n(x) \le r_{n_k}(x) < \varepsilon$ $\forall x \in O(x_k)$ $(k = 1, 2, ..., N)$. Возьмем $n_0(\varepsilon) = \max\limits_{k=1,\ldots,N} n_k$. Так как $n_0(\varepsilon) \ge n_k$ $(\forall k = 1, 2, ..., N)$, то $0 \le r_{n_0(\varepsilon)}(x) \le r_{n_k}(x) < \varepsilon$ $(x \in O(x_k))$. Значит, $0 \le r_{n_0(\varepsilon)}(x) < \varepsilon$ для всех $x \in O(x_k)$ $(k = 1, ..., N)$. Следовательно, $0 \le r_{n_0(\varepsilon)}(x) < \varepsilon$ для любых $x \in K$ и $0 \le r_n(x) \le r_{n_0(\varepsilon)}(x) < \varepsilon$ $(\forall x \in K,\ \forall n \ge n_0(\varepsilon))$. Это означает, что $\{r_n(x)\}$ равномерно сходится к нулю на K при $n \to \infty$, т. е. $f_n(x)$ равномерно сходится к $f(x)$ на K. ►

Замечание. Обычно формулируют частный случай: *пусть* $f_n(x)$ *непрерывны на* K *и сходятся монотонно к непрерывной на* K *функции* $f(x)$. *Тогда* $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ *на* K ($n \to \infty$). В теореме используется только то, что $r_n(x) = f(x) - f_n(x) \in C(K)$.

3 семестр
Лекция 10
(11.10.68)

§ 64. Свойства равномерно сходящихся последовательностей

(переход к пределу, непрерывность, интегрирование, дифференцирование).

64.1. Теорема о предельном переходе

Пусть a – предельная точка множества $X \subset \mathbb{R}$, т.е $a \in X'$, последовательность $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на X ($n \to \infty$) и пусть $\forall n$ $\exists \lim\limits_{x\to a} f_n(x) = A_n$. Обозначим *равномерный предел последовательности функций* $\operatorname*{limunif}\limits_{n\to\infty} f_n(x)$: $f(x) = \operatorname*{limunif}\limits_{n\to\infty} f_n(x)$.

Теорема об изменении порядка предельного перехода. *Пусть a – предельная точка множества X, $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на X ($n \to \infty$) и пусть $\forall n$ существует $\lim\limits_{x\to a} f_n(x) = A_n$. Тогда существует $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$, существует $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ и эти пределы между собой равны:* $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \lim\limits_{x\to a} f(x)$.

Таким образом, в теореме утверждается, что если $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на X ($n \to \infty$), то $\lim\limits_{n\to\infty} \lim\limits_{x\to a} f_n(x) = \lim\limits_{x\to a} \operatorname*{limunif}\limits_{n\to\infty} f_n(x)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Итак, пусть $\operatorname*{limunif}\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ на множестве X.

1. Докажем, что существует $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$. Так как $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на X ($n \to \infty$), то $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N$ $\forall n, m \geq N$ $\forall x \in X$ $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$. Зафиксируем таких два натуральных числа $n, m \geq N$. Перейдя к пределу при $x \to a$, получим $|A_n - A_m| \leq \varepsilon$. Значит $\{A_n\}$ – последовательность Коши и существует $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$. Обозначим $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$.

2. Докажем, что $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$. Оценим разность $|A - f(x)|$:

$$|A - f(x)| \le |A - A_n| + |A_n - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)|\,.$$

Зададим $\varepsilon > 0$. Так как $A_n \to A$ при $n \to \infty$, то $|A - A_n| < \frac{\varepsilon}{3}$ $\forall\, n \ge n_0(\varepsilon)$. Так как $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ при $n \to \infty$, то $\forall\, x \in X$ $\forall\, n \ge n_1(\varepsilon)$ $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Для $|A_n - f_n(x)|$ может и не быть общей окрестности точки a такой, чтобы разность была мала, но достаточно доказать это для одного достаточно большого n. Положим $n_2 = \max\{n_0(\varepsilon),\ n_1(\varepsilon)\}$. Тогда имеем

$$|A - f(x)| \le |A - A_{n_2}| + |A_{n_2} - f_{n_2}(x)| + |f_{n_2}(x) - f(x)|\,.$$

Так как $f_{n_2}(x) \to A_{n_2}$ ($x \to a$), то $\exists\, O(a)$ $\forall\, x \in O(a)\backslash a$ $|A_{n_2} - f_{n_2}(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Значит, для любого $x \in O(a)\backslash a$ получим неравенство $|A - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$, т. е $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$. ►

Замечание. Теорема остается справедливой для функций $f\colon X \to Y$, где X и Y – метрические пространства, если Y полно.

Следствие 1. *Если последовательность функций* $\{f_n(x)\}$ *равномерно сходится к функции* $f(x)$ *на* X, $x_0 \in X$ *и* $f_n(x) \in C(x_0)$ ($\forall\, n \in \mathbb{N}$), *то и* $f(x) \in C(x_0)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если x_0 – изолированная точка, то это утверждение тривиально, так как в изолированной точке всякая функция непрерывна. Если x_0 – предельная точка, то утверждение следует из предыдущей теоремы. ►

Следствие 2. *Предел равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций – непрерывная функция.*

Таким образом, теорема, имеющая локальный характер, так как сформулирована для одной точки, принимает глобальный характер, так как справедлива для каждой точки.

Следствие 3. *Пространство непрерывных функций с чебышёвской метрикой полно.*

Действительно, если последовательность есть последовательность Коши в пространстве непрерывных функций, то по критерию Коши для равномерной сходимости, последовательность равномерно сходится. По предыдущему следствию из теоремы об изменении порядка предельного перехода предел последовательности есть непрерывная функция, т. е. принадлежит пространству непрерывных функций. ►

Следствие 4 для рядов. *Если ряд состоит из непрерывных функций и равномерно сходится, то сумма ряда – непрерывная функция.*

64.2. Пример Ван-дер Вардена непрерывной функции, не дифференцируемой ни в одной точке

Рассмотрим непрерывную функцию $f_0(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le \frac{1}{2}, \\ 1-x, & \frac{1}{2} \le x \le 1, \end{cases}$ $f_0(x+1) = f_0(x)$ (см. рис. 14.5). Положим $f_n(x) = \frac{f_0(4^n x)}{4^n}$ ($n \in \mathbb{N}$).

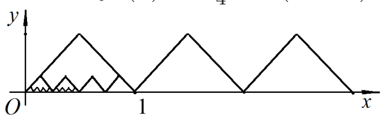


Рис. 14.5. К примеру Ван-дер Вардена.

Угловые коэффициенты этих функций равны ± 1 для всех точек, кроме угловых. Положим $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)$. Этот ряд регулярно (правильно) сходится, так как $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n} < \infty$, значит, по признаку Вейерштрасса, ряд сходится равномерно. Так как функции $f_n(x) \in C\,[0,1]$, то по следствию 4 из теоремы о предельном переходе $f(x) \in C\,[0,1]$.

Пусть x – произвольная точка отрезка $[0,1]$. Докажем, что $f(x)$ не дифференцируема в точке x . Достаточно найти последовательность точек $x_n \to x$ ($n \to \infty$), $x_n \ne x$, таких, что последовательность $\frac{f(x_n)-f(x)}{x_n-x}$ не имеет предела. Возьмем какое-нибудь натуральное n . Функция $f_n(x)$ линейна на отрезках $\left[\frac{s-1}{2\cdot 4^n}, \frac{s}{2\cdot 4^n}\right]$ ($s = 1, 2, \ldots$). Точка $x \in [0,1]$ и лежит на левой или правой половине отрезка $[0,1]$, т. е. $x \in \left[\frac{s_0-1}{2}, \frac{s_0}{2}\right]$, где s_0 равно 1 или 2. Аналогично для всякого $n \in \mathbb{N}$ найдем отрезок вида $\Delta_n = \left[\frac{s_n-1}{2\cdot 4^n}, \frac{s_n}{2\cdot 4^n}\right]$, содержащийся во всех предыдущих и содержащий x , т. е. $x \in \Delta_n \subset \Delta_k$ ($n > k$). Длина отрезка Δ_n есть $\frac{1}{2\cdot 4^n}$. Получим последовательность стягивающихся отрезков

$$\left[\frac{s_0-1}{2}, \frac{s_0}{2}\right] \supset \left[\frac{s_1-1}{2\cdot 4} - \frac{s_1}{2\cdot 4}\right] \supset \ldots .$$

На отрезке Δ_n существует точка x_n такая, что $|x - x_n| = \frac{1}{4^{n+1}}$. Тогда имеем

$$\frac{f(x_n)-f(x)}{x_n-x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_k(x_n)-f_k(x)}{x_n-x} .$$

Рассмотрим разностное отношение $\frac{f_k(x_n)-f_k(x)}{x_n-x}$. Это отношение равно ± 1, если $k \le n$. Функция $f_k(x)$ имеет период $\omega_k = \frac{1}{4^k}$. В частности, функция $f_k(x)$ имеет период $\frac{1}{4^{n+1}}$ при $k > n$. Значит, $f_k(x_n) - f_k(x) = 0$ при $k > n$. Отсюда следует, что так как $x \in \Delta_n \subset \Delta_k$ ($n > k$), то

$$\frac{f(x_n)-f(x)}{x_n-x} = \sum_{k=0}^{n} \frac{f_k(x_n)-f_k(x)}{x_n-x} = \sum_{k=0}^{n} (\pm 1) =$$
$$= \begin{cases} \text{четное число, если } n \text{ нечетное,} \\ \text{нечетное число, если } n \text{ четное.} \end{cases}$$

Но такая последовательность не имеет предела. Так как x – произвольная точка отрезка $[0,1]$, то функция $f(x)$ не дифференцируема ни в одной точке отрезка.

64.3. Интегрируемость

Теорема об интегрируемости предельной функции. *Пусть функции* $f_n(x)$ *определены на отрезке* $[a,b]$, $f_n(x) \in R\,[a,b]$ ($n = 1,2,\ldots$) *и* $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ *на* $[a,b]$ ($n \to \infty$). *Тогда функция* $f(x) \in R\,[a,b]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится равномерно на $[a,b]$, то для всякого $\varepsilon > 0$ имеем оценки

$$\omega\,(f,[\alpha,\beta]) \le \omega\,(f_n,[\alpha,\beta]) + \varepsilon \quad (\forall\, n \ge n_0(\varepsilon)\,,\ \forall\,[\alpha,\beta] \subset [a,b]\,),$$

где $\omega\,(f,\alpha,\beta) = \sup\limits_{x\in[\alpha,\beta]} f(x) - \inf\limits_{x\in[\alpha,\beta]} f(x)$. Тогда, для любого разбиения T отрезка $[a,b]$ имеем

$$\Omega(f,T) \le \Omega(f_n,T) + \varepsilon(b-a) \quad (\forall n \ge n_0(\varepsilon))\,.$$

Так как функции f_n интегрируемы, то по критерию Дарбу (§ 38 с. 168) $\inf\limits_T \Omega(f_n,T) = 0$, следовательно, и $\inf\limits_T \Omega(f,T) = 0$ и, значит, $f(x) \in R\,[a,b]$. ▶

Теорема о переходе к пределу под знаком интеграла. *Пусть функции* $f_n(x)$ *определены на* $[a,b]$, $f_n(x) \in R\,[a,b]$ ($n = 1,2,\ldots$) *и* $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ *на* $[a,b]$ ($n \to \infty$). *Тогда*

$$\varphi_n(x) = \int_a^x f_n(u)\,du \rightrightarrows \varphi(x) = \int_a^x f(u)\,du \quad \text{на} \quad [a,b] \quad (n \to \infty)\,.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. По предыдущей теореме $\forall\, x \in [a,b]$ $\exists \int_a^x f(u)\,du$. Рассмотрим $\varphi_n(x)-\varphi(x)=\int_a^x \{f_n(u)-f(u)\}\,du$. Имеем

$$|\varphi_n(x) - \varphi(x)| \le \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)|\,(b-a) \quad \forall\, x \in [a,b]\,.$$

Правая часть равномерно стремится к нулю при $n \to \infty$. Значит, $\varphi_n(x) \rightrightarrows \varphi(x)$ на $[a,b]$ при $n \to \infty$. ►

Теорема о почленном интегрировании равномерно сходящихся рядов. *Равномерно сходящиеся ряды из интегрируемых функций можно почленно интегрировать.*

Действительно, пусть $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n(x) = f(x)$ и $u_n(x) \in R\,[a,b]$. Так как ряд сходится равномерно на $[a,b]$, то последовательность частичных сумм ряда сходится равномерно на $[a,b]$ к $f(x)$. По теореме об интегрировании равномерно сходящихся последовательностей $f(x) \in R\,[a,b]$ и $\int\limits_a^x \sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n(t)\,dt = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \int\limits_a^x u_n(t)\,dt$. ►

3 семестр
Лекция 11
(16.10.68)

64.4. Дифференцируемость равномерно сходящихся рядов и последовательностей

Пусть функции $f_n(x)$ определены на $[a,b]$, $f_n'(x) \in C\,[a,b]$ ($n \in \mathbb{N}$), $f_n'(x) \rightrightarrows \varphi(x)$ на $[a,b]$ ($n \to \infty$). Пусть $x_0 \in [a,b]$. По теореме об интегрируемости равномерно сходящейся последовательности $\int\limits_{x_0}^x f_n'(t)\,dt \rightrightarrows \int\limits_{x_0}^x \varphi(t)\,dt$ ($n \to \infty$) на $[a,b]$. Следовательно $f_n(x) - f_n(x_0) \rightrightarrows \int\limits_{x_0}^x \varphi(t)\,dt = f(x) - f(x_0)$ ($n \to \infty$), где $f(x)$ – какая-нибудь первообразная функции φ. Накладываем еще одно условие: $f_n(x_0) \to C$ при $n \to \infty$. Так как на $[a,b]$

$$\left| f_n(x) - C - \int\limits_{x_0}^x \varphi_n(t)\,dt \right| \le \left| f_n(x) - f_n(x_0) - \int\limits_{x_0}^x \varphi_n(t)\,dt \right| + |f_n(x_0) - C| \rightrightarrows 0\,,$$

то $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на $[a,b]$ ($n \to \infty$), где $f(x) = C + \int\limits_{x_0}^x \varphi(t)\,dt$.

Таким образом, доказана следующая

Теорема. *Пусть функции* $f_n(x)$ *определены на отрезке* $[a,b]$, $f_n'(x) \in C\,[a,b]$ ($n \in \mathbb{N}$), $f_n'(x) \rightrightarrows \varphi(x)$ *на* $[a,b]$ ($n \to \infty$),

$x_0 \in [a,b]$ и $f_n(x_0) \to C$ при $n \to \infty$. Тогда $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на $[a,b]$ ($n \to \infty$), где $f'(x) = \varphi(x)$ ($f(x) = C + \int\limits_{x_0}^{x} \varphi(t)\,dt$).

Упражнение. Сформулировать и доказать теорему для $f''(x)$.

Если формулируем теорему для $f^{(k)}(x)$ ($k = 2, 3, \ldots$), то требуем сходимости $f_n(x)$ в k точках и равномерной сходимости $f_n^{(k)}(x) \rightrightarrows \varphi_k(x)$ на $[a,b]$ ($n \to \infty$). Тогда $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на $[a,b]$, *где* $f^{(k)}(x) = \varphi_k(x)$ ($k = 2, 3, \ldots$).

Обычно теорема формулируется так.

Пусть функции $f_n(x)$ определены на $[a,b]$ ($n \in \mathbb{N}$), $x_0 \in [a,b]$, $f_n(x_0) \to C$ при $n \to \infty$,

$$
\begin{array}{l}
f'_n(x) \rightrightarrows \varphi_1(x) \text{ на } [a,b] \ (n \to \infty), \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
f_n^{(k)}(x) \rightrightarrows \varphi_k(x) \text{ на } [a,b] \ (n \to \infty),
\end{array}
$$

$f_n^{(k)}(x) \in C\,[a,b]$ ($n \in \mathbb{N}$). Тогда $f_n(x) \rightrightarrows \varphi_0(x)$ на $[a,b]$ ($n \to \infty$), $\varphi_i(x) = \varphi_0^{(i)}(x)$ ($i = 1, \ldots k$).

Действительно, по предыдущей теореме $f_n(x) \rightrightarrows \varphi_0(x)$ *на* $[a,b]$ ($n \to \infty$) и $\varphi'_0(x) = \varphi_1(x)$. Затем следуют $\varphi'_1(x) = \varphi_2(x)$, $\ldots$, $\varphi'_{k-1}(x) = \varphi_k(x) = \varphi_0^{(k)}(x)$.

Замечание. Теорема справедлива и без условия $f_n^{(k)}(x) \in C\,[a,b]$ ($n \in \mathbb{N}$).

Теорема 1 о почленном дифференцировании последовательностей. *Пусть последовательность $f_n(x)$ определена на $[a,b]$ ($n \in \mathbb{N}$), существуют $f'_n(x)$ ($x \in [a,b]$, $n \in \mathbb{N}$), $x_0 \in [a,b]$ и $f_n(x_0)$ имеет конечный предел при $n \to \infty$. Пусть на $[a,b]$ $f'_n(x) \rightrightarrows \varphi(x)$ ($n \to \infty$). Тогда*

1) $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ *на* $[a,b]$ ($n \to \infty$);

2) $\varphi(x) = f'(x)$.

Таким образом, $f'_n(x) \rightrightarrows f'(x)$ на $[a,b]$ ($n \to \infty$), т. е. законно почленное дифференцирование последовательности.

Замечание. Из условий теоремы не следует интегрируемость производной по Риману, следовательно, как предыдущую теорему, эту теорему доказать нельзя.

Доказательство теоремы 1.

1). Докажем, что $\{f_n(x)\}$ удовлетворяет критерию Коши равномерной сходимости. Рассмотрим последовательность $\{f'_n(x)\}$.

По критерию Коши $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists\, N \;\; \forall n, m \geq N \;\; \forall x \in [a,b]$ $|f_n'(x) - f_m'(x)| < \varepsilon$. По формуле Лагранжа

$$|f_n(x) - f_m(x) - \{f_n(x_0) - f_m(x_0)\}| \leq$$
$$\leq |x - x_0| \sup_{[a,b]} |f_n'(x) - f_m'(x)| \leq |x - x_0|\, \varepsilon \quad (n, m \geq N)\,.$$

Значит, для любого x из $[a,b]$

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x_0) - f_m(x_0)| + (b-a)\,\varepsilon \quad (n, m \geq N)\,.$$

По условию $f_n(x_0)$ – числовая последовательность Коши. Следовательно, $|f_n(x_0) - f_m(x_0)| < \varepsilon$ ($n, m \geq N_1$). Возьмем натуральное число $N_2 = \max\{N, N_1\}$. Тогда для любых $n, m \geq N_2$ $|f_n(x) - f_m(x)| \leq (b - a + 1)\,\varepsilon$ ($\forall x \in [a,b]$). Значит, последовательность $\{f_n(x)\}$ удовлетворяет критерию Коши равномерной сходимости и $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на $[a,b]$ ($n \to \infty$).

2). Зафиксируем произвольное x из отрезка $[a,b]$ и докажем, что $f'(x) = \varphi(x)$. Пусть $t \in [a,b]$. Аналогично предыдущему, по формуле Лагранжа для функций $f_n(t) - f_m(t)$ получим

$$|f_n(t) - f_m(t) - \{f_n(x) - f_m(x)\}| \leq |x - t|\, \varepsilon$$

при $n, m \geq N(\varepsilon)$. Обозначим $\psi_n(t) = \frac{f_n(t) - f_n(x)}{t - x}$ ($t \in [a,b] \setminus x$). Докажем, что последовательность $\{\psi_n(t)\}$ равномерно сходится на $[a,b] \setminus x$. Имеем, по выше доказанному неравенству,

$$|\psi_n(t) - \psi_m(t)| = \tfrac{|f_n(t) - f_n(x) - \{f_m(t) - f_m(x)\}|}{|t - x|} \leq \varepsilon$$

$\forall t \in [a,b] \setminus x \;\; \forall n, m \geq N(\varepsilon)$, следовательно, $\{\psi_n(t)\}$ равномерно сходится согласно критерию Коши. Если положить $\psi(t) = \frac{f(t) - f(x)}{t - x}$ для $t \in [a,b] \setminus x$, то видим, что $\psi_n(t) \to \psi(t)$ на $[a,b] \setminus x$ и, следовательно, в силу доказанного, $\psi_n(t) \rightrightarrows \psi(t)$ на $[a,b] \setminus x$. Заметим, что $\lim\limits_{t \to x} \psi_n(t) = f_n'(x)$. По теореме о переходе к пределу для равномерно сходящихся последовательностей

$$\lim_{t \to x} \psi(t) = f'(x) = \lim_{t \to x} \lim_{n \to \infty} \psi_n(t) = \lim_{n \to \infty} \lim_{t \to x} \psi_n(t) = \lim_{n \to \infty} f_n'(x) = \varphi(x).$$

Таким образом, $f'(x) = \varphi(x)$. ►

64.5. Равностепенно непрерывные последовательности функций

Пусть дано семейство функций $\mathcal{F}$ на отрезке $[a,b]$. Равностепенность – свойство одинаковости по отношению к семейству функций.

Определение. Семейство $\mathcal{F}$ функций f, определенных и непрерывных на отрезке $[a,b]$, называется *равностепенно* (*равномерно*) *непрерывным* на отрезке $[a,b]$, если $\forall\,\varepsilon > 0 \ \ \exists\ \delta > 0$ $\forall\, x, x' \in [a,b]$, $|x - x'| < \delta$, $\forall\, f \in \mathcal{F}$ $\ |f(x) - f(x')| < \varepsilon$.

Другими словами,

$$\sup_{f\in\mathcal{F}} \sup_{|x-x'|<\delta} |f(x) - f(x')| = \eta_{\mathcal{F}}(\delta) \to 0 \quad (\delta \to 0).$$

Или иначе, семейство $\mathcal{F}$ называется равностепенно непрерывным на отрезке $[a,b]$, если найдется такая неотрицательная функция $\eta(\delta) \to 0$ ($\delta \to 0$), что $\forall x, x' \in [a,b]$, $|x - x'| < \delta$, $\forall\, f \in \mathcal{F}$

$$|f(x) - f(x')| \le \eta(\delta).$$

Равностепенная непрерывность тесно связана с компактностью.

Множество метрического пространства называется предкомпактным, если его замыкание является компактом.

Теорема Арцела. *Для того, чтобы семейство $\mathcal{F}$ функций, непрерывных на $[a,b]$, было предкомпактным в $C\,[a,b]$, необходимо и достаточно, чтобы $\mathcal{F}$ было на $[a,b]$ равностепенно непрерывным и равностепенно ограниченным*[3] *семейством.*

Доказательство не приводится.

Лемма. *Пусть $f_n(x) \in C\,[a,b]$ и $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на $[a,b]$ ($n \to \infty$). Тогда $\{f_n(x)\}$ равностепенно непрерывна.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда $\exists\, N \ \ \forall\, n \ge N \ \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \ \ \forall\, x \in [a,b]$. Так как $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$ (как предел равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций), то она и равномерно непрерывна на $[a,b]$: $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$, если $|x - x'| < \delta(\varepsilon)$. Тогда $\forall\, n \ge N = N(\varepsilon)$

$$|f_n(x) - f_n(x')| \le |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f(x')| + |f(x') - f_n(x')| < 3\,\varepsilon,$$

---

[3] Вместо равностепенной ограниченности обычно используются термины *равномерная ограниченность* (см., например, [7] с. 110) или *ограниченность в совокупности.* (Ред.)

если $|x-x'| < \delta(\varepsilon)$. Рассмотрим $n = 1, 2, ..., N-1$. Каждая из функций $f_n(x)$ ($n = 1, 2, ..., N-1$) равномерно непрерывна на отрезке $[a,b]$. Значит, $\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\; \delta_1(\varepsilon) > 0 \;\; \forall\, x, x' \in [a,b]$, $|x-x'| < \delta_1(\varepsilon)$, $|f_n(x) - f_n(x')| < \varepsilon$ ($n = 1, 2, ..., N-1$). Положим $\delta_2(\varepsilon) = \max\{\delta(\varepsilon), \delta_1(\varepsilon)\}$. Тогда $|f_n(x) - f_n(x')| \le 3\varepsilon$, если $|x-x'| < \delta_2(\varepsilon)$ ($n = 1, 2, \ldots$). Следовательно, семейство функций равностепенно непрерывно. ►

Для интервала утверждение леммы неверно, так как из непрерывности функции на интервале не следует ее равномерная непрерывность. Из леммы следует, что для равномерно сходящейся на отрезке $[a,b]$ последовательности непрерывных функций условия теоремы Арцела выполняются.

Равностепенная непрерывность есть необходимое, но не достаточное условие равномерной сходимости последовательности. [4]

3 семестр
Лекция 12
(18.10.68)

Рассмотрим семейство $\mathcal{F}$ непрерывных функций, удовлетворяющих условию Липшица порядка α, $0 < \alpha \le 1$, с константой $K \ge 0$, т. е. таких, что $\forall\, x, x' \in [a,b] \;\; |f(x) - f(x')| \le K\,|x-x'|^{\alpha}$, обозначение $f \in \mathrm{Lip}_K\alpha$. Очевидно, если K не зависит от f, то семейство $\mathcal{F}$ равностепенно непрерывно на $[a,b]$, если зависит, то равностепенной непрерывности может не быть.

Важнейший случай $\alpha = 1$. Если $|f'(x)| \le K$ на $[a,b]$, то функция удовлетворяет условию Липшица с константой K: $|f(x) - f(x')| \le K\,|x-x'|$. Тогда, если K одна для всех функций из семейства, то семейство равностепенно непрерывно на $[a,b]$.

Теорема 2 о почленной дифференцируемости последовательности функций. *Пусть функции $f_n(x)$ заданы на отрезке $[a,b]$ и имеют на этом отрезке непрерывные производные. Пусть $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на $[a,b]$ ($n \to \infty$), а последовательность $\{f_n'(x)\}$ равностепенно непрерывна на $[a,b]$. Тогда $f'(x)$ существует, $f'(x) \in C\,[a,b]$ и $f_n'(x) \rightrightarrows f'(x)$ на $[a,b]$ ($n \to \infty$).*

Лемма. *Пусть функция $f(x)$ определена на $[a,b]$ и имеет на $[a,b]$ непрерывную производную $f'(x)$. Пусть $\eta(\delta) \to 0$ ($\delta \to 0$)*

[4] Например, последовательность функций $f_n(x) = x + n$, рассмотренных на отрезке, является равностепенно непрерывной, но расходящейся. Нарушено условие равностепенной ограниченности из теоремы Арцела. (Ред.)

и $|f'(x)-f'(x')| \le \eta(\delta)\ \ \forall\, x, x' \in [a,b]$, $|x-x'| \le \delta$. *Тогда* $\exists\, K$ $\forall\, h$, $0 < h < \frac{b-a}{2}$,

$$\|f'\| \le K\left\{h^{-1}\|f\| + \eta(h)\right\}.$$

Здесь $\|f\| = \max\limits_{[a,b]}|f(x)|$ – норма в C или чебышёвская норма непрерывной на отрезке $[a,b]$ функции.

Таким образом, норма производной оценивается через модуль непрерывности производной и норму функции.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем неравенство для левой половины отрезка, $x \in \left[a, \frac{a+b}{2}\right]$. Так как $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{1}{h}\int\limits_0^h f'(x+t)\,dt$, то $f'(x) - \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{1}{h}\int\limits_0^h f'(x)\,dt - \frac{1}{h}\int\limits_0^h f'(x+t)\,dt$, или

$$f'(x) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \frac{1}{h}\int\limits_0^h \{f'(x) - f'(x+t)\}\,dt.$$

Так как $\frac{1}{h}\int\limits_0^h \{f'(x)-f'(x+t)\}\,dt \le \frac{1}{h}\cdot h\cdot\eta(h)$, то получаем оценку $\|f'(x)\| \le \frac{2}{h}\|f\| + \eta(h)$.

Аналогично для случая $x \in \left[\frac{a+b}{2}, b\right]$. Следовательно, константа K в формулировке леммы может быть взята равной двум. ▶

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 2. Докажем, что $\{f_n'(x)\}$ – последовательность Коши в смысле равномерной сходимости. Согласно лемме $\|f_n' - f_m'\| \le K\left\{h^{-1}\|f_n - f_m\| + \eta(h)\right\}$. Возьмем $\varepsilon > 0$. Подберем $h = h(\varepsilon)$ такое, что $\eta(h) < \frac{\varepsilon}{2}$, и $N(\varepsilon)$ такое, что $\forall\, n, m \ge N(\varepsilon)$ $\|f_n - f_m\| \le h(\varepsilon)\,\frac{\varepsilon}{2}$. Взяв в неравенстве для производных $h = h(\varepsilon)$, получим $\|f_n' - f_m'\| \le K\varepsilon$ ($\forall\, n, m \ge N(\varepsilon)$). Значит, $f_n'(x) \rightrightarrows \varphi(x)$ на $[a,b]$ ($n \to \infty$) ($\varphi(x)$ – непрерывная функция). Согласно теореме 1 о дифференцировании последовательности $f'(x) = \varphi(x)$. ▶

Следствие. *Пусть для функций* $f_n(x)$ *выполняются условия*: $|f_n''(x)| \le K\ \ \forall\, x \in [a,b]\ \ \forall\, n \in \mathbb{N}$ *и* $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ *на* $[a,b]$. *Тогда* $f_n'(x) \rightrightarrows f'(x)$ *на* $[a,b]$ ($n \to \infty$).

Замечание. Если вторая производная функции f ограничена, то $\eta(h) = h\,\|f''\|$ и из леммы получаем $\|f'\| \le K\left\{h^{-1}\|f\| + h\,\|f''\|\right\}$. Это неравенство можно обобщить на случай функции f, определенной на $(-\infty, \infty)$, в этом случае $\|f\| = \sup\limits_x |f(x)|$. Неравенство $\|f'\| \le K\left\{h^{-1}\|f\| + h\,\|f''\|\right\}$ справедливо для любого h,

$0 < h < \frac{b-a}{2}$, значит верно для любого $h > 0$, верно и тогда, когда правая часть, как функция от h, имеет минимум, т.е. при $h = \sqrt{\frac{\|f\|}{\|f''\|}}$. Отсюда следует частный случай неравенств Колмогорова

$$\|f'\| \le 2K(\|f\| \cdot \|f''\|)^{\frac{1}{2}} .$$

Результаты о почленном дифференцировании функциональных последовательностей сформулируем на языке рядов.

Теорема 1*. *Пусть ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *сходится в точке* $x_0 \in [a,b]$ *и ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ *равномерно сходится к функции* $\varphi(x)$ *на* $[a,b]$. *Тогда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *равномерно сходится к функции* $f(x)$ *на* $[a,b]$ *и* $\varphi(x) = f'(x)$.

Теорема 2*. *Пусть* $u_n''(x)$ *существуют на* $[a,b]$, *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *равномерно сходится к* $f(x)$ *на* $[a,b]$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|u_n''\| < \infty$. *Тогда ряд из производных* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ *равномерно сходится к* $f'(x)$ *на* $[a,b]$.

Теорема 1* является прямым аналогом теоремы 1 для функциональных последовательностей, а теорема 2* – ослабленным аналогом следствия теоремы 2 о почленном дифференцировании функциональных последовательностей. Если переформулировать это следствие дословно, то вместо условия $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|u_n''\| < \infty$ нужно взять условие $\left\| \sum\limits_{n=1}^{N} u_n'' \right\| < K$ ($N = 1, 2, \dots$).

Замечание. Пусть последовательности $\{f_n(x)\}$ и $\{g_n(x)\}$ равномерно сходятся на множестве M: $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$, $g_n(x) \rightrightarrows g(x)$ ($n \to \infty$). Равномерная сходимость обладает свойством линейности: $f_n(x) + g_n(x) \rightrightarrows f(x) + g(x)$ и $kf_n(x) \rightrightarrows kf(x)$ на M ($n \to \infty$). Вопрос о равномерной сходимости последовательности $\{f_n(x)\, g_n(x)\}$ в общем случае зависит от M. На компактном множестве $\{f_n(x)\, g_n(x)\}$ будет сходится равномерно: $f_n(x)\, g_n(x) \rightrightarrows f(x)\, g(x)$ ($n \to \infty$). В случае, если функции $\{f_n(x)\}$ или $\{g_n(x)\}$ равностепенно ограничены на M, равномерная сходимость произведений этих функций доказывается также, как соответствующая теорема теории пределов. Если же $g_n(x) = g(x)$ и функция g неограничена на M, то хотя и $f_n(x)\,g(x) \to f(x)\,g(x)$ $(n \to \infty)$, но равномерной сходимости может не быть.

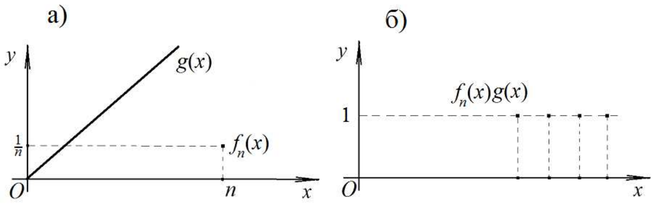


Рис. 14.6.

Пример. Пусть $M = [0, \infty)$, $f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & x = n, \\ 0, & x \neq n. \end{cases}$ Последовательность $f_n(x) \rightrightarrows 0$ на M $(n \to \infty)$ (см. рис. 14.6 а). Возьмем функцию $g(x) = x$. Последовательность $f_n(x)g(x) = \begin{cases} 1, & x = n, \\ 0, & x \neq n, \end{cases}$ не будет равномерно сходящейся на M (из-за неограниченности функции g) (см. рис. 14.6 б).

§ 65. Степенные ряды

65.1. Сходимость степенных рядов

Определение. *Степенным рядом* называется ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n .$$

Мы будем рассматривать случай $c_n \in \mathbb{R}$.

Степенной ряд заменой переменной легко привести к ряду вида $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$.

Замечание. Существуют множества на $[a, b]$ такие, что не существует ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n(x)$, $u_n(x) \in C\,[a, b]$, сходящегося на таком множестве и расходящегося на его дополнении. [5)]

Мы увидим, что для степенных рядов $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ областью сходимости может быть только одно из множеств следующего вида: одна точка 0, интервал $(-R, R)$, полуинтервал $(-R, R]$ или $[-R, R)$, отрезок $[-R, R]$ или вся числовая прямая. Для комплексных степенных рядов $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, где $c_n, z \in \mathbb{C}$, областью сходимости является круг (он может вырождаться в точку или совпасть со всей комплексной плоскостью), в точках границы которого может быть как сходимость, так и расходимость. Подмножеств единичной окружности больше, чем степенных рядов. [6)] Поэтому не всякое множество на границе круга сходимости может быть областью сходимости именно на границе круга сходимости. Здесь отличие от действительного случая.

3 семестр
Лекция 13
(23.10.68)

Определение. Такое значение R, $0 \le R \le +\infty$, что для x, $|x| < R$, степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ сходится, а для x, $|x| > R$ – расходится, называется *радиусом сходимости* степенного ряда, а интервал $(-R, R)$ – *интервалом сходимости*.

Справедлива следующая

Лемма. *Пусть дан ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, $x_0 \ne 0$, *и ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x_0^n$ *схо-*

[5)] Известно, что множество точек сходимости последовательности непрерывных функций или ряда непрерывных функций на отрезке (даже на полном метрическом пространстве) имеет тип $F_{\sigma\delta}$ (см. [26] задача 4.30, с. 71). Следовательно, для построения примера достаточно указать множество, не являющееся множеством типа $F_{\sigma\delta}$. Существование таких множеств среди борелевских множеств доказывается в книге [9], а среди измеримых по Лебегу множеств в [2] (пример 17 с. 128). (Ред.)

[6)] Степенных рядов континуум, потому что степенной ряд полностью определяется своими коэффициентами. Действительно, коэффициентов степенного ряда счетное множество: $c_0, c_1, ..., c_n, ...$, и каждый коэффициент может принимать любое комплексное значение, а комплексных чисел, как и действительных – континуум. Точек границы – окружности – тоже континуум, а подмножеств множества мощности континуум больше континуума (теорема Кантора, см. [7] глава I "элементы теории множеств с.26). (Ред.)

дится. Тогда для любого x, $|x| < |x_0|$, *ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ *абсолютно сходится, т.е.* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |c_n x^n| < \infty$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x_0^n$ следует, что $c_n x_0^n \to 0$ ($n \to \infty$). Значит, $|c_n x_0^n| \le M$ ($n = 0, 1, \dots$) и, так как $|x| < |x_0| \ne 0$, то

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n x^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n x_0^n| \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \le M \sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{x}{x_0}\right|^n < \infty .$$

(Неравенство для рядов понимаем так, что при суммировании до любого конечного числа N все неравенства справедливы, а затем произведен переход к пределу при $N \to \infty$.) ►

Обратим внимание, что в лемме утверждается абсолютная, но не равномерная сходимость.

Теорема о радиусе и интервале сходимости степенного ряда. *Пусть дан степенной ряда* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ *и* X *– его область сходимости. Тогда*

1) $0 \in X$, *т. е.* $X \ne \varnothing$;

2) *радиус сходимости* R *степенного ряда* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ *равен* $\sup\limits_{x \in X} |x|$ ($0 \le R \le +\infty$).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ сходится к нулю при $x = 0$, то $0 \in X$. Таким образом, для любого степенного ряда $X \ne \varnothing$. Далее, для $R = \sup\limits_{x \in X} |x|$ имеем $0 \le R \le \infty$. Если $R = 0$, то область сходимости ряда состоит из единственной точки 0. Если $R \ne 0$ и $|x| < R$, то по определению верхней грани найдется $x_0 \in X$ такое, что $|x| < |x_0|$, следовательно, по лемме $x \in X$. Если $R = \infty$, то отсюда следует, что ряд всюду сходится и, следовательно, $X = (-\infty, \infty)$. Пусть теперь $0 < R < \infty$. Если $|x| > R$, то $x \notin X$. Следовательно, степенной ряд сходится при $|x| < R$ и расходится при $|x| > R$, т. е. $(-R, R)$ – его интервал сходимости. ►

Покажем, что каждый возможный случай области сходимости степенного ряда реализуется.

Пусть $0 < R < \infty$, при этом рассмотрим также точки $x = \pm R$.

Заменой $x \to Ry$ этот случай можно свести к случаю $R = 1$. Поэтому, без ограничения общности будем считать, что $R = 1$. Тогда области сходимости могут быть следующих четырех видов (см. рис. 14.7.1), на каждый из которых приведем примеры.

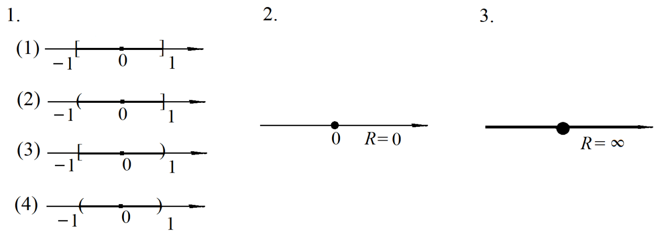


Рис. 14.7. Виды областей сходимости степенных рядов.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$, $X = [-1, 1]$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n}$, $X = (-1, 1]$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$, $X = [-1, 1)$;

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n$, $X = (-1, 1)$.

Приведем примеры рядов с $R = 0$ и $R = \infty$.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n! x^n$ имеет радиус сходимости $R = 0$ и область сходимости – точку 0 (рис. 14.7.2).

Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ имеет радиус сходимости $R = \infty$ и интервал сходимости $(-\infty, \infty)$ (рис. 14.7.3). ▶

Теперь рассмотрим вопрос о том, как вычислить радиус сходимости степенного ряда.

Теорема (формула Коши – Адамара). *Пусть дан степенной ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$. *Обозначим* $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|} = \rho$, $0 \le \rho \le \infty$. *Тогда радиус сходимости степенного ряда* $R = \frac{1}{\rho}$ *(при этом считаем, что* $\frac{1}{\infty} = 0$, $\frac{1}{0} = \infty$ *), т. е.*

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим наряду с рядом $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |c_n|\, x^n$. У этих рядов радиусы сходимости равны (верхняя грань множества $|x|$, где ряд сходится и абсолютно сходится, одна и та же). К ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |c_n x^n|$ применим признак сходимости Коши, который можно переформулировать в терминах верхнего предела: пусть дан ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$, $a_n \geq 0$; тогда, если $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ \sqrt[n]{a_n} < 1$, то ряд сходится, если $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ \sqrt[n]{a_n} > 1$, то ряд расходится. Для ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |c_n x^n|$ это значит, что если $|x|\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ \sqrt[n]{|c_n|} < 1$, то ряд сходится, если $|x|\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ \sqrt[n]{|c_n|} > 1$, то ряд расходится. Отсюда и следует, что $R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ \sqrt[n]{|c_n|}}$. ►

Теорема (первая теорема Абеля о равномерной сходимости степенного ряда). *Пусть степенной ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ *сходится в точке* $x_0 \neq 0$ *и* $a = |x_0|$. *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ *равномерно сходится на отрезке* $[-a+\varepsilon, a-\varepsilon]$, *другими словами, ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ *равномерно сходится на всяком отрезке* $[\alpha,\beta] \subset (-a,a)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По лемме для любого x такого, что $|x| \leq a - \varepsilon = |x_0| - \varepsilon$, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ сходится абсолютно. Оценим остаток ряда в этой области. Так как сходимость ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x_0^n$ влечет сходимость к нулю его членов и, следовательно, их ограниченность $|c_n x_0^n| \leq M$ $(\forall\, n \in \mathbb{N})$, то

$$\left|\sum_{n=N}^{\infty} c_n x^n\right| \leq \sum_{n=N}^{\infty} |c_n x_0^n| \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \leq M \sum_{n=N}^{\infty} \left(\frac{|x_0|-\varepsilon}{|x_0|}\right)^n$$

$\forall x,\ |x| \leq |x_0| - \varepsilon$. Значит, сходимость является равномерной. ►

Следствие. *Сумма ряда* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n = f(x)$ *непрерывна на его интервале сходимости* $(-R,R)$.

На любом отрезке, содержащемся в интервале сходимости степенной ряд равномерно сходится, но на всей области сходимости он может и не сходиться равномерно.

Пример. Для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}$ область сходимости есть $(-1,1]$. Этот ряд не будет равномерно сходящимся во всей области сходимости $(-1,1]$, так как для него не выполняется критерий Коши равномерной сходимости.

Степенной ряд не обязан равномерно сходиться на своей области сходимости. Однако следующая теорема показывает, что он равномерно сходится на всяком отрезке, содержащемся в области сходимости.

Теорема (вторая теорема Абеля о равномерной сходимости степенного ряда). *Пусть ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ *сходится в точке* $x_0 \neq 0$. *Тогда он равномерно сходится на отрезке* $[0,x_0]$, *если* $x_0>0$, *или на отрезке* $[x_0,0]$, *если* $x_0<0$.

Доказательство. Пусть для определенности $x_0>0$. Пусть $\alpha_n(x)\geq 0$, $\alpha_n(x)\underset{n}{\downarrow}$ и $0\leq \alpha_0(x)\leq M \quad \forall x\in[0,x_0]$. Тогда, если ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$ сходится, то ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\alpha_n(x)\,u_n$ равномерно сходится на $[0,x_0]$. Доказательство этого утверждения для функциональных рядов [7] аналогично доказательству признака Абеля для числовых рядов.

Пусть ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x_0^n$ сходится. Докажем, что $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ равно-

---

[7] Обозначим $s_n=\sum\limits_{k=0}^{n}u_k$, $t_n=\sum\limits_{k=0}^{n}\alpha_k(x)u_k$. Как и в числовом случае (см. п. 59.6 с. 325) имеем $t_n=\sum\limits_{k=0}^{n-1}s_k\,(\alpha_k(x)-\alpha_{k+1}(x))+\alpha_n s_n$.

Заменим s_k на s_k-s+s, где $s=\sum\limits_{n=0}^{\infty}u_n$, и перепишем t_n в виде $t_n=\sum\limits_{k=0}^{n-1}(s_k-s)\,(\alpha_k(x)-\alpha_{k+1}(x))+s(\alpha_1(x)-\alpha_n(x))+\alpha_n(x)s_n$. Для $n>m$ имеем $t_n-t_m=\sum\limits_{k=m}^{n-1}(s_k-s)\,(\alpha_k(x)-\alpha_{k+1}(x))+(s_n-s)\alpha_n(x)-(s_m-s)\alpha_m(x)$. Оценим $|t_n-t_m|$, подобно тому, как это делалось в числовом случае. Из сходимости s_n к s и из ограниченности и монотонности $\alpha_n(x)$ следует, что при больших m,n эта разность мала равномерно по x и, следовательно, по критерию Коши ряд равномерно сходится. (Ред.)

мерно сходится на $[0,x_0]$. Имеем $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{x_0}\right)^n c_n x_0^n$. Положим $\alpha_n(x) = \left(\frac{x}{x_0}\right)^n$. Тогда $0 \le \alpha_n(x) = \left(\frac{x}{x_0}\right)^n \le 1$ на отрезке $[0,x_0]$ и $\alpha_n(x)\underset{n}{\downarrow}$. Находимся в условиях, когда применима теорема Абеля для функциональных рядов, рассмотренная в начале доказательства теоремы. Следовательно, ряд сходится равномерно на отрезке $[0,x_0]$. ►

Из этой теоремы следует, что сумма степенного ряда является непрерывной функцией на всей его области сходимости.

3 семестр
Лекция 14
(25.10.68)

Следствие. *Пусть степенной ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ *сходится в точке* $x_0 \ne 0$ *и* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x_0^n = A$. *Тогда функция* $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ *непрерывна на* $(-x_0, x_0]$ *(если* $x_0 > 0$*) и* $f(x) \to A$ *при* $x \to x_0 - 0$.

Это следствие позволяет исследовать сходимость ряда Тейлора только внутри интервала сходимости. Пусть ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ является рядом Тейлора функции $f(x)$ и сходится к этой функции внутри интервала сходимости при $|x| < R$. Пусть, например, $f(x)$ непрерывна в точке $x_0 = R$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ сходится к числу A в этой точке, тогда $f(R) = A$. Для выяснения того, сходится ли ряд Тейлора к функции внутри интервала сходимости, надо было исследовать, сходится ли к нулю остаточный член ряда Тейлора. При исследовании сходимости на концах интервала сходимости достаточно исследовать сходимость самого ряда на концах этого интервала. Если функция $f(x)$ не имеет предела при $x \to x_0 - 0$, то сходимости ряда Тейлора в точке x_0 нет, так как иначе существовал бы конечный предел $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$.

Пример. Ряд Тейлора функции $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = f(x)$ сходится для всех x таких, что $|x| < 1$. В точках $x = \pm 1$ ряд Тейлора для этой функции расходится, так как $\lim\limits_{x \to \pm 1} f(x) = +\infty$.

Теорема. *Интегрирование и дифференцирование степенного ряда не меняют радиуса сходимости этого ряда.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из формулы Коши – Адамара легко видеть, что интегрирование и дифференцирование степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ не меняет его радиуса сходимости R и интервала сходимости $(-R, R)$. Например, для продифференцированного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n-1]{n\,|c_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n-1]{n} \cdot \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}$$

и, следовательно, радиусы сходимости рядов $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}$ равны. Аналогично для проинтегрированного ряда. ▶

Из теорем о почленном интегрировании и дифференцировании функциональных рядов следует, что если $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n = f(x)$ на $[a, b]$, то $\int\limits_a^x f(t)dt = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ для $x \in [a, b]$ и $f'(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} n c_n x^{n-1}$ для $x \in [a, b)$ (если последний ряд сходится в точке $x = b$, то равенство справедливо и в точке b).

Таким образом, сумма степенного ряда с непустым интервалом сходимости представляет собой бесконечно дифференцируемую в интервале сходимости функцию, т. е. если $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, то $f(x) \in C^{\infty}(-R, R)$. Степенной ряд можно почленно дифференцировать бесконечное число раз.

Теорема единственности для степенных рядов. *Если два степенных ряда имеют одну и ту же сумму на некотором интервале $(-r, r)$, то они совпадают.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, $x \in (-r, r)$, $r > 0$. Тогда $\sum\limits_{n=k}^{\infty} n(n-1)...(n-k+1) c_n x^{n-k} = f^{(k)}(x)$, $x \in (-r, r)$. Положив $x = 0$, получим равенство $k!\, c_k = f^{(k)}(0)$, откуда $c_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$ и $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$. Таким образом, если два степенных ряда на каком то интервале представляют одну функцию, то коэффициенты их равны (получаются по одной формуле), и следовательно, ряды совпадают. ▶

Таким образом, мы доказали теорему Бореля:

Теорема Бореля. *Всякий степенной ряд с непустым интервалом сходимости есть ряд Тейлора своей суммы.*

Как мы знаем, для того, чтобы для функции $f(x)$, определенной на интервале $(-\delta,\delta)$, написать ряд Тейлора $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$, необходимо и достаточно, чтобы $f(x)\in C^{\infty}(0)$. Тогда $\forall n \ \ \exists\delta_n$ $\forall x\in(-\delta_n,\delta_n) \ \ \exists f^{(n)}(x)$. Для бесконечно дифференцируемой в нуле функции интервалы $(-\delta_n,\delta_n)$ могут сжиматься к нулю. Рассмотрим задачу: для всякой ли последовательности $\{a_n\}$ существует функция $f\in C^{\infty}(0)$ такая, что $a_n=f^{(n)}(0)$. Надо построить такую функцию. Рассмотрим степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}x^n$. Если радиус сходимости этого ряда $R\neq 0$, то в силу теоремы Бореля, для функции $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}x^n$ выполняются равенства $a_n=f^{(n)}(0)$. Таким образом, получается решение задачи в случае $R\neq 0$.

Пример. Для ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n$ область сходимости $X=(-1,1)$; при интегрировании получим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ с областью сходимости $X_1=[-1,1)$; проинтегрировав еще раз получим ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n(n-1)}$ с областью сходимости $X_2=[-1,1]$.

Таким образом, при почленном интегрировании степенного ряда область сходимости может увеличиться. Следовательно, и при дифференцировании область сходимости может измениться. Докажем это свойство степенных рядов.

Свойство. *При почленном интегрировании степенного ряда область сходимости может увеличиться на одну или две точки, а при дифференцировании – может уменьшиться на одну или две точки.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nx^n$ сходится в точке x. Тогда для почленно проинтегрированного ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{n+1}x^{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x}{n+1}c_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}\mu_nc_nx^n\,,$$

где $\mu_n=\frac{x}{n+1}$, следовательно, μ_n монотонно убывает (или возрастает) к 0. Значит, по теореме Абеля или Дирихле проинтегрированный ряд тоже сходится в точке x, т. е. область сходимости не уменьшилась. Очевидно, что увеличиться область сходимости проинтегрированного ряда может только на один или оба конца интервала сходимости.

Рассмотрим теперь продифференцированный ряд. По отношению к нему исходный ряд является проинтегрированным, и, по доказанному, область сходимости исходного ряда может оказаться больше на одну или две точки. Следовательно, область сходимости продифференцированного ряда может только уменьшиться на одну или две точки. ►

Область сходимости может и не меняться как при интегрировании, так и при дифференцировании.

Пример. Рассмотрим степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^{\sqrt{n}} x^n$. Радиус сходимости этого ряда $R = 1$, так как $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^{\sqrt{n}}} = 1$. Так как $\frac{2^{\sqrt{n}}}{n^k} \to \infty$ ($n \to \infty$), то при любом числе интегрирований область сходимости ряда не будет изменяться, так как в точках ± 1 проинтегрированные ряды будут продолжать расходиться. Аналогично при любом числе дифференцирований сходимость ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^{-\sqrt{n}} x^n$ в точках ± 1 сохранится.

65.2. Теорема Вейерштрасса о приближении непрерывных функций многочленами

Мы уже говорили, что при помощи степенных рядов можно изображать и изучать узкий класс функций – аналитические функции. Теперь мы хотим найти аппарат для изучения произвольных непрерывных функций. Рассмотрим представление функции в виде ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} P_n(x)$, где

$$P_n(x) = a_0^{(n)} x^n + a_1^{(n)} x^{n-1} + \ldots + a_n^{(n)},$$

т. е. n-й член ряда зависит не от одного, как в случае степенного ряда, а от $n+1$ параметра.

Теорема Вейерштрасса о приближении непрерывных функций многочленами. *Для любой непрерывной функции $f(x) \in C(-\infty, +\infty)$ существует последовательность многочле-*

нов $\{P_n(x)\}$ *такая, что на любом отрезке* $[-X, X]$ $P_n(x) \rightrightarrows f(x)$ ($n \to \infty$).

Отсюда следует стандартная формулировка теоремы, которая лежит в основе классической теории приближения функций:

Теорема Вейерштрасса о приближении на отрезке непрерывных функций многочленами. *Если* $f(x) \in C[a, b]$, *то существует последовательность многочленов* $\{P_n(x)\}$ *такая, что* $P_n(x) \rightrightarrows f(x)$ *на* $[a, b]$ ($n \to \infty$).

Действительно, непрерывную функцию, заданную на отрезке $[a, b]$, мы можем продолжить так, что она будет непрерывна на всей числовой прямой, и применить теорему Вейерштрасса в первой формулировке. Но следует заметить, что из второй теоремы первая также легко следует. Действительно, если $f(x) \in C(-\infty, +\infty)$, то $f(x)$ непрерывна на $[-n, n]$ для всякого натурального n и, в силу второй теоремы, можно найти полином $P_n(x)$ такой, что $|f(x) - P_n(x)| < \frac{1}{n}$ на $[-n, n]$. Тогда последовательность полиномов $\{P_n(x)\}$ равномерно сходится к f на всяком конечном отрезке. Отсюда следует, что выполняется утверждение первой теоремы. Поэтому далее будем доказывать теорему для функций непрерывных на отрезке.

Покажем, что с помощью теоремы Вейерштрасса мы получим положительный ответ на поставленный в начале параграфа вопрос о представлении произвольной непрерывной функции рядом из многочленов.

Рассмотрим $C[a, b]$ – пространство непрерывных функций с чебышёвской метрикой

$$\rho_C(f, g) = \|f - g\|_C = \max_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|.$$

Теорема Вейерштрасса утверждает, что множество $\{P\}$ всех многочленов на $[a, b]$ всюду плотно в $C[a, b]$.

Рассмотрим $\{P(\mathbb{Q})\}$ – множество всех многочленов с рациональными коэффициентами. Множество $\{P(\mathbb{Q})\}$ счетно и всюду плотно в $\{P\}$, т.е. $\forall p \in \{P\}$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists p' \in \{P(\mathbb{Q})\}$, отстоящий от p на малое расстояние: $\rho_C(p, p') < \varepsilon$. Таким образом, в пространстве $C[a, b]$ существует счетное всюду плотное подмножество $\{P(\mathbb{Q})\}$. Это означает, что пространство $C[a, b]$ с чебышёвской метрикой является сепарабельным пространством.

Пусть $f(x) \in C[a, b]$. В силу теоремы Вейерштрасса найдется последовательность многочленов $P_n(x)$, равномерно сходящаяся к $f(x)$ на $[a,b]$. Положим $q_n(x) = P_n(x) - P_{n-1}(x)$. Тогда частичные суммы ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q_n(x)$ равны $\sum\limits_{n=0}^{N} q_n(x) = P_N(x)$ и, следовательно, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q_n(x)$ сходится к $f(x)$ равномерно на $[a,b]$. Таким образом, произвольная непрерывная на отрезке функция может быть изображена равномерно сходящимся рядом из многочленов.

Доказательство теоремы Вейерштрасса (Лебег [8]). **1.** Рассмотрим функцию

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \tfrac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}{1\cdot 2}x^2 + \dots .$$

Этот ряд сходится при $|x| < 1$. Если ряд сходится в точках $x = \pm 1$, то по второй теореме Абеля для степенных рядов верно и равенство в этих точках, так как в этих точках функция непрерывна (см. следствие, п. 65.1 с. 376). При $x = -1$ ряд

$$1 - \tfrac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}{2!} - \dots + (-1)^k \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\dots\left(\frac{1}{2}-k+1\right)}{k!} + \dots$$

сходится по признаку Гаусса (§ 59.7 с. 329), так как

$$\left|\frac{u_k}{u_{k+1}}\right| = \left|\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\dots\left(\frac{1}{2}-k+1\right)}{k!} : \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\dots\left(\frac{1}{2}-k\right)}{(k+1)!}\right| =$$
$$= \frac{k+1}{k-(1/2)} = 1 + \frac{3}{2k-1} = 1 + \frac{3}{2k-1} + O\left(\frac{1}{k^2}\right).$$

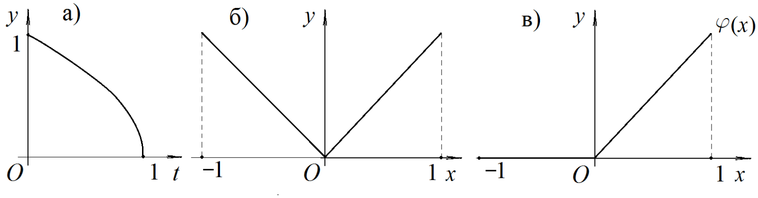


Рис. 14.8. а) $y = \sqrt{1-t}$; б) $y = |x| = \sqrt{x^2}$; в) $y = \varphi(x) = \frac{1}{2}(x+|x|)$.

Следовательно, функция $\sqrt{1-t}$ (рис. 14.8 а) раскладывается в степенной ряд $\sqrt{1-t} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n t^n$, сходящийся равномерно на отрезке $[0,1]$.

[8] См. [10]. Разные доказательства теоремы Вейерштрасса, в том числе приведенное здесь доказательство Лебега, и другие, связанные с теоремой, вопросы обсуждаются в статье [25] § 4. (Ред.)

3 семестр
Лекция 15
(30.10.68)

Заметим, что у функции $y = \sqrt{1-t}$ в точке $t = 1$ нет конечной производной. Этот пример показывает, что теорема о бесконечной дифференцируемости суммы степенного ряда внутри интервала сходимости неверна для граничных точек, даже в случае сходимости в них. Теорема для интервала сходимости на область сходимости не распространяется.

Сделаем замену $1 - t = x^2$, тогда изменению x на отрезке $[-1, 1]$ соответствует изменение t на отрезке $[0, 1]$. После подстановки в ряд для $\sqrt{1-t}$ получим $|x| = \sqrt{x^2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n \left(1 - x^2\right)^n$.
Этот ряд равномерно сходится на $[-1, 1]$, так как максимум n-го остатка $R_n(x_0)$ этого ряда будет равен максимуму n-го остатка $r_n(t_0)$ ряда $\sqrt{1-t} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n t^n$, где $1 - t_0 = x_0^2$. Для исследования сходимости функции $|x|$ в точке $x = 0$ необходимо было исследовать функцию $\sqrt{1-t}$ в точке $t = 1$. Каждый член полученного ряда для $|x|$ есть многочлен степени $2n$.

Теперь мы можем разложить в ряд функцию (рис. 14.8 в) $\varphi(x) = \begin{cases} 0, & -1 \le x \le 0, \\ x, & 0 \le x \le 1. \end{cases}$ Действительно,

$$\varphi(x) = \tfrac{1}{2}\left(x + |x|\right) = \tfrac{A_0}{2} + \tfrac{x}{2} + \tfrac{A_1}{2}\left(1 - x^2\right) + 0 + \tfrac{A_2}{2}\left(1 - x^2\right)^2 + 0 + \ldots .$$

Следовательно, функция $\varphi(x)$ на отрезке $[-1, 1]$ раскладывается в равномерно сходящийся ряд многочленов

$$\varphi(x) = \tfrac{1}{2}\left(x + |x|\right) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n p_n(x) .$$

2. Рассмотрим функции вида $\varphi(x-a)$, где $0 \le a \le 1$ (см. рис. 14.9). Так как функция $\varphi(x)$ рассматривается на отрезке $[-1, 1]$, то область определения $\varphi(x - a)$ содержит отрезок $[0, 1]$. Покажем, что всякая ломаная на отрезке $[0, 1]$ с изломами в точках a_k может быть записана как $\Phi(x) = \sum\limits_{k=1}^{N} c_k \varphi\left(x - a_k\right) + c_0$.

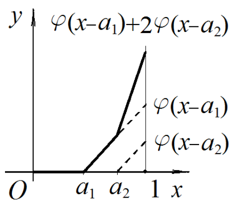


Рис. 14.9.

Зададим

$\Phi(0)=c_0$, ($a_1=0$);

$\Phi(x)-c_0=c_1\varphi(x)$ на отрезке $[a_1,a_2]$;

$\Phi(x)-c_0-c_1\varphi(x)=c_2\varphi(x-a_2)$ на отрезке $[a_2,a_3]$.

Таким образом мы определим функцию $\Phi(x)$ на отрезке $[0,a_3]$. Рассматривая следующий отрезок $[a_3,a_4]$, достраиваем функцию, не портя ее на предыдущих отрезках (так как следующие слагаемые равны нулю на предыдущих отрезках). И так далее. Следовательно, всякая ломаная на $[0,1]$ может быть записана как $\Phi(x)$ (рис. 14.10 а).

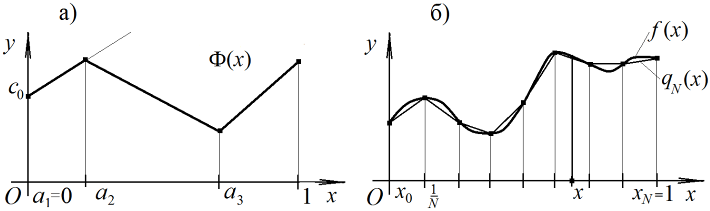


Рис. 14.10. а) Функция $\Phi(x)$. б) Приближение непрерывной ломаными.

Теперь покажем, что любую функцию $f(x)\in C\,[0,1]$ можно как угодно близко приблизить ломаной (рис. 14.10 б). Возьмем $\varepsilon>0$. В силу теоремы Кантора о равномерной непрерывности функции, непрерывной на отрезке (§ 20 с. 86), можно найти N такое, что если разбить отрезок $[0,1]$ точками $x_k=\frac{k}{N}$ ($k=0,1,...,N$) на N равных отрезков $\left[0,\frac{1}{N}\right]$, $\left[\frac{1}{N},\frac{2}{N}\right]$, $\ldots$, $\left[\frac{N-1}{N},1\right]$, то колебание $\omega_k(f)$ функции $f(x)$ на каждом из этих отрезков будет меньше $\frac{\varepsilon}{2}$. Построим ломаную $q_N(x)$ такую, что $f(x_k)=q_N(x_k)$ ($k=0,1,...,N$). Тогда

$$|f(x)-q_N(x)|\le|f(x)-f(x_k)|+|q_N(x)-q_N(x_k)|\le\varepsilon\,.$$

Таким образом, всякая непрерывная на $[0,1]$ функция $f(x)$ может быть сколь угодно точно в равномерной метрике приближена ломаными с конечным числом звеньев.

3. Покажем, что для любой $f(x)\in C\,[0,1]$ $\forall\,\varepsilon>0$ $\exists\,P_n(x)$ $\forall\,x\in[0,1]$ $|f(x)-P_n(x)|<\varepsilon$. Зададим $\varepsilon>0$. По пункту 2 существуют $N=N_\varepsilon$ и ломаная $q_N(x)$ такие, что $\forall\,x\in[0,1]$ $|f(x)-q_N(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$. Теперь достаточно доказать для ломаных, что

$\exists P_n(x) \quad \forall x \in [0,1] \quad |q_N(x) - P_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Но в силу пункта 2 всякая ломаная представляется в виде $q_N(x) = \sum\limits_{k=1}^{N} c_k \varphi(x - a_k) + c_0$. Следовательно, для доказательства достаточно приблизить многочленами углы $\varphi(x-a)$.

Докажем, что угол $\varphi(x-a)$, где $0 \le a \le 1$, $x \in [0,1]$, можно сколь угодно точно приблизить на отрезке $[0,1]$ многочленами. В пункте 1 доказано, что $\varphi(x)$ на отрезке $[-1,1]$ раскладывается в равномерно сходящийся ряд многочленов $\varphi(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} B_n p_n(x)$. Тогда $\varphi(x-a) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} B_n p_n(x-a)$ равномерно на $[-1+a, 1+a] \supset [0,1]$. Таким образом, $\varphi(x-a)$ можем разложить в равномерно сходящийся на $[0,1]$ ряд многочленов. Значит, для любой ломаной $q_N(x)$ найдется многочлен $P_n(x)$ такой, что $|q_N(x) - P_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Сопоставляя приближение функции ломаной и приближение ломаной многочленами, получим утверждение пункта 3:

$$|f(x) - P_n(x)| \le |f(x) - q_N(x)| + |q_N(x) - P_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.$$

4. Пусть теперь $f(x) \in C[a,b]$. Положим $f(x) = F(t)$, где $x = a + (b-a)t$ $(0 \le t \le 1)$. Тогда по доказанному выше в пункте 3 $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists P_n(t) \quad \forall t \in [0,1] \quad |F(t) - P_n(t)| < \varepsilon$. Так как $t = \frac{x-a}{b-a}$, то это значит, что $\left| f(x) - P_n\left(\frac{x-a}{b-a}\right) \right| < \varepsilon \quad \forall x \in [a,b]$. При такой линейной замене многочлен от t ($t \in [0,1]$), переходит в многочлен от x ($x \in [a,b]$). ►

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке. Из теоремы Вейерштрасса следует, что $\rho_n = \|f(x) - P_n(x)\|_C \to 0$ при $n \to \infty$. Можно ожидать, что чем "лучше" (более гладкая) функция, тем быстрее $\rho_n \to 0$. Теорема Джексона теории приближений говорит о том, с какой скоростью можно приблизить функцию в зависимости от ее гладкости. Обратную задачу решает теорема Бернштейна:[9] если функция хорошо приближается многочленами, то она "хорошая".

---

[9] О прямых и обратных теоремах теории приближений можно прочитать в [25] § 5. См. также [4] лекция 20. (Ред.)

Глава 15

Интегралы, зависящие от параметра

Если аналогом числового ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$ является несобственный интеграл $\int\limits_a^{\infty} u(t)\,dt$, то аналогом функционального ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ является $\varphi(x) = \int\limits_a^{\infty} u(x,t)\,dt$ – несобственный интеграл, зависящий от параметра x. При этом аналогом частичных сумм $\sum\limits_{n=0}^{N} u_n(x)$ функционального ряда являются собственные интегралы Римана $\psi(x) = \int\limits_a^{b} u(x,t)\,dt$, зависящие от параметра (которые еще не были изучены).

§ 66. Собственные интегралы Римана, зависящие от параметра

66.1. Равномерная сходимость

Пусть для любого $x \in X$ функция $u(x,t) \in \underset{t}{R}[a,b]$, т. е. $u(x,t)$ интегрируема по Риману по t на $[a,b]$. Мы будем изучать интегралы вида $\psi(x) = \int\limits_a^b u(x,t)\,dt, \ \ x \in X$.

Определение. Пусть в области $D: \quad a \le t \le b,\ c \le x \le d$ задана функция $u(x,t)$ и $x_0 \in [c,d]$. Говорят, что $u(x,t)$ *сходится к функции* $\varphi(t)$ *при* $x \to x_0$ *равномерно на* $[a,b]$, если $\forall\,\varepsilon > 0 \ \ \exists\,\delta > 0 \ \ \forall\,x \in [c,d]\,,\ 0 < |x - x_0| < \delta\,,\ \forall\,t \in [a,b]$ $|u(x,t) - \varphi(t)| < \varepsilon$.

Если $\varphi(t) = u(x_0,t)$, то неравенство $|u(x,t) - u(x_0,t)| < \varepsilon$ выполняется при $|x - x_0| < \delta \ \ \forall\,t \in [a,b]$, и в этом случае будем говорить также, что функция $u(x,t)$ непрерывна в точке x_0 равномерно на отрезке $[a,b]$ (относительно переменной t).

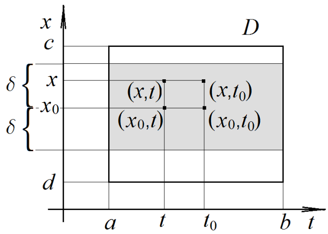


Рис. 15.1.

Замечание. Если функция $u(x,t)$ непрерывна на D, то она равномерно непрерывна на D как функция двух переменных, следовательно $\forall\,\varepsilon > 0 \ \ \exists\,\delta > 0$ $\forall\,(x,t),(x_0,t') \in D\,,\ |x - x_0| < \delta\,,$ $|t - t'| < \delta\,,\ |u(x,t) - u(x_0,t')| < \varepsilon\,.$ Это неравенство выполняется и в частном случае $t = t'$ и получаем определение равномерной непрерывности функции относительно переменной t на $[a,b]$. Таким образом, если точка (x_0,t_0) в D мало сдвинется по вертикали вверх или вниз в точку $(x,t_0) \in D$ (см. рис. 15.1), то значения функции будут близки не только в этих точках, но во всех точках вида (x_0,t) и (x,t) в D , т. е. равномерно относительно t на $[a,b]$.

Будем обозначать сходимость $u(x,t)$ к $u(x_0,t)$ при $x \to x_0$ равномерно по t на $[a,b]$ следующим образом: $u(x,t) \rightrightarrows u(x_0,t)$ ($x \to x_0$) на $[a,b]$.

Основные теоремы для равномерно сходящихся последовательностей функций переносятся на случай равномерной сходимости относительно параметра t с помощью следующего утверждения: [1)]

Если $u(x,t) \rightrightarrows u(x_0,t)$ ($x \to x_0$) *на* $[a,b]$, *то для любой последовательности* $x_n \to x_0$ *при* $n \to \infty$ ($x_n \ne x_0$ *для случая*

[1)] Смотри доказательство, например, в [28] т. 2 с. 656. Это доказательство аналогично доказательству эквивалентности пределов по Гейне и по Коши в п. 12.2 с. 51. (Ред.)

сходимости к функции $\varphi(t)$) *последовательность*

$$\varphi_n(t) = u(x_n, t) \rightrightarrows \varphi_0(t) = u(x_0, t) \quad (n \to \infty) \quad \textit{на} \quad [a, b]\,.$$

Отсюда, в частности, следует, что если $u(x,t)$ как функция от t непрерывна для всякого x, то и предельная функция $\varphi(t)$ будет непрерывна. Если $u(x,t)$ как функция от t интегрируема для всякого x, то и предельная функция $\varphi(t)$ будет интегрируема. Если $u(x,t)$ как функция от t непрерывна для всякого x и сходимость к непрерывной функции $\varphi(t)$ является монотонной по x, т.е. при $x \to x_0 - 0$ для любого t $u(x,t) \leq u(x',t)$ ($x < x'$), то сходимость будет равномерной по теореме Дини.

3 семестр
Лекция 16
(01.11.68)

Критерий Коши равномерной непрерывности. *Функция* $u\,(x,t)$ *непрерывна при* $x = x_0$ *равномерно относительно* t *на отрезке* $[a,b]$ *тогда и только тогда, когда для любого* $\varepsilon > 0$ *найдется* $\delta > 0$ *такое, что для всех* x, x', $|x - x_0| < \delta$, $|x' - x_0| < \delta$, *и для любых* $t \in [a,b]$ $|u(x,t) - u(x',t)| < \varepsilon$.

Д о к а з а т е л ь с т в о аналогично доказательству критерия Коши. Из равномерной непрерывности следует, что $\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta$ $\forall\, x, x' \in [c,d]$, $|x - x_0| < \delta$, $|x' - x_0| < \delta$, $\forall\, t \in [a,b]$

$$|u(x,t) - u(x_0,t)| < \tfrac{\varepsilon}{2}, \quad |u(x',t) - u(x_0,t)| < \tfrac{\varepsilon}{2}\,.$$

Тогда для любого $t \in [a,b]$

$$|u(x,t) - u(x',t)| \leq |u(x,t) - u(x_0,t)| + |u(x',t) - u(x_0,t)| < \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.$$

Обратно, пусть $\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta > 0 \;\; \forall\, x, x'$, $|x - x_0| < \delta$, $|x' - x_0| < \delta$, $\forall\, t \in [a,b]$ $|u(x,t) - u(x',t)| < \varepsilon$. Тогда для любого фиксированного t функция $u(x,t)$ имеет предел при $x' \to x_0$. Переходя в неравенстве к пределу получим условие равномерной непрерывности в точке x_0. ▶

Аналогично можно сформулировать и доказать критерий Коши для случая, когда $u(x,t) \rightrightarrows \varphi(t)$ ($x \to x_0$) *на* $[a,b]$, дополнительно указав в условии теоремы, что $x \neq x_0$, $x' \neq x_0$.

Пусть теперь для любого $x \in [c,d]$ $u(x,t) \in \underset{t}{R}\,[a,b]$. Обозначим $F(x) = \int\limits_a^b u(x,t)\,dt$. Функция $F(x) = \int\limits_a^b u(x,t)\,dt$ определена $\forall\, x \in [c,d]$.

Теорема о предельном переходе под знаком интеграла. *Пусть* $u\,(x,t) \in \underset{t}{R}\,[a,b]$ $\forall\, x \in [c,d]$ *и пусть* $u(x,t) \rightrightarrows \varphi(t)$ ($x \to x_0$) *на* $[a,b]$. *Тогда* $\varphi(t) \in R\,[a,b]$ *и*

$$\lim_{x\to x_0} \int\limits_a^b u(x,t)\,dt = \int\limits_a^b \lim_{x\to x_0} u(x,t)\,dt = \int\limits_a^b \varphi(t)\,dt\,.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. $\varphi(t) \in R\,[a,b]$ как равномерный предел интегрируемых функций (см. конец лекции 15 на с. 386). В силу определения $|u(x,t) - \varphi(t)| < \varepsilon$ $\forall\, t \in [a,b]$ как только $0 < |x - x_0| < \delta$. Отсюда следует, что

$$\left| \int\limits_a^b u(x,t)\,dt - \int\limits_a^b \varphi(t)\,dt \right| \le \int\limits_a^b |u(x,t) - \varphi(t)|\;dt \le \varepsilon(b-a)\,.$$

Следовательно, $\int\limits_a^b u(x,t)\,dt \to \int\limits_a^b \varphi(t)\,dt$ ($x \to x_0$). ►

Замечание. В доказательстве используется конечность отрезка $[a,b]$. Доказательство не проходит для полупрямой и прямой. Даже равномерная сходимость на всей полупрямой в условии теоремы не гарантирует ее справедливости. [2)]

Теорема о непрерывной зависимости интеграла от параметра. *Пусть* $u(x,t) \in C(D)$, *где* $D = \left\{ \begin{array}{l} a \le t \le b\,, \\ c \le x \le d\,. \end{array} \right.$ *Тогда* $F(x) = \int\limits_a^b u(x,t)\,dt \in C\,[c,d]$.

Действительно, для любого $x \in [c,d]$ функция $u\,(x,t)$ непрерывна по x равномерно относительно t на отрезке $[a,b]$. Значит, применима теорема о предельном переходе под знаком интеграла. Следовательно, для любого $x_0 \in [c,d]$

$$\lim_{x\to x_0} \int\limits_a^b u(x,t)\,dt = \int\limits_a^b \lim_{x\to x_0} u(x,t)\,dt = \int\limits_a^b u(x_0,t)\,dt\,,$$

т. е. $\lim\limits_{x\to x_0} F(x) = F(x_0)$ и $F(x) \in C\,[c,d]$. [3)] ►

[2)] Соответствующий пример можно найти в [31] (пример 13.52). (Ред.)

[3)] Как видно из доказательства, теорема верна при более слабом предположении, чем непрерывность по совокупности переменных, а именно, в случае

Если предположить другую непрерывность функции $u(x,t)$, то о непрерывности $F(x)$ ничего нельзя сказать. Требуем непрерывность по совокупности переменных, непрерывности по каждой переменной недостаточно.

66.2. Интегрирование и дифференцирование интегралов по параметру. Правило Лейбница

Пусть функция $f(x)$ имеет производную $f'(x)$ на $[a,b]$. Тогда $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \to f'(x)$ ($h \to 0$). Выясним, при каких ограничениях на характер гладкости предел не только существует, но существует равномерно по $x \in [a,b]$? Если $f'(x) \in C\,[a,b]$, то предел существует равномерно на $[a,b]$. Действительно, по теореме Лагранжа, в силу того, что $f'(x) \in C\,[a,b]$

$$\tfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x+\theta h) \rightrightarrows f'(x) \quad (h \to 0) \quad \textit{на} \quad [a,b]\,.$$

Пусть $F(x) = \int\limits_a^b u(x,t)\,dt$. Нас интересует, когда

$$F'(x) = \tfrac{d}{dx}\int\limits_a^b u(x,t)\,dt \overset{?}{=} \int\limits_a^b \tfrac{\partial u}{\partial x}(x,t)\,dt\,.$$

Теорема о дифференцировании интеграла, зависящего от параметра. *Пусть* $u(x,t) \in \underset{t}{R}\,[a,b]$ *для любого* $x \in [c,d]$ *и* $\frac{\partial u}{\partial x} \in C(D)$, *где* $D = \begin{cases} a \le t \le b\,, \\ c \le x \le d\,. \end{cases}$ *Тогда*

$$\tfrac{d}{dx}\int\limits_a^b u(x,t)\,dt = \int\limits_a^b \tfrac{\partial u}{\partial x}(x,t)\,dt\,.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим $F(x) = \int\limits_a^b u(x,t)\,dt$ и рассмотрим не производную, а разностное отношение для $F(x)$, так как его можно переставить с интегралом:

$$\tfrac{F(x+h)-F(x)}{h} = \int\limits_a^b \tfrac{u(x+h,t)-u(x,t)}{h}\,dt\,.$$

непрерывности функции при любом значении x равномерно по t. В качестве примера такой функции подойдет $u(x,t)$, заданная на единичном квадрате и равная 1 при $0 \le t \le \frac{1}{2}$ и 0 при $\frac{1}{2} \le t \le 1$. (Ред.)

Надо проверить, что при $h \to 0$ предел существует. По формуле Лагранжа $\frac{u(x+h,t)-u(x,t)}{h} = \frac{\partial}{\partial x}u(x+\theta h,t) \rightrightarrows \frac{\partial}{\partial x}u(x,t)$ ($h \to 0$) на $[a,b]$ в силу предположения непрерывности $\frac{\partial u}{\partial x}$ в D. По теореме о переходе к пределу под знаком интеграла

$$\int\limits_a^b \tfrac{u(x+h,t)-u(x,t)}{h}\,dt \to \int\limits_a^b \tfrac{\partial u}{\partial x}(x,t)\,dt \quad (h \to 0)\,.$$

Значит, $F'(x)$ существует и $F'(x) = \int\limits_a^b \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\,dt$. ▶

Теорема об интегрировании интеграла, зависящего от параметра, по параметру. *Пусть* $u(x,t)$ *непрерывна на* D, *где* $D = \begin{cases} a \le t \le b\,, \\ c \le x \le d\,, \end{cases}$ *и* $F(x) = \int\limits_a^b u(x,t)\,dt$. *Тогда*

$$\int\limits_c^d F(x)\,dx = \int\limits_c^d \left\{ \int\limits_a^b u(x,t)\,dt \right\} dx = \int\limits_a^b \left\{ \int\limits_c^d u(x,t)\,dx \right\} dt\,.$$

Интегралы $\int\limits_c^d \left\{ \int\limits_a^b u(x,t)\,dt \right\} dx$ и $\int\limits_a^b \left\{ \int\limits_c^d u(x,t)\,dx \right\} dt$ – повторные интегралы, но обычно формулу записывают так:

$$\int\limits_c^d \int\limits_a^b u(x,t)\,dt\,dx = \int\limits_a^b \int\limits_c^d u(x,t)\,dx\,dt\,.$$

Доказательство. Рассмотрим функции

$$\varphi_1(\xi) = \int\limits_c^\xi \int\limits_a^b u(x,t)\,dt\,dx\,, \qquad \varphi_2(\xi) = \int\limits_a^b \int\limits_c^\xi u(x,t)\,dx\,dt$$

и докажем их равенство на $[c,d]$. Для $\xi = c$ равенство очевидно (0=0). Докажем, что для любого $\xi \in [c,d]$ существуют и равны производные:

$$\varphi_1'(\xi) = \int\limits_a^b u(\xi,t)\,dt\,,$$

$$\varphi_2'(\xi) = \tfrac{d}{d\xi} \int\limits_a^b \int\limits_c^\xi u(x,t)\,dx\,dt = \int\limits_a^b \tfrac{d}{d\xi} \int\limits_c^\xi u(x,t)\,dx\,dt = \int\limits_a^b u(\xi,t)dt$$

(так как функция $u(x,t)$ непрерывна, то по теореме о дифференцировании интеграла,зависящего от параметра, дифференцирование было законным). Итак, производные функций $\varphi_1(\xi)$, $\varphi_2(\xi)$ совпадают, сами функции в одной точке тоже совпадают, значит, функции совпадают всюду на $[c,d]$, и при $\xi = d$ тоже. ▶

Пусть задана функция $u(x,t)$ в области $D = \begin{cases} a \le t \le b\,, \\ c \le x \le d\,, \end{cases}$

и две функции $a(x)$, $b(x)$ на $[c,d]$ такие, что $a \le a(x) \le b$, $a \le b(x) \le b$. Рассмотрим интеграл $F(x) = \int\limits_{a(x)}^{b(x)} u(x,t)\,dt$.

При доказательстве следующей теоремы используем ***прием замораживания параметра*** – один из основных в математике. Именно, возьмем $x_0 \in [c,d]$ (см. рис. 15.2). Нас будет интересовать вопрос о непрерывности функции $F(x)$ в точке x_0. При $a(x_0)$, $b(x_0)$ задача сводится к известной задаче. Теперь устремим $x \to x_0$ и исследуем ошибку из-за замораживания параметра.

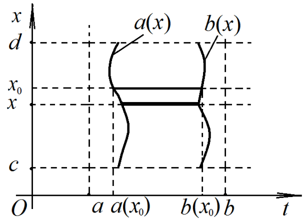


Рис. 15.2.

Теорема. *Пусть* $u(x,t) \in C(D)$, $x_0 \in [c,d]$, $a(x),\ b(x) \in C(x_0)$. *Тогда* $F(x) \in C(x_0)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим разность

$$F(x)-F(x_0) = \int\limits_{a(x_0)}^{b(x_0)} u(x,t)dt + \int\limits_{b(x_0)}^{b(x)} u(x,t)dt - \int\limits_{a(x_0)}^{a(x)} u(x,t)dt - \int\limits_{a(x_0)}^{b(x_0)} u(x_0,t)dt.$$

Разность первого и последнего интегралов стремится к нулю по теореме для интегралов с постоянными пределами. Далее

$$\left| \int\limits_{b(x_0)}^{b(x)} u(x,t)\,dt \right| \le M\,|b(x)-b(x_0)| \to 0 \quad (x \to x_0),$$

$$\left| \int\limits_{a(x_0)}^{a(x)} u(x,t)\,dt \right| \le M\,|a(x)-a(x_0)| \to 0 \quad (x \to x_0),$$

где M – максимум модуля подынтегральной функции. Следовательно, $F(x) - F(x_0) \to 0$ ($x \to x_0$). ►

3 семестр
Лекция 17
(06.11.68)

Пусть $u(x,t) \in \underset{t}{R}[a,b]$, $a \le t \le b$, $c \le x \le d$, $a \le a(x) \le b(x) \le b$, $F(x) = \int\limits_{a(x)}^{b(x)} u(x,t)\,dt$. Рассмотрим функцию трех переменных

$\int\limits_{\alpha}^{\beta} u(x,t)\,dt = \Phi(x,\alpha,\beta) \quad (\, a \le \alpha, \beta \le b\,)$. Тогда функцию

$$F(x) = \int\limits_{a(x)}^{b(x)} u(x,t)\,dt = \Phi(x, a(x), b(x))$$

можно изучать, как сложную функцию.

Обозначим $\Delta = \left\{ \begin{array}{l} c \le x \le d\,, \\ a \le \alpha \le b\,, \\ a \le \beta \le b\,, \end{array} \right. \quad D = \left\{ \begin{array}{l} a \le t \le b\,, \\ c \le x \le d\,. \end{array} \right.$

Лемма. *Пусть* $u(x,t) \in C(D)$. *Тогда* $\Phi(x,\alpha,\beta) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} u(x,t)dt \in C(\Delta)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим

$$\Phi(x_1,\alpha_1,\beta_1) - \Phi(x,\alpha,\beta) =$$

$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} \{u(x_1,t) - u(x,t)\}\;dt + \int\limits_{\beta}^{\beta_1} u(x_1,t)\,dt - \int\limits_{\alpha}^{\alpha_1} u(x_1,t)\,dt\,.$$

Из непрерывности $u(x,t)$ следует ограниченность $u(x,t)$ на D: $|u(x,t)| \le M \ (\,(x,t) \in D\,)$ и равномерная непрерывность $u(x,t)$ на D. В силу этого $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ \ \forall t \in [a,b] \ \ \forall x, x_1$, $|x - x_1| < \delta$, выполняется неравенство $|u(x_1,t) - u(x,t)| < \varepsilon$. Отсюда следует, что

$$|\Delta\Phi| \le (b-a)\varepsilon + |\beta_1 - \beta|\,M + |\alpha_1 - \alpha|\,M < C\,\varepsilon\,.$$

Таким образом, если $|x - x_1| < \delta$, $|\beta_1 - \beta| < \delta$, $|\alpha_1 - \alpha| < \delta$, то $\Delta\Phi$ будет мало и функция Φ непрерывна по совокупности трех переменных x, α, β. ►

Рассмотрим теперь вопрос о дифференцируемости функции $F(x) = \int\limits_{\alpha(x)}^{\beta(x)} u(x,t)dt$. Вопрос о существовании $F'(x)$ сводится к вопросу существования дифференциала функции $\Phi(x, a(x), b(x))$, а это в свою очередь связано с дифференцируемостью функции $\Phi(x,\alpha,\beta)$, как функции трех переменных.

Справедлива

Теорема. *Пусть* $D = \left\{ \begin{array}{l} a \le t \le b \\ c \le x \le d \end{array} \right.$, $u(x,t) \in C(D)$, $\frac{\partial u}{\partial x} \in C(D)$. *Тогда функция* $\Phi(x,\alpha,\beta) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} u(x,t)\,dt \ \ (\, a \le \alpha, \beta \le b\,)$ *имеет непрерывные частные производные и, следовательно, дифференцируема в области* Δ, *т. е. существует* $d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x}dx + \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}\,d\alpha + \frac{\partial \Phi}{\partial \beta}\,d\beta$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проверим, что в условиях теоремы частные производные $\frac{\partial\Phi}{\partial x}$, $\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha}$, $\frac{\partial\Phi}{\partial\beta}$ существуют и непрерывны на Δ. Действительно, так как $\frac{\partial u}{\partial x} \in C(D)$, то по теореме о дифференцировании под знаком интеграла с постоянными пределами $\frac{\partial\Phi}{\partial x} = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial u}{\partial x}\, dt$. Так как $u(x,t) \in C(D)$, то дифференцируя по переменному верхнему пределу, получим $\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha} = -u\,(x,\alpha)$, $\frac{\partial\Phi}{\partial\beta} = u(x,\beta)$. Из непрерывности частных производных следует, что функция $\Phi = \Phi(x,\alpha,\beta)$ будет дифференцируема в области Δ, так как выполняется достаточный признак дифференцируемости, и $d\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\Phi}{\partial\alpha}\,d\alpha + \frac{\partial\Phi}{\partial\beta}\,d\beta$.

Функция $F(x) = \int\limits_{a(x)}^{b(x)} u(x,t)\,dt = \Phi(x,a(x),b(x))$ имеет производную, если функция Φ дифференцируема, а функции $a(x)$, $b(x)$ имеют производные. По формуле для производной сложной функции (см. п. 54.3 с. 257)

$$F'(x) = \frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial\Phi}{\partial\alpha}a'(x) + \frac{\partial\Phi}{\partial\beta}b'(x)\,,$$

или

$$F'(x) = \int\limits_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial u}{\partial x}\,dt + b'(x)u(x,b(x)) - a'(x)u(x,a(x))\,.$$

Последняя формула может быть переписана как

$$F'(x) = \int\limits_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial u}{\partial x}\,dt + t'u(x,t)\Big|_{a(x)}^{b(x)}$$

и называется *формулой Лейбница.*

§ 67. Несобственные интегралы, зависящие от параметра

Посредством интегралов, зависящих от параметра, можно изучать и изображать функции. Пусть функция $u(x,t)$ определена на множестве $D = \left\{\begin{array}{l} t \ge a\,, \\ c \le x \le d\,. \end{array}\right.$ Тот факт, что для функции $u(x,t)$ для любого $x \in [c,d]$ существует несобственный интеграл $F(x) = \int\limits_{a}^{\infty} u(x,t)\,dt$, будем обозначать как $u(x,t) \in \underset{t}{\overline{R}}[a,\infty)$ $(\,\forall\, x \in [c,d]\,)$.

Мы также будем рассматривать функции $u(x,t)$, заданные на множествах вида $D = \begin{cases} t \geq a\,, \\ x \geq c\,. \end{cases}$

Может оказаться, что $u(x,t) \rightrightarrows 0 \quad (x \to \infty)$ на $[a,+\infty)$ а $F(x) = \int\limits_a^\infty u(x,t)\,dt$ не стремится к нулю при $x \to \infty$.

Пример. Рассмотрим функцию $u(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & 0 \leq t \leq x, \\ 0, & t > x, \end{cases}$ на области $D = \begin{cases} t \geq 0\,, \\ x \geq 1\,, \end{cases}$ (см. рис. 15.3). Тогда при $x \to \infty$ имеем $u(x,t) \rightrightarrows u(\infty,t) \equiv 0$ на $[0,\infty)$,

$$\int\limits_0^\infty u(\infty,t)\,dt = 0\,,$$

$$F(x) = \int\limits_0^\infty u(x,t)\,dt = \int\limits_0^x \frac{1}{x}\,dt \equiv 1\,,$$

поэтому предельный переход под знаком интеграла не законен:

$$\lim_{x\to\infty} \int\limits_0^\infty u(x,t)\,dt \neq \int\limits_0^\infty \lim_{x\to\infty} u(x,t)\,dt\,.$$

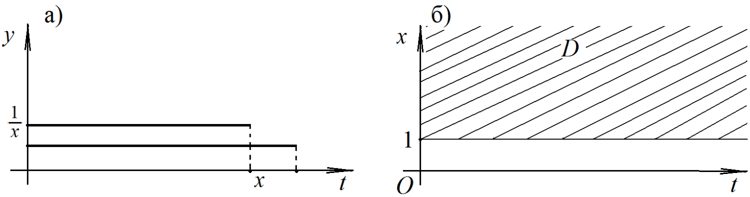


Рис. 15.3.

67.1. Равномерная сходимость несобственных интегралов, зависящих от параметра

Пусть $D = \begin{cases} t \geq a\,, \\ c \leq x \leq d\,, \end{cases}$ функция $u(x,t)$ определена на множестве D, $u(x,t) \in \overline{\underset{t}{R}}[a,\infty)$ $(\forall\, x \in [c,d]\,)$. Рассмотрим несобственный интеграл $F(x) = \int\limits_a^\infty u(x,t)\,dt$. По определению несобственного интеграла,

$$F(x) = \lim_{A\to\infty} \int_a^A u(x,t)\,dt = \lim_{A\to\infty} F(x,A)\,,$$

где $F(x,A) = \int\limits_a^A u(x,t)\,dt$.

Определение. Несобственный интеграл $F(x) = \int\limits_a^\infty u(x,t)\,dt$ называется *равномерно сходящимся на* $[c,d]$, если $F(x,A) \rightrightarrows F(x)$ на отрезке $[c,d]$ при $A\to\infty$, т.е. если $\forall\,\varepsilon>0\ \ \exists\,T\ \ \forall\,A\ge T$ $\forall\,x\in[c,d]$

$$\left|\int_a^A u(x,t)\,dt - \int_a^\infty u(x,t)\,dt\right| = \left|\int_A^\infty u(x,t)dt\right| < \varepsilon\,.$$

Приведем некоторые признаки и свойства равномерной сходимости несобственных интегралов, зависящих от параметра.

Критерий Коши. *Несобственный интеграл* $F(x) = \int\limits_a^\infty u(x,t)\,dt$ *сходится равномерно на* $[c,d]$ *тогда и только тогда, когда* $\forall\,\varepsilon>0$ $\exists\,T\ \ \forall\,A,B\ge T\ \ \forall\,x\in[c,d]$

$$|F(x,A) - F(x,B)| < \varepsilon$$

или

$$\left|\int_A^B u(x,t)dt\right| < \varepsilon\,.$$

Мажорантный признак равномерной сходимости (аналог признака Вейерштрасса). *Пусть* $|u(x,t)| \le \varphi(t)$ $(\,\forall\,x\in[c,d]\,)$ *и существует* $\int\limits_a^\infty \varphi(t)\,dt$, *тогда* $\int\limits_a^\infty u(x,t)\,dt$ *равномерно сходится на* $[c,d]$.

Действительно, $\forall\,\varepsilon>0\ \ \exists\,T\ \ \forall\,A,B\ge T\ \ \forall\,x\in[c,d]$

$$\left|\int_A^B u(x,t)\,dt\right| \le \int_A^B |u(x,t)|\,dt \le \int_A^B \varphi(t)\,dt < \varepsilon. \qquad \blacktriangleright$$

Аналог теоремы Дини. *Пусть выполнены условия*:

а) $F(x) = \int\limits_a^\infty u(x,t)\,dt \in C\,[c,d]$;

б) $u(x,t) \in C\,(D)$;

в) $u(x,t) \ge 0$.

Тогда интеграл $\int\limits_a^\infty u(x,t)\,dt$ *равномерно сходится на* $[c,d]$.

Действительно, семейство функций $F(x, A)$ обладает свойствами:

1. $\lim\limits_{A\to\infty} F(x, A) = F(x) \quad \forall x \in [c, d]$,

2. $F(x, A) \le F(x, B)$ при $A \le B$ и $x \in [c, d]$,

3. функции $F(x)$ и $F(x, A)$ непрерывны по x на компакте $[c, d]$.

Следовательно, применима теорема Дини, из которой следует равномерная сходимость $F(x, A) \rightrightarrows F(x)$ на $[c, d]$ $(A \to \infty)$. ►

Рассмотрим интеграл $\int\limits_0^\infty u(x, t)\, dt$ в области $t \ge 0, x \ge 0$. Пусть $u(x, t) \ge 0$, $u(x, t) \in C([0, \infty) \times [0, \infty))$, $u(x, t) \in \underset{t}{\overline{R}}[a, \infty)$. Тогда по теореме Дини интеграл равномерно сходится на любом отрезке $[0, X\,]$, но равномерная сходимость на всей полупрямой не гарантируется.

Предельный переход. *Пусть*

1) *для любого* T

$$\lim_{x\to x_0} \int\limits_a^T u(x, t)\, dt = \int\limits_a^T \lim_{x\to x_0} u(x, t)\, dt\,,$$

2) $\int\limits_a^\infty u(x, t) dt$ *равномерно сходится на* $[c, d]$.

Тогда

$$\lim_{x\to x_0} \int\limits_a^\infty u(x, t)\, dt = \int\limits_a^\infty \lim_{x\to x_0} u(x, t)\, dt\,.$$

Действительно, $F(x, A) \rightrightarrows F(x)$ на $[c, d]$ ($A \to \infty$), и для любого A существует предел $\lim\limits_{x\to x_0} F(x, A)$. Поэтому следующие пределы существуют и равны:

$$\lim_{x\to x_0} F(x) = \lim_{A\to\infty} \lim_{x\to x_0} F(x, A). \quad ►$$

Отметим, что если $u(x, t) \in C(D)$, то условие 1) выполняется.

Предельная теорема удобна для изучения неравномерной сходимости, если $\lim\limits_{x\to x_0} \int\limits_a^\infty u(x, t)\, dt \ne \int\limits_a^\infty \lim\limits_{x\to x_0} u(x, t)\, dt$, то сходимость интеграла $\int\limits_a^\infty u(x, t)\, dt$ не может быть равномерной. Однако нужно проверять, что подынтегральная функция имеет предел.

Упомянем еще одно важное свойство равномерной сходимости. Если $u(x,t) \in C([c,d]\times[a,\infty))$, и $F(x) = \int\limits_a^\infty u(x,t)\,dt$ сходится равномерно, то функция $F(x)$ непрерывна. Действительно, $F(x)$ является равномерным пределом непрерывных функций $F(x,A)$.
Упражнение. Сформулируйте и докажите равномерные аналоги признаков Абеля и Дирихле сходимости несобственных интегралов.

3 семестр
Лекция 18
(13.11.68)

67.2. Интегрирование несобственных интегралов по параметру

Приведем условия, при которых законно интегрирование несобственного интеграла $F(x) = \int\limits_a^\infty u(x,t)\,dt$ по параметру $x \in [c,d]$, т. е. $F \in R[c,d]$ и

$$\int\limits_c^d F(x)dx \equiv \int\limits_c^d\int\limits_a^\infty u(x,t)\,dtdx = \int\limits_a^\infty\int\limits_c^d u(x,t)\,dxdt.$$

Так как $F(x) = \lim\limits_{A\to\infty} F(x,A)$, где $F(x,A) = \int\limits_a^A u(x,t)\,dt$, то задача сводится к интегрированию в конечных пределах под знаком предела. Будем предполагать, что $u(x,t) \in C(D)$, тогда $F(x,A)$ непрерывна по x на $[c,d]$.

Предположим, что $F(x,A) \rightrightarrows F(x)$ ($A\to\infty$, $[c,d]$). Тогда $F(x)$ непрерывна и $\int\limits_c^d F(x,A)\,dx \to \int\limits_c^d F(x)\,dx$ ($A\to\infty$). С другой стороны, по теореме об интегрировании интеграла, зависящего от параметра, по параметру (см. п. 66.2 с. 390)

$$\int\limits_c^d F(x,A)\,dx = \int\limits_c^d\int\limits_a^A u(x,t)\,dxdt = \int\limits_a^A\int\limits_c^d u(x,t)\,dxdt \to \int\limits_a^\infty\int\limits_c^d u(x,t)\,dxdt\,.$$

Следовательно, требуемое равенство выполнено и, таким образом, доказана

Теорема об интегрировании несобственного интеграла по параметру в конечных пределах. *Пусть* $D = \begin{cases} a \le t\,, \\ c \le x \le d\,, \end{cases}$ $u(x,t) \in C(D)$, $u(x,t) \in \underset{t}{\overline{R}}[a,\infty)$ $\forall\, x \in [c,d]$ *и интеграл* $\int\limits_a^\infty u(x,t)\,dt$ *равномерно сходится на* $[c,d]$. *Тогда*

$$\int\limits_c^d\int\limits_a^\infty u(x,t)\,dtdx = \int\limits_a^\infty\int\limits_c^d u(x,t)\,dxdt.$$

Пусть функция $u(x,t)$ определена в области $D = \begin{cases} t \ge a\,, \\ x \ge c\,. \end{cases}$ Когда

$$\int\limits_a^\infty\int\limits_c^\infty u(x,t)\,dxdt = \int\limits_c^\infty\int\limits_a^\infty u(x,t)\,dtdx\,?$$

Последнее равенство часто не имеет места. [4] Если один из интегралов сходится условно, то для доказательства равенства интегралов требуется специальное исследование в каждом конкретном случае. Если $\int\limits_a^\infty\int\limits_c^\infty |u\,(x,t)|\;dxdt$ сходится, то получается общее доказательство. Поэтому рассмотрим частный случай, когда $u(x,t) \ge 0$.

Теорема об интегрировании несобственных интегралов по параметру в бесконечных пределах. *Пусть* $D = \begin{cases} t \ge a\,, \\ x \ge c\,, \end{cases}$ $u(x,t) \ge 0$ *на* D, $u(x,t) \in C(D)$, $F(x) = \int\limits_a^\infty u(x,t)\,dt \in C\,[c,\infty)$, $\Phi(t) = \int\limits_c^\infty u(x,t)\,dx \in C\,[a,\infty)$ *и функция* $\Phi \in \underset{t}{\overline{R}}[a,\infty)$. *Тогда* $F \in \underset{x}{\overline{R}}[c,\infty)$ *и* $\int\limits_c^\infty F(x)\,dx = \int\limits_a^\infty \Phi(t)\,dt$, *т. е.*

$$\int\limits_a^\infty\int\limits_c^\infty u(x,t)\,dxdt = \int\limits_c^\infty\int\limits_a^\infty u(x,t)\,dtdx\,.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Оценим сверху интеграл $\int\limits_c^X F(x)\,dx$ для произвольного X. Возьмем $\varepsilon > 0$. Из непрерывности F и

[4] Например, для функции $u(x,t) = 1/x^2$ при $1 \le t \le x$, $u(x,t) = -1/t^2$ при $1 \le x < t$ получим $\int\limits_1^\infty\int\limits_1^\infty u(x,t)\,dxdt = 1$, $\int\limits_1^\infty\int\limits_1^\infty u(x,t)\,dtdx = -1$. (Ред.)

теоремы Дини следует равномерная сходимость $F(x,A) \rightrightarrows F(x)$. Поэтому, при достаточно большом A ,

$$\int_c^X F(x)\,dx \le \varepsilon + \int_c^X F(x,A)\,dx\,.$$

Интегрируя в конечных пределах и пользуясь неотрицательностью u , получаем

$$\int_c^X F(x,A)\,dx = \int_c^X \int_a^A u(x,t)\,dt\,dx = \int_a^A \int_c^X u(x,t)\,dx\,dt \le$$
$$\le \int_a^A \int_c^\infty u(x,t)\,dx\,dt = \int_a^A \Phi(t)\,dt \le \int_a^\infty \Phi(t)\,dt\,.$$

Следовательно, в силу произвольности ε ,

$$\int_c^X F(x)\,dx \le \int_a^\infty \Phi(t)\,dt\,.$$

Поскольку функция F неотрицательна, из последнего неравенства следует интегрируемость F в несобственном смысле, а также неравенство

$$\int_c^\infty F(x)\,dx \le \int_a^\infty \Phi(t)\,dt\,.$$

Аналогично устанавливается противоположное неравенство. В результате получаем, что интегралы равны. ▶

3 семестр
Лекция 19
(15.11.68)

67.3. Дифференцирование несобственных интегралов по параметру

Теорема. *Пусть* $D = \begin{cases} t \ge a\,, \\ c \le x \le d\,, \end{cases}$ *функция* $u\,(x,t)$ *определена в области* D , *существует* $F(x) = \int\limits_a^\infty u(x,t)\,dt$ *при* $x \in [c,d]$, $\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \in C(D)$ *и* $\int\limits_a^\infty \frac{\partial u(x,t)}{\partial\, x}\,dt$ *равномерно сходится на* $[c,d]$. *Тогда функция* F *дифференцируема на* $[c,d]$ *и*

$$F'(x) = \int\limits_a^{\infty} \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\, dt\,.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу непрерывности подынтегральной функции и равномерной сходимости интеграла, $G(x)=\int\limits_a^{\infty}\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\, dt$ есть непрерывная на $[c,d]$ функция. По теореме об интегрировании несобственного интеграла по параметру в конечных пределах (см. с. 398) $\int\limits_c^y G(x)\, dx = \int\limits_c^y\int\limits_a^{\infty}\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\, dtdx = \int\limits_a^{\infty}\int\limits_c^y\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\, dxdt =$

$$= \int\limits_a^{\infty} u(y,t)\, dt - \int\limits_a^{\infty} u(c,t)\, dt = F(y) - F(c)\,.$$

Следовательно, $F'(y) = G(y)$, что и требовалось доказать. ▶

Замечание. Существуют другие интегралы, зависящие от параметра. Например, пусть функция $u(x,t)$ определена в области $D = \begin{cases} a \le t \le b\,, \\ c \le x \le d\,, \end{cases}$ и неограничена. Если при всех $x\in[c,d]$

$$\forall\, \varepsilon>0 \quad u(x,t) \in \underset{t}{R}[a+\varepsilon, b] \ \text{(обозначение: } u\ (x,t)\in\underset{t}{\overline{R}}\,(a,b]\,\text{)},$$

то можно рассмотреть *несобственный интеграл*

$$F(x) = \int\limits_a^b u(x,t)\, dt = \lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{a+\varepsilon}^b u(x,t)\, dt\,, \qquad x\in[c,d]\,.$$

Упражнение. Определите равномерную сходимость зависящих от параметра несобственных интегралов от неограниченных функций. Сформулируйте для таких интегралов теоремы, аналогичные теоремам, доказанным в этом параграфе.

Аналогично, если $\forall\, x\in[c,d]\ \ \forall\, b\ \ \forall\, t\,,\ a< t\le b\,,\ u(x,t)\in\underset{t}{\overline{R}}(a,b]\,,$ то можно рассмотреть несобственный интеграл

$$F(x) = \int\limits_a^{\infty} u(x,t)\, dt = \int\limits_a^b u(x,t)\, dt + \int\limits_b^{\infty} u(x,t)\, dt\,,$$

который сходится, если сходится каждый из интегралов справа (точку $b > a$ можем выбрать произвольно). В этом случае будем обозначать $u(x,t) \in \underset{t}{\overline{R}}(a,\infty)$. Для всех таких интегралов установленные нами теоремы формулируются и доказываются аналогично.

§ 68. Вычисление некоторых несобственных интегралов

Вычисление интегралов, зависящих от параметра, помогает при вычислении несобственных интегралов без параметра. Например, чтобы вычислить $\int\limits_a^\infty \varphi(t)\,dt$, рассмотрим функцию $u(x,t)$ такую, что $\lim\limits_{x\to x_0} u(x,t) = \varphi(t)$ и удовлетворяющую условиям теоремы о предельном переходе (п. 67.1 с. 396). Тогда $\int\limits_a^\infty u(x,t)\,dt \to \int\limits_a^\infty \varphi(t)\,dt$ ($x \to x_0$).

68.1. Интеграл Дирихле (разрывный множитель Дирихле)

Рассмотрим *интеграл Дирихле*

$$I = \int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx\,,$$

а также более общий интеграл

$$D(\alpha) = \int\limits_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{x}\,dx\,.$$

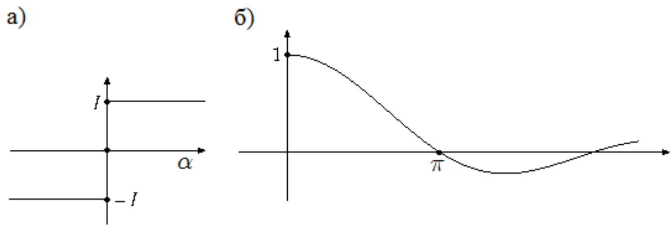


Рис. 15.4. а) $D(\alpha) = I \operatorname{sign}\alpha$; б) $\frac{\sin x}{x}$ $(x \geq 0)$.

Отметим, что $D(0) = 0$. Если $\alpha > 0$, то, сделав замену $\alpha x = u$, получим $D(\alpha) = I$. Если $\alpha < 0$, то, сделав замену $\alpha x = -u$, получим $D(\alpha) = -I$. Значит, $D(\alpha) = I \operatorname{sign}\alpha$ (см. рис. 15.4).

Интеграл $D(\alpha)$ называется *разрывным множителем Дирихле*, он дает первое аналитическое изображение разрывной функции $I \operatorname{sign}\alpha$ ($\operatorname{sign}\alpha$ – простейшая неэлементарная разрывная функция). Интеграл сходится неравномерно в окрестности особой точки $\alpha = 0$, так как подынтегральная функция непрерывна, а функция $\operatorname{sign}\alpha$ разрывна.

Докажем, что $I = \int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$. Интеграл I сходится (см. пример в п. 59.6 с. 327). Рассмотрим интеграл

$$I(\alpha) = \int\limits_0^\infty e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}\,dx, \quad \alpha \geq 0\,.$$

Тогда $I = I(0)$. Интеграл $I(\alpha)$ сходится равномерно в области $\alpha \geq 0$.[5] Значит, $I(\alpha)$ – непрерывная функция от α, откуда $I = I(0) = \lim\limits_{\alpha\to+0} I(\alpha)$. Продифференцируем $I(\alpha)$ по α:

$$I'(\alpha) \overset{?}{=} -\int\limits_0^\infty e^{-\alpha x}\sin x\,dx, \quad \alpha > 0\,.$$

Для любого $\alpha_0 > 0$ интеграл в правой части равенства сходится равномерно в области $\alpha \geq \alpha_0$, так как подынтегральная функция мажорируется функцией $e^{-\alpha_0 x}$. Следовательно, применима теорема о дифференцируемости несобственных интегралов по параметру, из которой следует законность дифференцирования.

Интеграл для $I'(\alpha)$ вычисляется явно: $I'(\alpha) = -\frac{1}{(1+\alpha^2)}$. Отсюда $I(\alpha) = C - \operatorname{arctg}\alpha$, осталось найти C. Так как

$$|I(\alpha)| \leq \int\limits_0^\infty e^{-\alpha x}\,dx = \frac{1}{\alpha}\,,$$

то $I(\alpha) \to 0$ при $\alpha \to \infty$. Следовательно, $C = \operatorname{arctg}(\infty) = \frac{\pi}{2}$, $I(\alpha) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\alpha$, $I = I(0) = \frac{\pi}{2}$. Таким образом,

---

[5] Докажем это. Равномерная сходимость следует из равномерного аналога признака Дирихле сходимости несобственных интегралов (п. 59.6 с. 327), мы проведем соответствующие оценки явно. Пусть $g(x) = \frac{e^{-\alpha x}}{x}$. Очевидно, что g неотрицательна, убывает и $g(x) \leq \frac{1}{x}$. Оценим интеграл

$$\int\limits_A^B e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}\,dx = -\int\limits_A^B g(x)\,d\cos x = -\,g(x)\cos x\Big|_A^B + \int\limits_A^B g'(x)\cos x\,dx\,.$$

Первое слагаемое не превосходит по модулю $g(A) + g(B)$, оценим второе слагаемое:

$$\left|\int\limits_A^B g'(x)\cos x\,dx\right| \leq \int\limits_A^B |g'(x)|\,dx = g(A) - g(B).$$

Следовательно,

$$\left|\int\limits_A^B e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}\,dx\right| \leq 2g(A) \leq \frac{2}{A}\,,$$

и интеграл $I(\alpha)$ сходится равномерно. (Ред.)

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}\,. \ \blacktriangleright$$

68.2. Интеграл Лапласа

Вычислим *интеграл Лапласа*

$$K = \int\limits_0^\infty e^{-x^2}\,dx\,.$$

Докажем, что $K = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Введем параметр $t > 0$ положив $x = ut$. Тогда

$$K = \int\limits_0^\infty te^{-t^2u^2}\,du\,, \quad K\cdot e^{-t^2} = e^{-t^2}\int\limits_0^\infty te^{-t^2u^2}\,du\,.$$

Проинтегрируем последнее равенство:

$$K\int\limits_0^\infty e^{-t^2}\,dt = \int\limits_0^\infty dt\int\limits_0^\infty te^{-(1+u^2)t^2}\,du\,.$$

Отсюда получим

$$K^2 = \int\limits_0^\infty dt\int\limits_0^\infty te^{-(1+u^2)t^2}\,du \overset{?}{=} \int\limits_0^\infty du\int\limits_0^\infty te^{-(1+u^2)t^2}\,dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty \frac{du}{1+u^2} = \frac{\pi}{4}\,.$$

Покажем, что изменение порядка интегрирования законно. Это так, если оба внутренних интеграла – непрерывные функции от параметров. Имеем

$$\int\limits_0^\infty te^{-(1+u^2)t^2}\,dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+u^2}, \quad u \ge 0\,;$$

$$\int\limits_0^\infty te^{-(1+u^2)t^2}\,du = \begin{cases} Ke^{-t^2}, & t > 0,\\ 0, & t = 0.\end{cases}$$

Следовательно, второй интеграл терпит разрыв в точке $t = 0$ и непосредственно применить теорему об изменении порядка интегрирования нельзя.

Возьмем $t_0 > 0$ и рассмотрим область $\begin{cases} t \ge t_0\\ u \ge 0\end{cases}$. В этой области можно изменить порядок интегрирования в интеграле

$$\int\limits_{t_0}^\infty dt\int\limits_0^\infty te^{-(1+u^2)t^2}\,du = \int\limits_0^\infty du\int\limits_{t_0}^\infty te^{-(1+u^2)t^2}\,dt\,,$$

так как внутренние интегралы непрерывны:

$$\int\limits_{t_0}^\infty te^{-(1+u^2)t^2}\,dt = \frac{1}{2}\frac{1}{1+u^2}e^{-(1+u^2)t_0} \in C[0,\infty)\,,$$

$$\int\limits_0^\infty te^{-(1+u^2)t^2}\,du = Ke^{-t^2} \in C[t_0,\infty)\,.$$

Устремим $t_0 \to 0$ и докажем, что

$$\int\limits_0^{\infty} du \int\limits_{t_0}^{\infty} te^{-(1+u^2)t^2}\,dt \to \int\limits_0^{\infty} du \int\limits_0^{\infty} te^{-(1+u^2)t^2}\,dt\,.$$

Обозначим $F(t_0,u)=\int\limits_{t_0}^{\infty} te^{-(1+u^2)t^2}\,dt$. Из оценки $F(t_0,u)\le \frac{1}{2}\frac{1}{1+u^2}$ следует равномерная сходимость интеграла $\int\limits_0^{\infty} F(t_0,u)\,du$ при $t_0 \ge 0$. Следовательно, в этом интеграле можно сделать предельный переход: $\int\limits_0^{\infty} F(t_0,u)\,du \to \int\limits_0^{\infty} F(0,u)\,du$ ($t_0 \to 0$), что нам и требовалось.

Переходя в равенстве для повторных интегралов к пределу при $t_0 \to 0$, мы получим, что равенство имеет место и при $t_0 = 0$, то есть перемена порядка интегрирования законна. Таким образом,

$$\int\limits_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \quad \blacktriangleright$$

§ 69. Эйлеровы интегралы

Положим $u(x,t) = t^{x-1}e^{-t}$ (рис. 15.5 а) и рассмотрим *гамма-функцию Эйлера*

$$\Gamma(x) = \int\limits_0^{\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt\,.$$

При $x < 1$ этот интеграл имеет две особенности, как интеграл по неограниченной области и как интеграл от неограниченной в окрестности $t = 0$ функции. При $x \ge 1$ особенности в точке $t = 0$ нет. Представим гамма-функцию в виде

$$\Gamma(x) = \int\limits_0^{1} t^{x-1}e^{-t}\,dt + \int\limits_1^{\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt\,.$$

Интеграл $\int\limits_1^{\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$ всегда сходится; $\int\limits_0^{1} t^{x-1}e^{-t}\,dt$ сходится, если $x > 0$. Следовательно, функция $\Gamma(x)$ определена для $x > 0$. В области $0 < x_0 \le x \le X_0$ интеграл равномерно сходится, следовательно, $\Gamma(x) \in C\,(0,\infty)$. На всей полупрямой $(0,\infty)$ равномерной сходимости нет (графики функций $y(t) = t^{x-1}e^{-t}$ образуют при $x \to \infty$ "убегающий горб см. рис. 15.5 а).

Найдем экстремум функции $\Gamma(x)$. Имеем

$$\Gamma'(x) = \int\limits_0^\infty t^{x-1} \ln t \, e^{-t} \, dt \,, \quad \Gamma^{(n)}(x) = \int\limits_0^\infty t^{x-1} \left(\ln t \right)^n \, e^{-t} \, dt \,.$$

При $n = 2$ имеем

$$\Gamma''(x) = \int\limits_0^\infty t^{x-1} \left(\ln t \right)^2 \, e^{-t} \, dt > 0 \,,$$

следовательно, $\Gamma(x)$ выпукла на всей области определения. Так как $\Gamma(2) = \Gamma(1) = 1$ (см. рис. 15.5 б), то минимум гамма-функции находится между точками $x = 1$ и $x = 2$.

Изучение неэлементарных функций от одной переменной часто сводится к изучению элементарных функций от двух переменных. Пример тому – гамма-функция Эйлера.

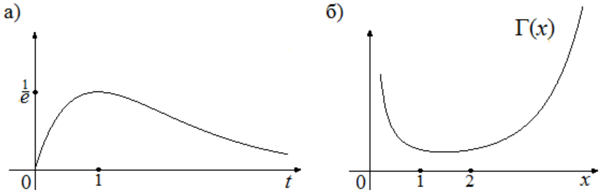


Рис. 15.5. а) $y(t) = t^{x-1} e^{-t}$ при $x = 2$; б) $\Gamma(x)$ – выпуклая функция.

Выведем функциональное уравнение

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \quad x > 0 \,.$$

Действительно, интегрируя по частям, получим

$$\Gamma(x+1) = \int\limits_0^\infty t^x e^{-t} \, dt = -\int\limits_0^\infty t^x \, de^{-t} = x \int\limits_0^\infty t^{x-1} e^{-t} \, dt \,.$$

После многократного применения функционального уравнения для $x \in (n, n+1]$ получим

$$\Gamma(x+1) = x(x-1)...(x-n) \cdot \Gamma(x-n) \,.$$

Таким образом, функциональное уравнение для $\Gamma(x)$ позволяет свести ее изучение к полуинтервалу $0 < x \leq 1$. [6)]

3 семестр
Лекция 20
(20.11.68)

[6)] Можно также свести изучение $\Gamma(x)$ к полуинтервалу $(1, 2]$, где $\Gamma(x)$ еще и ограничена. (Ред.)

Отметим некоторые частные значения гамма-функции. Очевидно, что

$$\Gamma(1) = \int\limits_0^\infty e^{-t}\,dt = 1\,.$$

Если $n \in \mathbb{N}$, то

$$\Gamma(n+1) = n(n-1)\cdots 1\cdot\Gamma(1) = n!\,.$$

Следовательно, гамма-функцию можно рассматривать как распространение понятия факториала на любые значения аргумента. Так что, например,

$$\left(\tfrac{1}{2}\right)! = \Gamma\left(\tfrac{3}{2}\right) = \tfrac{1}{2}\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right),$$

$$\left(n-\tfrac{1}{2}\right)! = \Gamma\left(n+\tfrac{1}{2}\right) = \left(n-\tfrac{1}{2}\right)\cdot\ldots\cdot\tfrac{1}{2}\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right).$$

Найдем $\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right)$. Сделаем замену $t = x^2$ и воспользуемся интегралом Лапласа:

$$\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \int\limits_0^\infty t^{-\frac{1}{2}}e^{-t}\,dt = 2\int\limits_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}\,.$$

Таким образом, $\left(\tfrac{1}{2}\right)! = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Бета-функцией Эйлера называется интеграл

$$\mathrm{B}(a,b) = \int\limits_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx\,.$$

Подынтегральная функция имеет особенности в точках 0 и 1. Интеграл сходится при $a, b > 0$, а при $a, b \geq 1$ является собственным интегралом. Можно доказать путем интегрирования по параметру, что

$$\mathrm{B}(a,b) = \tfrac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}\,.$$

Отсюда можно вывести, что

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \tfrac{\pi}{\sin\pi a}\,, \quad 0 < a < 1.$$

Последняя формула позволяет продолжить $\Gamma(x)$ в область $x < 0$.
Задание. Выучить эйлеровы интегралы по Фихтенгольцу [27] пункты 309 – 311, или [28] пункты 529 – 531.

§ 70. Формула Стирлинга

Выясним, с какой скоростью растет $n!$ при $n \to \infty$.
Теорема (формула Стирлинга).

$$n! = \Gamma(n+1) = n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}\,\{1 + o(1)\} =$$

$$= n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} \sqrt{2\pi}\,\{1 + o(1)\} \quad (n \to \infty)\,,$$

или

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}} = \sqrt{2\pi}\,.$$

Трудность при доказательстве этой формулы в получении коэффициента $\sqrt{2\pi}$; ограниченность, монотонность и существование положительного предела доказать легко.

Замечание. Мы сформулировали теорему для факториала, но та же асимптотика имеет место для гамма-функции вещественного аргумента:

$$\Gamma(x+1) = x^x e^{-x} \sqrt{2\pi x}(1 + o(1)), \quad x \to \infty\,.$$

Доказательство остается тем же самым, оно не зависит от предположения, что n целое.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы проведем, следуя Хинчину [30] § 113 . Имеем $\Gamma(n+1) = \int\limits_0^\infty t^n e^{-t}\,dt$. Обозначим $f(t) = t^n e^{-t}$ и определим максимум этой функции. Так как $f'(t) = nt^{n-1}e^{-t} - t^n e^{-t}$, то $f'(t_0) = 0$ при $t_0 = n$. Следовательно, в этой точке функция $f(t)$ имеет максимум. При этом максимальное значение функции $f(t_0) = n^n e^{-n}$.

Сделаем замену $t = nx$. Тогда

$$\Gamma(n+1) = \int\limits_0^\infty t^n e^{-t}\,dt = n^{n+1}\int\limits_0^\infty x^n e^{-nx}\,dx = n^{n+1}\int\limits_0^\infty \{xe^{-x}\}^n\,dx\,.$$

Подынтегральная функция имеет максимум при $x = 1$. Передвинем максимум в точку 0, положив $x = t + 1$. Тем самым мы приведем интеграл к виду

$$\Gamma(n+1) = C_n \int\limits_{-1}^\infty \{\varphi(t)\}^n\,dt\,,$$

где $C_n = n^{n+1}e^{-n}$ и $\varphi(t) = (t+1)e^{-t}$. Функция φ возрастает на $[-1, 0]$, убывает на $[0, \infty)$ и имеет в нуле максимум $\varphi(0) = 1$ (рис. 15.6).

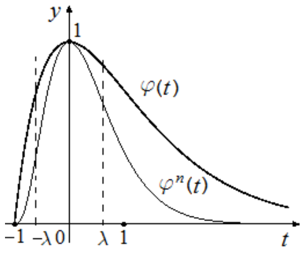


Рис. 15.6.

Зададим $\lambda = \lambda(n) > 0$, $\lambda \to 0$ ($n \to \infty$) и разобьем $[-1, \infty)$ на три участка: $[-1, -\lambda]$, $[-\lambda, \lambda]$, $[\lambda, \infty)$. Тогда

$$\Gamma(n+1) = C_n \int\limits_{-1}^\infty \{\varphi(t)\}^n\,dt = C_n \left\{ \int\limits_{-1}^{-\lambda} + \int\limits_{-\lambda}^{\lambda} + \int\limits_{\lambda}^{\infty} \right\} = C_n\,\{I_1 + I_2 + I_3\}\,.$$

Докажем, что $I_1 = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, $I_2 = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{n}} \cdot (1 + o(1))$, $I_3 = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ при подходящем $\lambda = \lambda(n)$. Зафиксируем произвольное $\theta \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ и положим $\lambda(n) = n^{-\theta}$. Тогда λ убывает медленнее, чем $\frac{1}{\sqrt{n}}$, но быстрее, чем $\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$.

Рассмотрим $I_2 = \int\limits_{-\lambda}^{\lambda} \{\varphi(t)\}^n \, dt$. Имеем

$$\ln \varphi(t) = \ln(t+1) - t = t - \frac{t^2}{2} + O\left(t^3\right) - t = -\frac{t^2}{2} + O\left(t^3\right),$$
$$n \ln \varphi(t) = -\frac{nt^2}{2} + O\left(nt^3\right).$$

Но $\left|nt^3\right| \le n\lambda^3 = n^{1-3\theta} = o(1)$, так как $\theta > \frac{1}{3}$. Поэтому

$$\{\varphi(t)\}^n = e^{\frac{-nt^2}{2} + o(1)} = e^{\frac{-nt^2}{2}} (1 + o(1)),$$
$$I_2 = \int\limits_{-\lambda}^{\lambda} e^{\frac{-nt^2}{2}} \, dt \cdot \{1 + o(1)\}.$$

Сравним I_2 с интегралом $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \, dx = \sqrt{\pi}$. Сделаем замену $x = t\sqrt{\frac{n}{2}}$. Тогда x меняется в пределах от $-\lambda\sqrt{\frac{n}{2}}$ до $\lambda\sqrt{\frac{n}{2}}$. Так как $\lambda\sqrt{n} \to \infty$ ($n \to \infty$), то

$$\int\limits_{-\lambda}^{\lambda} e^{\frac{-nt^2}{2}} \, dt = \sqrt{\frac{2}{n}} \int\limits_{-\lambda\sqrt{\frac{n}{2}}}^{\lambda\sqrt{\frac{n}{2}}} e^{-x^2} dx =$$
$$= \sqrt{\frac{2}{n}} \left\{ \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx + o(1) \right\} = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{n}} \{1 + o(1)\}.$$

Таким образом, $I_2 = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{n}} \cdot \{1 + o(1)\}$.

Оценим интеграл I_1:

$$I_1 = \int\limits_{-1}^{-\lambda} \{\varphi(t)\}^n \, dt \le (1 - \lambda) \{\varphi(-\lambda)\}^n \le \{\varphi(-\lambda)\}^n.$$

Так как $\ln \varphi(t) = -\frac{t^2}{2} + O\left(t^3\right)$, то $\ln \varphi(-\lambda) \le -\frac{\lambda^2}{3}$ при достаточно больших n. Тогда

$$\{\varphi(-\lambda)\}^n \le e^{-\frac{n\lambda^2}{3}} = e^{-\frac{n^{1-2\theta}}{3}} = e^{-\frac{n^{\alpha}}{3}} = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

так как $\alpha = 1 - 2\theta > 0$, и оценка для I_1 получена.

Разобьем интеграл I_3 на два интеграла:

$$I_3 = \int\limits_{\lambda}^{\infty} \{\varphi(t)\}^n \, dt = \int\limits_{\lambda}^{c} + \int\limits_{c}^{\infty}.$$

Константу c выберем так, чтобы $1+t \le e^{\frac{t}{2}}$ при $t \ge c$; можно взять $c=4$. Тогда

$$\int\limits_c^\infty \{\varphi(t)\}^n\,dt = \int\limits_c^\infty \{(1+t)e^{-t}\}^n\,dt \le \int\limits_c^\infty \left\{e^{-\frac{t}{2}}\right\}^n dt =$$
$$= \int\limits_c^\infty e^{-\frac{nt}{2}}\,dt \le \int\limits_0^\infty e^{-\frac{nt}{2}}\,dt = \frac{2}{n} = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Рассмотрим последний интеграл. Аналогично случаю с I_1, получаем оценку $\varphi(\lambda) \le e^{-n\frac{\lambda^2}{3}}$, откуда

$$\int\limits_\lambda^c \{\varphi(t)\}^n\,dt \le c\max_{t\ge\lambda}\{\varphi(t)\}^n = c\{\varphi(\lambda)\}^n \le ce^{-\frac{n\lambda^2}{3}} = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Собирая все интегралы, получим

$$\Gamma(n+1) = C_n\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{n}}\{1+o(1)\} \quad (n\to\infty),$$

или

$$\Gamma(n+1) = n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}\sqrt{2\pi}\{1+o(1)\} \quad (n\to\infty).$$

Формула Стирлинга доказана. ►

Глава 16

Ряды Фурье

3 семестр
Лекция 21
(22.11.68)

§ 71. Тригонометрический ряд Фурье

Обобщением рядов Фурье являются тригонометрические ряды.
Определение. *Тригонометрическим рядом* называется ряд вида

$$\tfrac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)\,,$$

где a_n $(n = 0, 1, \ldots)$ и b_n $(n = 1, 2, \ldots)$ – последовательности *коэффициентов тригонометрического ряда.*

Исторически тригонометрические ряды возникли в середине XVIII века при решении физической задачи о колебании струны и явились математическим осуществлением идеи, что всякое колебание разлагается в ряд гармоник.

С помощью формул Эйлера

$$\cos nx = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}\,, \quad \sin nx = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}$$

формально перейдем к другой записи тригонометрических рядов

$$\tfrac{a_0}{2} + \tfrac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{a_n \left(e^{inx} + e^{-inx}\right) + \tfrac{b_n}{i} \left(e^{inx} - e^{-inx}\right)\right\} =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n ,$$

где $z = e^{ix}$, так что $|z| = 1$. Ряд вида

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} \zeta^n = I + II ,$$

где $\zeta = \frac{1}{z}$, называется *рядом Лорана*. Если ряд Лорана сходится, то он сходится в кольце (см. рис. 16.1): ряд I сходится внутри круга K_1 с большим радиусом, ряд II – вне круга K_2 с меньшим радиусом. Тригонометрический ряд есть ряд Лорана на единичной окружности $|z| = 1$. Если единичная окружность содержится в области сходимости и первого I и второго II рядов, то тригонометрический ряд сходится.

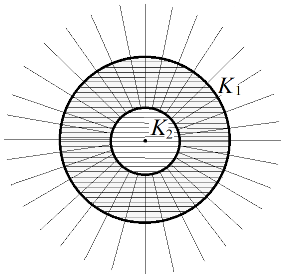


Рис. 16.1.

Рассмотрим ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ на единичной окружности, $z = e^{ix}$, $c_n = a_n + ib_n$. Тогда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{inx} = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + ib_n) e^{inx}$. Действительная часть суммы степенного ряда на единичной окружности равна

$$\mathrm{Re} S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx - b_n \sin nx .$$

Мы получили тригонометрический ряд. Таким образом, тригонометрический ряд формально представляет собой действительную часть степенного ряда на единичной окружности.

Определение. Тригонометрический ряд называется *рядом Фурье* функции $f(x)$,

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) ,$$

если коэффициенты этого ряда вычисляются по *формулам Фурье*

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \quad (n = 0, 1, \dots),$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Если $f(x) \in R[-\pi, \pi]$, то коэффициенты a_n, b_n могут быть вычислены. Коэффициент $\frac{a_0}{2}$ делает формулы для коэффициентов Фурье единообразными.

Теорема. *Всякий равномерно сходящийся тригонометрический ряд является рядом Фурье своей суммы.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть тригонометрический ряд $\frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ сходится равномерно к функции $f(x)$ на $(-\infty, \infty)$. Следовательно, $f(x)$ – 2π-периодическая непрерывная функция. Пусть k – некоторый номер. Умножение ряда

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

на $\cos kx$ не нарушает равномерной сходимости ряда. При этом получим ряд

$$\cos kx \left\{ \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \right\} = \cos kx \cdot f(x),$$

который можно почленно интегрировать на отрезке $[-\pi, \pi]$:

$$\frac{a_0}{2} \cos kx + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \cos kx = \cos kx \cdot f(x),$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \, dx + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx \, dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos kx \, dx \right).$$

Все интегралы справа, кроме интеграла $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx \, dx$, равны нулю, так как $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx \, dx = \begin{cases} 0 & (n \neq k) \\ \pi & (n = k) \end{cases}$. Следовательно,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx = \pi a_k,$$

откуда получаем

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \quad (n = 0, 1, \ldots).$$

Аналогично

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \quad (n = 1, 2, \ldots). \ \blacktriangleright$$

Система функций

$$\frac{1}{2}\,, \quad \cos x\,, \quad \sin x\,, \quad \cos 2x, \quad \sin 2x\,,\ \ldots$$

называется *тригонометрической системой*, а равенства

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx\, dx = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & (n \neq k) \\ \pi & (n = k) \end{array} \right. ,$$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos kx\, dx = 0\,,$$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin kx\, dx = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & (n \neq k) \\ \pi & (n = k) \end{array} \right.$$

выражают свойство ортогональности тригонометрической системы функций.

§ 72. Ряды Фурье по ортогональным системам. Квадратическая теория

Пусть функции φ и ψ интегрируемы на отрезке $[a, b]$. Введем *скалярное произведение* функций φ, ψ формулой

$$\int\limits_{a}^{b} \varphi(x)\psi(x)\, dx = (\varphi, \psi)\,.$$

Если $(\varphi, \psi) = 0$, то функции φ, ψ называются *ортогональными* (обозначают $\varphi \perp \psi$). Можно ввести норму $\|\varphi\| = \sqrt{(\varphi, \varphi)}$. Пространство функций с метрикой $\rho\,(\varphi_1, \varphi_2) = \|\varphi_1 - \varphi_2\|$ обозначим $R^2[-\pi, \pi]$ (метрические и евклидовы пространства нами уже рассматривались в § 47 с. 212 - 216). Это пространство функций, интегрируемых по Риману с квадратом, не является полным, так как не всякая последовательность Коши в нем сходится. (Пространство функций, интегрируемых с квадратом с помощью более общего интеграла – интеграла Лебега – полное).

Пусть задана система $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, $\ldots$ интегрируемых на отрезке $[a, b]$ функций. Такая система называется *ортогональной*, если

$$(\varphi_i, \varphi_j) = \int\limits_{a}^{b} \varphi_i(x)\varphi_j(x)\, dx = 0 \text{ при } i \neq j\,.$$

Тригонометрическая система является ортогональной системой функций на периоде или на $[-\pi, \pi]$.

Ряд вида $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n\varphi_n(x)$ называется *ортогональным рядом*, если $\{\varphi_n(x)\}$ – ортогональная система. Тригонометрический ряд есть частный случай ортогональных рядов.

Допустим, что $(\varphi_i, \varphi_i) = \lambda_i > 0$ для всякого i. Значит, $\int\limits_a^b \varphi_i^2(x)\,dx \neq 0$, т.е. среди φ_i нет функций, которые обращались бы в нуль всюду, кроме множества нулевой длины (функций, эквивалентных нулю). Всякое конечное число функций такой ортогональной системы линейно независимо.

Если для всякой функции из ортогональной системы имеем $(\varphi_i, \varphi_i) = 1$ $(i = 0, 1, \ldots)$, то система называется *ортонормированной*. Система

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x\,, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x\,, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x\,, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x\,, \ \ldots$$

– ортонормированная система функций на отрезке $[-\pi, \pi]$ и вообще на любом отрезке длины 2π. На такую систему переносятся свойства ортонормированных систем в евклидовом пространстве. Например, если $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – ортонормированная система и элемент $x = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k e_k$, то $\|x\| = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2}$. На плоскости это теорема Пифагора. Если $\{\varphi_n(x)\}$ – ортонормированная система, $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n\varphi_n(x)$ и $\|f\|^2 = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n^2$, то мы получаем обобщение теоремы Пифагора на бесконечномерный случай. Бывают ортонормированные системы, где это равенство неверно, но для тригонометрической системы это верное равенство.

Пусть $\Phi = \{\varphi_i(x)\} \subset R\,[a, b]$ – ортонормированная на $[a, b]$ система функций, $i = 0, 1, \ldots$, т.е. $(\varphi_i, \varphi_j) = 0$, $i \neq j$, $(\varphi_i, \varphi_i) = 1$ $i = 0, 1, \ldots$. Всякой функции $f \in R\,[a, b]$ можно поставить в соответствие ее ряд Фурье

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n\varphi_n(x)\,,$$

где $c_n = \int\limits_a^b f(x)\varphi_n(x)\,dx = (f, \varphi_n)$ – *коэффициенты Фурье* функции $f(x)$ по системе $\Phi = \{\varphi_i(x)\}$. Полином $s_n = \sum\limits_{k=0}^{n} (f, \varphi_k)\,\varphi_k(x)$ по системе Φ называется частичной суммой ряда Фурье.

При $k \le n$ имеем

$$(f - s_n, \varphi_k) = (f, \varphi_k) - (s_n, \varphi_k) = (f, \varphi_k) - (f, \varphi_k) = 0\,,$$

так как $(s_n, \varphi_k) = (f, \varphi_k)$. Следовательно, $(f - s_n, s_n) = 0$. Обозначим $\varphi = f - s_n$, $\psi = s_n$. Тогда $(\varphi, \psi) = 0$ и

$$\|\varphi + \psi\|^2 = (\varphi + \psi, \varphi + \psi) = (\varphi, \varphi) + (\psi, \psi) = \|\varphi\|^2 + \|\psi\|^2\,.$$

Таким образом, мы получаем *тождество Бесселя*

$$\|f\|^2 = \|s_n\|^2 + \|f - s_n\|^2\,.$$

Так как $\|f - s_n\|^2 \ge 0$, то $\|s_n\|^2 \le \|f\|^2$, а так как

$$\|s_n\|^2 = (s_n, s_n) = \sum_{k=0}^{n} c_k^2\,,$$

то $\sum\limits_{k=0}^{n} c_k^2 \le \|f\|^2$ ($\forall\, n \in \mathbb{N}$). Переходя в этом неравенстве к пределу при $n \to \infty$, получим *неравенство Бесселя* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k^2 \le \|f\|^2$. Значит, ряд из квадратов коэффициентов Фурье интегрируемой функции $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k^2$ всегда сходится.

Следствие. *Для любой интегрируемой функции ее коэффициенты Фурье по ортонормированной системе стремятся к нулю при* $n \to \infty$.

Перепишем неравенство Бесселя для тригонометрической системы:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right) \le \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx\,.$$

Как мы видели, коэффициенты Фурье по ортонормированной системе стремятся к 0 при $n \to \infty$. Следовательно, и коэффициенты Фурье по тригонометрической системе $a_n, b_n \to 0$ при $n \to \infty$. Например,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = 0\,,$$

что нетривиально, так как возникает возможность вычисления предела интеграла и когда подынтегральная функция не имеет предела при $n \to \infty$ (и тем более, не имеет равномерного предела).

3 семестр
Лекция 22
(27.11.68)

Пусть H – пространство со скалярным произведением (x,y). В этом пространстве определяются понятия нормы $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$ элемента x, ортогональности: $x \perp y$ если $(x,y) = 0$, и другие. Если $\{e_i\}$ – ортонормированная система элементов $e_i \in H$, т. е. $(e_i, e_j) = 0$ $(i \neq j)$, $\|e_i\| = 1$ ($\forall i \in \mathbb{N}$), то каждому элементу $x \in H$ можно поставить в соответствие ряд Фурье

$$x \sim \sum_i c_i e_i ,$$

где $c_i = (x, e_i)$ – коэффициенты Фурье. Так же, как в функциональном евклидовом пространстве, для всякого элемента $x \in H$ выполняется тождество Бесселя $\|x\|^2 = \|x - s_n\|^2 + \|s_n\|^2$. Отсюда следует, что $\|s_n\|^2 \leq \|x\|^2$, и так как $\|s_n\|^2 = \sum\limits_{k=0}^{n} c_k^2$, то выполняется неравенство Бесселя $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k^2 \leq \|x\|^2$.

Введем метрику $\rho(x,y) = \|x - y\|$. Особый интерес представляют *полные* относительно метрики пространства, т. е. такие, в которых последовательность Коши сходится. Если H неполно, (т. е. не является полным), то может оказаться, что элемент $\sum\limits_i c_i e_i \notin H$, хотя частичные суммы ряда $s_n = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i e_i \in H$. (Полные метрические пространства рассматривались в п.49.1.)

Определение. Если пространство со скалярным произведением является полным относительно метрики, порожденной скалярным произведением, то оно называется *гильбертовым*.

Например, всякое конечномерное евклидово пространство – гильбертово. [1)]

Теорема. *Если H – гильбертово пространство, то любой ряд Фурье по ортонормированной системе $\{e_i\}$ (конечной или бесконечной) сходится.*

Это значит, что если $x \sim \sum\limits_i c_i e_i$ – ряд Фурье, то найдется $x_0 \in H$ такой, что $\|s_n - x_0\| \to 0$ $(n \to \infty)$, т. е. $x_0 = \sum\limits_i c_i e_i$.

[1)] Часто (см., например, [7]) гильбертовым пространством называют полное бесконечномерное евклидово пространство. (Ред.)

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если система $\{e_i\}$ конечна, то ряд Фурье представляет собой просто конечную сумму. Пусть система $\{e_i\}$ бесконечна, $x \in H$ и $\sum\limits_i c_i e_i$ – ряд Фурье элемента x. В силу полноты H достаточно установить, что последовательность $\{s_n\}$ частичных сумм этого ряда есть последовательность Коши. Справедливо равенство $\|s_m - s_n\|^2 = \sum\limits_{i=n+1}^{m} c_i^2$ при $m > n$. По неравенству Бесселя ряд $\sum\limits_i c_i^2$ сходится. Значит, по критерию Коши для сходимости числового ряда $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_0(\varepsilon) \;\; \forall m \geq n \geq n_0(\varepsilon)$ $\sum\limits_{i=n+1}^{m} c_i^2 < \varepsilon$. Следовательно, $\{s_n\}$ является последовательностью Коши, и ряд Фурье элемента x сходится. ►

Выясним, когда ряд Фурье $x \sim \sum\limits_i c_i e_i$ сходится к x, т. е. когда $\|s_n - x\| \to 0$ ($n \to \infty$). Имеем $\|x - s_n\|^2 + \|s_n\|^2 = \|x\|^2$ по тождеству Бесселя. Следовательно, $\|x - s_n\|^2 = \|x\|^2 - \|s_n\|^2 = \|x\|^2 - \sum\limits_{i=1}^{n} c_i^2$, т. е.

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 \;\; \Leftrightarrow \;\; \|x - s_n\|^2 \to 0 \quad (n \to \infty)\,.$$

Таким образом, сходимость ряда Фурье элемента x к самому элементу x, эквивалентна тому, что неравенство Бесселя для него превращается в равенство. Равенство

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} c_i^2$$

называется *равенство Парсеваля*.

Замечание. Может оказаться, что равенство Парсеваля имеет место для одних элементов гильбертова пространства H и не имеет места для других. [2)]

Итак, мы получили, что ряд Фурье $x \sim \sum\limits_i c_i e_i$ сходится к x тогда и только тогда, когда для x выполняется равенство Парсеваля (бесконечномерный аналог теоремы Пифагора).

Определение. Ортонормированная система $\{e_i\}$ в пространстве H со скалярным произведением называется *замкнутой*, если равенство Парсеваля выполняется для каждого элемента x из

[2)] Например, если в пространстве $R^2[-\pi, \pi]$ взять ортонормированную систему косинусов, то для четных функций выполняется равенство Парсеваля, а для других – нет. (Ред.)

пространства H .

Для дальнейшего нам понадобится следующее

Утверждение. *Скалярное произведение* (x, y) *– числовая функция двух элементов, непрерывная по их совокупности.*

Действительно, применив неравенство Коши – Буняковского $|(a, b)| \leq \|a\| \, \|b\|$, получим

$$|(x, y) - (x', y')| \leq |(x, y) - (x, y')| + |(x, y') - (x', y')| =$$
$$= |(x, y - y')| + |(x - x', y')| \leq \|x\| \, \|y - y'\| + \|x - x'\| \, \|y'\| \ .$$

Отсюда следует, что скалярное произведение есть непрерывная функция по совокупности двух аргументов (в частности, скалярное произведение (x, y) непрерывно по x и непрерывно по y). ▶

Критерий замкнутости систем в гильбертовом пространстве. *Ортонормированная система* $\{e_i\}$ *в гильбертовом пространстве* H *замкнута тогда и только тогда, когда не существует ненулевого элемента* $f \in H$ *такого, что* $(f, e_i) = 0$ $(\, i = 1, 2, ...\,)$.

Таким образом, система $\{e_i\}$ замкнута в H тогда и только тогда, когда всякий элемент f такой, что $(f, e_i) = 0$ $(\, i = 1, 2, ...\,)$ – нулевой, т. е. $f = \theta$, где θ – нулевой элемент H.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Н е о б х о д и м о с т ь. Допустим, что существует такой элемент f , $f \neq \theta$, для которого $c_i(f) = (f, e_i) = 0$ для всех номеров i . Таким образом, $\sum\limits_{i=1}^{\infty} c_i^2 = 0$. Но $f \neq \theta$, значит, $\|f\|^2 > 0$. Следовательно, равенство Парсеваля не выполняется, и значит, система $\{e_i\}$ незамкнута. (Заметим, что при доказательстве необходимости мы не пользуемся полнотой пространства H).

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть система не замкнута, т. е. существует f , $\|f\|^2 > \sum\limits_{i=1}^{\infty} c_i^2$. Последовательность частичных сумм ряда Фурье элемента f сходится в H к некоторому элементу $f_0 = \sum\limits_{i=1}^{\infty} c_i e_i$, $\|f_0\|^2 = \sum\limits_{i=1}^{\infty} c_i^2 < \|f\|^2$. Рассмотрим элемент $x_0 = f - f_0$, $\|x_0\| \neq 0$. Покажем, что $(x_0, e_i) = 0$ $(\, i = 1, 2, ...\,)$.

Теперь, так как $s_n \xrightarrow{H} f_0 = \sum\limits_{i=1}^{\infty} c_i e_i$ и $(s_n, e_i) = c_i$, то в силу непрерывности скалярного произведения можно перейти к пределу при $n \to \infty$. Тогда $(f_0, e_i) = c_i$, и значит,

$$(x_0, e_i) = (f, e_i) - (f_0, e_i) = c_i - (f_0, e_i) = 0 \ \ (i = 1, 2, \dots).$$

Так как $\|x_0\| \neq 0$, это противоречит условию замкнутости системы $\{e_i\}$. ▶

Теорема единственности для рядов Фурье. *Пусть H – пространство со скалярным произведением и $\{e_i\}$ – замкнутая ортонормированная система в H. Пусть $x \sim \sum\limits_i c_i e_i$, $y \sim \sum\limits_i d_i e_i$. Тогда, если $x \neq y$, то их ряды Фурье отличны друг от друга, т. е. $c_i \neq d_i$ для некоторого номера i.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В противном случае получили бы $(x - y, e_i) = 0$, что противоречит замкнутости системы $\{e_i\}$. ▶

Таким образом, ряд Фурье по замкнутой ортонормированной системе однозначно определяет функцию.

Рассмотрим теперь экстремальные свойства частичных сумм рядов Фурье. Пусть $\{e_i\}$ – ортонормированная система в пространстве H со скалярным произведением, $x \sim \sum\limits_i c_i e_i$, $s_n = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i e_i$, $p_n = \sum\limits_{i=1}^{n} d_i e_i$. Нас будет интересовать уклонение полиномов p_n от элемента x. Это уклонение является функцией коэффициентов d_i. Величина

$$\inf_{p_n} \|x - p_n\|$$

называется *наилучшим приближением* элемента x полиномами вида $p_n = \sum\limits_{i=1}^{n} d_i e_i$ (n фиксировано).

Теорема (экстремальное свойство частичных сумм Фурье). *Пусть H – пространство со скалярным произведением, $\{e_i\}$ – ортонормированная система, $x \sim \sum\limits_i c_i e_i$ – ряд Фурье элемента x по системе $\{e_i\}$, $s_n = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i e_i$, $p_n = \sum\limits_{i=1}^{n} d_i e_i$. Тогда*

$$\inf_{p_n} \|x - p_n\| = \|x - s_n\| \ .$$

При этом $\|x - s_n\| = \|x - p_n\| \Leftrightarrow p_n = s_n$.

Таким образом, наилучшее приближение элемента x элементами вида $p_n = \sum\limits_{i=1}^{n} d_i e_i$ достигается тогда и только тогда, когда $p_n = s_n$, т. е. когда $d_i = c_i$ ($i = 1, \dots, n$).

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы.

$$\|x-p_n\|^2=(x-p_n,x-p_n)=$$
$$=(x-s_n+(s_n-p_n)\,,x-s_n+(s_n-p_n))=\|x-s_n\|^2+\|s_n-p_n\|^2\ ,$$

так как элемент $x-s_n$ ортогонален любому полиному по системе $\{e_1,...,e_n\}$ ввиду того, что $(x,e_i)=(s_n,e_i)$ для $i=1,...,n$. Значит, для любого p_n выполняется неравенство $\|x-p_n\|\geq\|x-s_n\|$, которое обращается в равенство тогда и только тогда, когда $\|s_n-p_n\|=0$, т. е. тогда и только тогда, когда $p_n=s_n$. ▶

Следствие. *Пусть H – пространство со скалярным произведением, $\{e_i\}$ – ортонормированная система элементов в H и $\forall\, x\in H\ \ \exists p_n\ \ (n=1,2,\dots)\ \|x-p_n\|\to 0\ \ (n\to\infty)$. Тогда $\{e_i\}$ замкнута.*

Действительно, условие: $\forall x\in H\ \ \|x-s_n\|\to 0\ \ (n\to\infty)$ эквивалентно замкнутости системы $\{e_i\}$. Но в силу теоремы

$$0\leq\|x-s_n\|\leq\|x-p_n\|\to 0\quad(n\to\infty)\,.$$

Следовательно, система $\{e_i\}$ замкнута. ▶

§ 73. Приложение к тригонометрической системе

73.1. Принцип локализации для рядов Фурье по тригонометрической системе

Пусть на отрезке $[-\pi,\pi]$ задана интегрируемая функция. Напишем для нее ряд Фурье по тригонометрической системе

$$f(x)\sim\tfrac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\,.$$

Нас интересует поведение последовательности частичных сумм $\{s_n(x)\}$ этого ряда, т. е. поведение последовательности

$$s_n(x)=\tfrac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

при $n\to\infty$. Пусть точка $x_0\in(\alpha,\beta)\subset[-\pi,\pi]$. Изменим функцию $f(x)$ вне интервала (α,β) (рис. 16.2), т. е. рассмотрим функцию $\tilde f(x)$ такую, что $\tilde f(x)=f(x)$ при $x\in(\alpha,\beta)$ и $\tilde f(x)\in R\,[-\pi,\pi]$.

Оказывается, что частичные суммы $s_n(x_0, f)$ и $s_n(x_0, \tilde{f})$ рядов Фурье для функций $f(x)$ и $\tilde{f}(x)$ в точке x_0 ведут себя одинаково, а именно

$$s_n(x_0,f) - s_n(x_0,\tilde{f}) \to 0 \ \ (n \to \infty)\,.$$

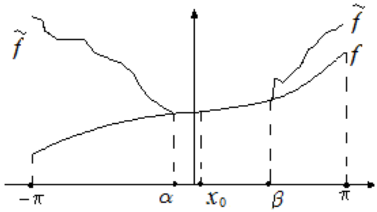


Рис. 16.2.

Это утверждение выражает принцип локализации рядов Фурье по тригонометрической системе. Но не для всякой полной системы в гильбертовом пространстве этот принцип имеет место.

Теорема (принцип локализации). *Пусть* $f(x) \in R[-\pi,\pi]$, $(\alpha,\beta) \subset [-\pi,\pi]$, $f(x) = 0$ ($x \in (\alpha,\beta)$). *Тогда для любого* $x_0 \in (\alpha,\beta)$ $s_n(x_0,f) \to 0$ ($n \to \infty$).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $a_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\,dt$ ($k = 0,1,\dots$), $b_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt\,dt$ ($k = 1,2,\dots$), то

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\left\{\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos kt\cos kx + \sin kt\sin kx\right\}dt =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\left\{\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos k(t-x)\right\}dt\,.$$

3 семестр
Лекция 23
(29.11.68)

Исследуем ряд Фурье в точке.[3] Обозначим $u = t - x$. Тригонометрический полином $\frac{1}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n}\cos ku = D_n(u)$ называется *ядром Дирихле* для тригонометрической системы (рис. 16.3). Тогда частичные суммы

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(t-x)\,dt\,.$$

Полином $D_n(u)$ имеет период $\omega = 2\pi$ и непрерывен на всей прямой. Умножим $D_n(u)$ на $2\sin\frac{u}{2}$. Получим

$$D_n(u)\,2\sin\frac{u}{2} = \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)u\,,$$

[3] По выражению С. Б. С. это "толстый вопрос". (Ред.)

$$D_n(u) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos ku = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{2\sin\frac{u}{2}} .$$

Недостаток последней формулы в том, что правая часть не определена для точек $u_k = 2\pi k$. Доопределим в этих точках правую часть как предел (предел существует, так как левая часть имеет предел). Для $u = 0$ имеем $D_n(0) = n + \frac{1}{2}$.

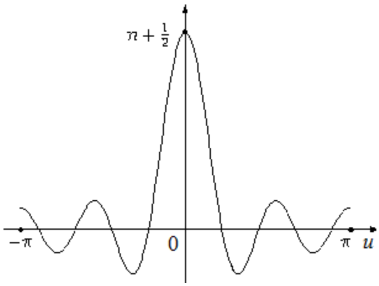


Рис. 16.3.

Рассмотрим теперь $D_n(u)$ для $|u| \le \pi$. Для $u \ne 0$ таких, что $\left(n + \frac{1}{2}\right) u = k\pi$, имеем $D_n(u) = 0$. Так как $|D_n(u)| \le \frac{1}{2\left|\sin\frac{u}{2}\right|}$, то за исключением любой наперед заданной окрестности точки нуль, функция $D_n(u)$ ограничена и, с точностью до ограниченного множителя $\frac{1}{2\sin\frac{u}{2}}$, ведет себя как $\sin\left(n + \frac{1}{2}\right) u$.

Функция $f(x)$ определена на отрезке $[-\pi, \pi]$. Рассмотрим ее на $(-\pi, \pi]$ и продолжим на всю числовую прямую как периодическую функцию: $f(x + 2k\pi) = f(x)$. Тогда

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(t - x)\,dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x + u)D_n(u)\,du .$$

Так как подынтегральное выражение – функция с периодом 2π, то безразлично, по какому отрезку длины 2π ее интегрировать. Значит,

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x + u)D_n(u)\,du .$$

Этот интеграл называется *интеграл Дирихле*.

Итак, для любого $x_0 \in (\alpha, \beta)$

$$s_n(x_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x_0+u) \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{2\sin\frac{u}{2}}\,du = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x_0+u)}{2\sin\frac{u}{2}} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) u\,du .$$

Так как $\sin\left(n + \frac{1}{2}\right) u = \sin nu \cos\frac{u}{2} + \cos nu \sin\frac{u}{2}$, то

$$s_n(x_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x_0+u)}{2\mathrm{tg}\frac{u}{2}} \sin nu\,du + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x_0 + u) \cos nu\,du .$$

Интеграл $\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x_0+u)\cos nu\,du$ есть коэффициент Фурье функции $f(x_0+u)$ и поэтому стремится к нулю при $n\to\infty$ (по теореме о стремлении к нулю коэффициентов Фурье – следствию неравенства Бесселя).

Рассмотрим $\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{f(x_0+u)}{2\operatorname{tg}\frac{u}{2}}\sin nu\,du$ и функцию $\varphi(u)=\frac{f(x_0+u)}{2\operatorname{tg}\frac{u}{2}}$. Так как $x_0\in(\alpha,\beta)$, а $f(x)=0$ при $x\in(\alpha,\beta)$, то $\exists\delta>0\ \ \forall u$, $|u|<\delta$, $f(x_0+u)=0$ и, значит, $\varphi(u)=0$. Для остальных u, $|u|>\delta$, $\varphi(u)$ есть произведение двух интегрируемых функций $f(x_0+u)$ и $\frac{1}{2\operatorname{tg}\frac{u}{2}}$. Следовательно, $\varphi(u)\in R[-\pi,\pi]$. Значит, и первый интеграл есть коэффициент Фурье интегрируемой функции и стремится к нулю при $n\to\infty$.

Таким образом, для любого $x_0\in(\alpha,\beta)$ $s_n(x_0)\to0$ ($n\to\infty$). ►

Следствие. Воспользовавшись тем, что $D_n(-u)=D_n(u)$, из интеграла Дирихле для частичных сумм получим формулу

$$s_n(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+u)D_n(u)\,du=\frac{1}{\pi}\left\{\int\limits_{-\pi}^{0}+\int\limits_{0}^{\pi}\right\}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\{f(x+u)+f(x-u)\}\,D_n(u)\,du\,.$$

Замечания. 1. Равномерности сходимости к нулю $s_n(x_0)$ на всем интервале (α,β) нет, но $s_n(x_0)\rightrightarrows 0$ ($n\to\infty$) равномерно на каждом отрезке из (α,β).

2. Так как $D_n(u)=\frac{1}{2}+\sum\limits_{k=1}^{n}\cos ku$, то $\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}D_n(t)dt=1$.

3. Отметим без доказательства, что $\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|D_n(t)|\,dt\to\infty$ ($n\to\infty$). В силу этого существуют непрерывные функции, ряды Фурье которых расходятся в отдельных точках (не доказываем).

4. Доказано, что для непрерывной функции ряд Фурье сходится для большого числа точек. [4)]

[4)] Здесь, вероятно, имеется в виду теорема Карлесона [6], до этого сходимость ряда Фурье непрерывной функции хотя бы в одной точке была неизвестна (см. также [12], где приводится доказательство теоремы Карлесона методом Фефермана). (Ред.)

73.2. Суммы Фейера

Нельзя ли "исправить" частичные суммы Фурье таким образом, чтобы получить лучшую сходимость к функции? Фейер рассмотрел средние арифметические сумм Фурье. Такие суммы

$$\sigma_n(x) = \tfrac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} s_k(x) ,$$

где $s_k(x)$ – суммы Фурье, называются *суммами Фейера.*

Далее (см. п. 73.3 с. 428) будет доказана

Теорема Фейера. *Пусть функция $f(x)$ с периодом $\omega = 2\pi$ определена на всей числовой прямой и $f(x) \in R[-\pi, \pi]$.*

1) *Пусть x_0 – точка, в которой существуют пределы $f(x_0+0)$ и $f(x_0-0)$. Тогда*

$$\sigma_n(x_0) \to \tfrac{1}{2}\{f(x_0+0) + f(x_0-0)\} \ \ (n \to \infty).$$

В частности, если $f(x) \in C(x_0)$, то $\sigma_n(x_0) \to f(x_0)$ $(n \to \infty)$.

2) *Если $f(x) \in C(\alpha, \beta)$ и $[a, b] \subset (\alpha, \beta)$, то*

$$\sigma_n(x) \rightrightarrows f(x) \ \ (n \to \infty) \text{ на } [a, b].$$

В частности, если периодическая с периодом $\omega = 2\pi$ функция $f(x) \in C(-\infty, \infty)$, то $\sigma_n(x) \rightrightarrows f(x)$ $(n \to \infty)$ на $(-\infty, \infty)$.

Теорема содержит в себе теорему Вейерштрасса для периодических функций (всякую непрерывную периодическую функцию можно приблизить тригонометрическими полиномами с любой степенью точности в пространстве $C[-\pi, \pi]$).

Чтобы привести другие следствия этой теоремы, нам понадобятся некоторые формулы и результаты.

Пусть дан ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$ и $s_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ – последовательность частичных сумм этого ряда. Тогда

$$\sigma_n = \tfrac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} s_k = u_0 + \left(1 - \tfrac{1}{n+1}\right) u_1 + \ldots + \tfrac{1}{n+1} u_n =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \left(1 - \tfrac{k}{n+1}\right) u_k = \sum_{k=0}^{n} u_k - \tfrac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} k u_k .$$

Отсюда следует, что $s_n - \sigma_n = \tfrac{1}{n+1} \sum\limits_{k=1}^{n} k u_k$. Докажем, что если $s_n \to s$ $(n \to \infty)$, то $\sigma_n \to s$ $(n \to \infty)$.

Теорема Кронекера. *Если числовой ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$ сходится, то $\sum\limits_{k=1}^{n} k u_k = o(n)$ $(n \to \infty)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим $r_n = \sum\limits_{k=n}^{\infty} u_k$ – остатки ряда, тогда $u_n = r_n - r_{n+1}$. Так как ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$ сходится, то $r_n \to 0$ ($n \to \infty$). Тогда

$$\sum_{k=1}^{n} ku_k = \sum_{k=1}^{n} k\,(r_k - r_{k+1}) = \sum_{k=1}^{n} kr_k - \sum_{k=2}^{n+1}(k-1)r_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} r_k - nr_{n+1} = o(n) \quad (n\to\infty)\,. \qquad \blacktriangleright$$

Из формулы для разности частичных сумм Фурье и Фейера и из теоремы Кронекера вытекает следующая

Теорема. *Если частичные суммы ряда Фурье интегрируемой функции сходятся в некоторой точке, то и частичные суммы Фейера сходятся в этой точке и к тому же пределу.*

Теперь мы можем получить следующие

Следствия из теоремы Фейера. *Пусть для функции* $f(x)$ *существуют пределы* $f(x_0+0)$ *и* $f(x_0-0)$. *Тогда,*

если $s_n(x_0)$ *сходится, то*

$$s_n(x_0) \to \tfrac{1}{2}\,\{f(x_0+0)+f(x_0-0)\} \ \ (\,n\to\infty\,).$$

В частности эта формула справедлива, если x_0 *– точка разрыва первого рода.*

Если $f(x)\in C(x_0)$ *и* $s_n(x_0)$ *сходится, то*

$$s_n(x_0) \to f(x_0) \ \ (\,n\to\infty\,).$$

73.3. Ядро Фейера

Получим для суммы Фейера выражение в виде *интеграла Фейера*.

$$\sigma_n(x) = \tfrac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} s_k(x) = \tfrac{1}{(n+1)\pi}\sum_{k=0}^{n}\int_0^{\pi}\{f(x+u)+f(x-u)\}D_k(u)du =$$

$$= \tfrac{1}{(n+1)\pi}\int_0^{\pi}\{f(x+u)+f(x-u)\}\sum_{k=0}^{n} D_k(u)\,du\,;$$

$$\sum_{k=0}^{n} D_k(u) = \sum_{k=0}^{n}\frac{\sin\left(k+\frac12\right)u}{2\sin\frac{u}{2}} = \frac12\left(\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\right)u}{\sin\frac{u}{2}}\right)^2.$$

Следовательно,

$$\sigma_n(x) = \tfrac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} s_k(x) = \tfrac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\{f(x+u)+f(x-u)\}\,K_n(u)\,du\,,$$

где

$$K_n(u) = \frac{1}{2(n+1)} \left(\frac{\sin \frac{n+1}{2} u}{\sin \frac{u}{2}} \right)^2$$

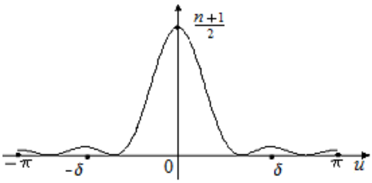


Рис. 16.4.

– *ядро Фейера* (рис. 16.4). Отметим, что $K_n(u) \geq 0$. Если функция $f \equiv 1$, то

$$\frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} K_n(u) du = 1$$

(это следует также и из того, что интеграл от периодического многочлена по периоду равен интегралу от свободного члена). Так как $|K_n(u)| \leq \frac{1}{2(n+1)\sin^2 \frac{u}{2}}$, то $K_n(u) \to 0$ $(n \to \infty)$, $u \neq 0$, равномерно на всяком отрезке из $[-\pi, \pi]$, не содержащем 0.

3 семестр
Лекция 24
(04.12.68)

Ядро Фейера есть среднее арифметическое ядер Дирихле:

$$K_n(t) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} D_k(t) = \frac{1}{2(n+1)} \left(\frac{\sin \frac{n+1}{2} t}{\sin \frac{t}{2}} \right)^2 .$$

Функция в правой части равенства определена при $t \neq 2\pi k$. Если раскрыть неопределенность в точках $t = 2\pi k$, то соответствующее значение принимается за значение функции $K_n(t)$: $K_n(2\pi k) = \frac{n+1}{2}$.

Рассмотрим, в каких точках ядро Фейера $K_n(t)$ обращается в нуль на промежутке $|t| \leq \pi$. Это точки $t_i = \frac{2\pi i}{n+1}$, $i \neq 0$, $|t_i| \leq \pi$. В нулях ядра Фейера двойной нуль [5] .

Перечислим отмеченные

Свойства ядра Фейера.

1) *Неотрицательность*: $K_n(t) \geq 0$.

2) $\frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} K_n(t)\, dt = 1$.

[5] Это следует из дифференцируемости и неотрицательности функции $K_n(t)$. (Ред.)

Из 1) и 2) следует, что $\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|K_n(t)|\,dt = 1$. Ядро Дирихле таким свойством не обладает.

3) $K_n(u) \le \frac{1}{2(n+1)\sin^2\frac{u}{2}}$, $\delta \le |t| \le \pi$. У ядра Дирихле вне маленького отрезка $[-\delta, \delta]$ размахи волн ограничены, а у ядра Фейера стремятся к нулю.

Из свойства 3) следует, что

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{\delta\le|t|\le\pi} K_n(t)\,dt \le \frac{1}{2(n+1)\sin^2\frac{\delta}{2}}\frac{2\pi}{\pi} = \frac{1}{(n+1)\sin^2\frac{\delta}{2}},$$

$$1 \ge \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\delta}^{\delta} K_n(t)\,dt \ge 1 - \frac{1}{(n+1)\sin^2\frac{\delta}{2}},$$

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\delta}^{\delta} K_n(t)\,dt \to 1 \quad (n\to\infty).$$

Таким образом, почти вся площадь криволинейной трапеции под графиком функции $K_n(t)$ при достаточно большом номере n сосредоточена в окрестности точки 0 и равна единице. Отсюда вытекает способ доказательства теоремы Фейера. Пусть $f(x)$ – непрерывная 2π-периодическая функция; зафиксируем значение x, тогда свертка функции с ядром Фейера

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)K_n(t)\,dt \approx \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\delta}^{\delta} f(x+t)K_n(t)dt \approx$$

$$\approx \frac{1}{\pi}f(x)\int\limits_{-\delta}^{\delta} K_n(t)dt \approx f(x),$$

так как значения функции $f(x+t)$ мало меняются при $t\in[-\delta,\delta]$.

Так же получается и доказательство теоремы Вейерштрасса о приближении непрерывной периодической функции тригонометрическими полиномами. Основная идея доказательства теорем Вейерштрасса и Фейера состоит в том, что мы рассматриваем свертку функции с некоторым интегральным ядром $\Phi_n(t)$, которое является тригонометрическим полиномом, и в результате получаем тоже тригонометрический полином:

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\Phi_n(t)\,dt = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\Phi_n(x-t)\,dt = P_n(x).$$

Если ядро локализовано в окрестности нуля, подобно ядру Фейера, то значение свертки, т.е. значение полинома, будет близко к

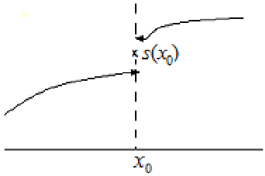


Рис. 16.5.

значению функции. Доказательство при помощи свертки функции с ядром годится и для теоремы Вейерштрасса о приближении непрерывной функции алгебраическими многочленами (у нас было другое доказательство, см. п. 65.2 с. 379). В этом случае ядро надо брать в виде алгебраического многочлена и тогда соответствующая свертка будет алгебраическим многочленом.

Теорема Фейера. 1) *Пусть функция* $f(x) \in R[-\pi, \pi]$ *и имеет период* $\omega = 2\pi$. *Предположим, что в некоторой точке* x_0 *существуют пределы функции* $f(x_0+0)$ *и* $f(x_0-0)$. *Обозначим*

$$s = s(x_0) = \tfrac{1}{2}\{f(x_0+0) + f(x_0-0)\}.$$

Тогда $\sigma_n(x_0) \to s(x_0)$ ($n \to \infty$). *В частности, если* $f(x) \in C(x_0)$, *то* $\sigma_n(x_0) \to f(x_0)$ ($n \to \infty$).

2) *Пусть функция* $f(x) \in R[-\pi, \pi]$, *имеет период* $\omega = 2\pi$, $f(x) \in C(\alpha, \beta)$ *и* $[a, b] \subset (\alpha, \beta)$. *Тогда* $\sigma_n(x) \rightrightarrows f(x)$ ($n \to \infty$) *на* $[a, b]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Напишем выражение для разности

$$\sigma_n(x_0) - s(x_0) = \tfrac{1}{\pi}\int_0^\pi \{f(x_0+t) + f(x_0-t) - 2s(x_0)\}\, K_n(t)\, dt.$$

1) Рассмотрим выражение

$$f(x_0+t) - f(x_0+0) + f(x_0-t) - f(x_0-0)$$

для значений $0 \le t \le \pi$. Зададим $\varepsilon > 0$. Так как для функции существуют пределы $f(x_0+0)$ и $f(x_0-0)$ (рис. 16.5), то можно найти $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любого t, $0 < t \le \delta$, выполняются неравенства

$$|f(x_0+t) - f(x_0+0)| < \varepsilon, \quad |f(x_0-t) - f(x_0-0)| < \varepsilon.$$

Разобьем интеграл в выражении для $\sigma_n(x_0) - s(x_0)$ на части

$$\sigma_n(x_0) - s(x_0) = \tfrac{1}{\pi}\int_0^\delta + \tfrac{1}{\pi}\int_\delta^\pi = I_1^{(n)} + I_2^{(n)}.$$

Имеют место оценки

$$\left|I_1^{(n)}\right| \le \tfrac{1}{\pi} 2\,\varepsilon \int_0^\delta K_n(t)\, dt < \tfrac{2}{\pi}\varepsilon \int_0^\pi K_n(t)\, dt = \varepsilon \quad (\forall\, n),$$

$$\left|I_2^{(n)}\right| \le \tfrac{1}{\pi} 4M \int_\delta^\pi K_n(t)\, dt < \varepsilon \quad (\forall\, n \ge n_0(\delta) = N_0(\varepsilon)),$$

где $M = \sup|f(x)| < \infty$, так как функция ограничена на периоде. Следовательно

$$|\sigma_n(x_0) - s(x_0)| < 2\,\varepsilon \quad (\forall\, n \geq N_0(\varepsilon))\,,$$

и $\sigma_n(x_0) \to s(x_0)$ ($n \to \infty$).

Замечание. Утверждение 1) теоремы справедливо в более общем случае. Достаточно потребовать существование предела

$$\lim_{t\to+0} \{f(x_0+t) + f(x_0-t)\}\,.$$

Действительно, обозначим теперь через $2s(x_0)$ этот предел. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что $|f(x_0+t) + f(x_0-t) - 2s(x_0)| < \varepsilon$. Далее, так же, как это было сделано выше, доказываем, что $\sigma_n(x_0) \to s(x_0)$ ($n \to \infty$).

Найдем условие, эквивалентное тому, что

$$\lim_{t\to+0} \{f(x_0+t) + f(x_0-t)\} = 2s(x_0)\,.$$

Обозначим $f(x+t) = F(t)$. Тогда $F(t) = F_{\text{чет}}(t) + F_{\text{неч}}(t)$, где $F_{\text{чет}}(t) = \frac{F(t)+F(-t)}{2}$ – четная составляющая функции F, а $F_{\text{неч}}(t) = \frac{F(t)-F(-t)}{2}$ – нечетная. Тогда $F_{\text{неч}}(t) + F_{\text{неч}}(-t) = 0$ и

$$f(x_0+t) + f(x_0-t) = F_{\text{чет}}(t) + F_{\text{чет}}(-t) = 2F_{\text{чет}}(t)\,.$$

Таким образом, существование предела

$$\lim_{t\to+0} \{f(x_0+t) + f(x_0-t)\} = 2s(x_0)$$

эквивалентно условию

$$F_{\text{чет}}(t) \to s(x_0) \qquad (\,t \to 0\,).$$

2) Выберем точки a_1 и b_1 так, чтобы $\alpha < a_1 < a < b < b_1 < \beta$. Тогда $[a_1, b_1] \subset (\alpha, \beta)$ и $f(x)$ равномерно непрерывна на $[a_1, b_1]$. В силу равномерной непрерывности функции $\forall\,\varepsilon > 0 \ \ \exists\,\delta > 0$ $\forall\, x, x' \in [a_1, b_1]$, $|x - x'| < \delta$, $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$. Кроме этих условий подчиним δ условиям $\delta \leq a - a_1$, $\delta \leq b_1 - b$. Тогда $\forall\, x \in [a, b] \ \ \forall\, x'$, $|x - x'| < \delta$, $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$.

Оценим разность

$$\sigma_n(x) - s(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} \{f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)\}\, K_n(t)\, dt\,.$$

Для $\varepsilon > 0$, $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ и для $x' = x \pm t$ получим

$$\sigma_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\delta} + \frac{1}{\pi}\int\limits_{\delta}^{\pi} = I_1^{(n)} + I_2^{(n)}\,.$$

Тогда для любого $x \in [a, b]$ имеем

$$\left|I_1^{(n)}\right| \le \tfrac{2}{\pi}\varepsilon \int\limits_0^{\delta} K_n(t)\,dt < \varepsilon \quad (\forall\, n)\,,$$

$$\left|I_2^{(n)}\right| \le \tfrac{4}{\pi} M \int\limits_{\delta}^{\pi} K_n(t)\,dt < \varepsilon \quad (\forall\, n \ge n_0(\delta) = N_0(\varepsilon))\,,$$

где $M = \sup|f(x)|$. Таким образом, $|\sigma_n(x) - f(x)| < 2\,\varepsilon$ для всех $n \ge N_0(\varepsilon)$ и $x \in [a,b]$, т. е. суммы Фейера равномерно сходятся к $f(x)$ на $[a,b]$. ▶

Следствие (теорема Вейерштрасса). *Всякая непрерывная на всей числовой прямой периодическая функция $f(x)$ может быть равномерно приближена тригонометрическими полиномами.*

Действительно, так как $f(x)$ непрерывна на интервале $(-\frac{3}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi)$, то $\sigma_n(x) \rightrightarrows f(x)$ ($n \to \infty$) на $[-\pi, \pi]$ и, в силу периодичности, $\sigma_n(x) \rightrightarrows f(x)$ ($n \to \infty$) на всей прямой. ▶

3 семестр
Лекция 25
(08.12.68)

Обсудим разложение в ряд Фурье нескольких функций. Каждый член ряда Фурье обладает тем же свойством четности или нечетности, что и сама функция, т. е. четная функция раскладывается в ряд Фурье по косинусам, а нечетная – по синусам. Какая функция раскладывается в ряд Фурье по нечетным гармоникам?

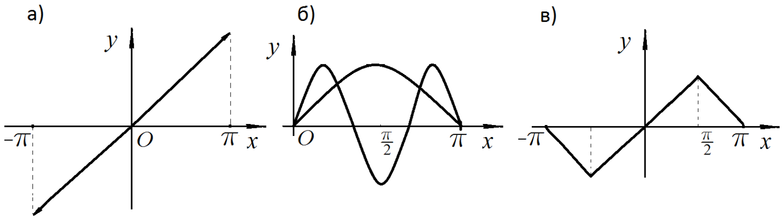


Рис. 16.6.

Примеры. 1) Рассмотрим функцию $y = x$ при $|x| < \pi$, $y = 0$ при $x = \pm\pi$ (рис. 16.6 а) и продолжим ее периодически с периодом $\omega = 2\pi$ на всю числовую прямую. Эта функция будет нечетная и ее разложение в ряд Фурье будет разложением по $\sin nx$.

2) Если возьмем $y = x$ при $|x| < \frac{\pi}{2}$, $y = 0$ при $x = \pm\frac{\pi}{2}$ и продолжим на всю числовую прямую с периодом $\omega = \pi$, то получим разложение в ряд Фурье по $\sin 2nx$.

3) Разложим функцию $y = x$, $|x| \le \frac{\pi}{2}$, в ряд Фурье по $\sin(2n+1)x$ (рис. 16.6 б). Для этого продлим функцию $y = x$ на всю числовую прямую так, что она будет нечетной, а график функции симметричен относительно прямой $x = \frac{\pi}{2}$ (рис. 16.6 в). Тогда

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} \sin(2k+1)x\,.$$

Упражнение. Проверить, что нечетная 2π-периодическая функция со свойством $f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ раскладывается в ряд Фурье именно по нечетным гармоникам $\sin(2n+1)x$.

4) Функция $y = x^2$, $0 \le x < \pi$, $f(\pi) = 0$, продолженная на всю числовую прямую нечетным образом периодически с периодом 2π (рис. 16.7), будет иметь разложение в ряд Фурье по $\sin nx$. Этот ряд не является равномерно сходящимся на отрезке $[-\pi, \pi]$ и на всей числовой прямой. Если бы он сходился равномерно, то он представлял бы непрерывную функцию, а наша функция разрывна.

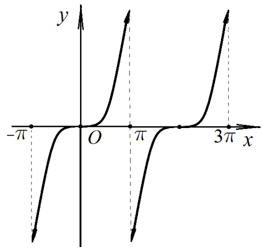


Рис. 16.7.

73.4. Равенство Парсеваля

Теорема (равенство Парсеваля). *Для всякой интегрируемой функции $f(x) \in R[-\pi, \pi]$ имеет место равенство Парсеваля*

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx\,.$$

Доказательство. Утверждение теоремы эквивалентно предложению (см. п. 72 с. 417): для любой функции $f \in R[-\pi, \pi]$

$$\|f - s_n\|_{(2)}^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - s_n(x)|^2 \, dx \to 0 \quad (n \to \infty)\,.$$

Последнее условие выполняется тогда и только тогда, когда для функции существует последовательность тригонометрических полиномов $\{p_n\}$ такая, что $\|f - p_n\|_{(2)} \to 0$ ($n \to \infty$), так как по теореме об экстремальном свойстве частичных сумм ряда Фурье (п. 72 с. 419) $\|f-s_n\|_{(2)} \le \|f-p_n\|_{(2)}$. Таким образом, нам надо показать, что $\forall\, f \in R\,[-\pi,\pi] \;\; \forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, p \;\; \|f-p\|_{(2)} < \varepsilon$, где p – тригонометрический полином. (Это вариант теоремы Вейерштрасса, мы ослабляем утверждение, не требуя равномерной сходимости, но доказываем его не только для непрерывных, но и для интегрируемых функций. Если потребовать равномерную сходимость, то функция автоматически будет непрерывной.)

Пусть $f \in R\,[-\pi,\pi]$ и p – тригонометрический полином. Напомним, что для непрерывной функции

$$\|f-p\|_C = \max_{x\in[-\pi,\pi]} |f(x)-p(x)|$$

– *чебышёвское* или *равномерное* уклонение или уклонение в метрике C (или в чебышёвской метрике). Для интегрируемой функции

$$\|f-p\|_{(2)} = \left\{ \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x)-p(x)|^2 \; dx \right\}^{\frac{1}{2}}$$

– *среднее квадратическое* уклонение, а

$$\|f-p\|_{(1)} = \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x)-p(x)| \; dx$$

– *среднее* уклонение. Рассмотрим, как эти уклонения связаны друг с другом.

Обозначим $f-p=\varphi$. Пусть $\varphi \in C\,[-\pi,\pi]$ (тогда определены все три уклонения). По неравенству Буняковского (§ 47 с. 214)

$$\|\varphi\|_{(1)} \le \sqrt{\int\limits_{-\pi}^{\pi} 1\, dx \cdot \int\limits_{-\pi}^{\pi} |\varphi|^2 \; dx} = \sqrt{2\pi}\, \|\varphi\|_{(2)}.$$

Очевидно, $\|\varphi\|_{(2)} \le \sqrt{2\pi}\, \|\varphi\|_C$. Предположим, что $|\varphi(x)| \le M$ $(\forall\, x \in [-\pi,\pi])$. Тогда

$$\|\varphi\|_{(2)} \le M^{\frac{1}{2}} \left\{ \int\limits_{-\pi}^{\pi} |\varphi|\, dx \right\}^{\frac{1}{2}} \le M^{\frac{1}{2}}\, \|\varphi\|_{(1)}^{\frac{1}{2}}.$$

Нам надо построить тригонометрический полином p близкий к интегрируемой функции f в смысле среднего квадратического. Сделаем это в три этапа:

$$f \xrightarrow[(1)]{} q \xrightarrow[(2)]{} \varphi \xrightarrow[(3)]{C} p\,.$$

1) ***На первом шаге*** построим кусочно-постоянную функцию q, хорошо приближающую интегрируемую функцию f в среднем.

Тогда q и f будут близки и в смысле среднего квадратического. Этот шаг нужен для уменьшения числа точек разрыва.

2) ***На втором шаге*** приблизим кусочно-постоянную функцию q непрерывной функцией φ в смысле среднего квадратического.

3) ***На третьем шаге*** построим тригонометрический полином p, хорошо приближающий непрерывную функцию φ в метрике C.

Если уклонения на каждом шаге будут малы, то теорема будет доказана.

1) Кусочно-постоянную функцию q строим воспользовавшись тем, что $f(x) \in R[-\pi,\pi]$. Тогда $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f\,dx$ сколь угодно точно можно приблизить верхними и нижними интегральными суммами, т. е. для любого положительного η существует разбиение T: $-\pi = x_0 < x_1 < ... < x_n = \pi$ отрезка $[-\pi,\pi]$ такое, что

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k \le \int\limits_{-\pi}^{\pi} f dx \le \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k\,, \quad \Omega(T) = \sum_{k=1}^{n} \omega_k \Delta x_k < \eta\,,$$

где m_k и M_k – нижняя и верхняя грани, соответственно, функции f на отрезке $[x_{k-1}, x_k]$. Пусть $\overline{f}(x) = M_k$, $x \in [x_{k-1}, x_k)$, $k = 1,...,n$, и $\overline{f}(\pi) = \overline{f}(-\pi)$, и функция $\underline{f}(x)$ задается аналогично через значения m_k. Тогда верхние и нижние суммы можно рассматривать как интегралы

$$\sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \overline{f}(x)\,dx, \quad \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \underline{f}(x)\,dx$$

от кусочно-постоянных функций $\overline{f}$ и $\underline{f}$. Положим $q = \overline{f}$. Тогда на любом полуинтервале $[x_{k-1}, x_k)$ $0 \le \overline{f} - f \le \overline{f} - \underline{f} = \omega_k$, откуда $|f(x) - q(x)| \le \omega_k \ \ \forall\, x \in [x_{k-1}, x_k)$, $k = 1,...,n$. Тогда

$$\|f - q\|_{(1)} = \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x) - q(x)|\; dx = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} |f(x) - q(x)|\; dx \le$$
$$\le \sum_{k=1}^{n} \omega_k \Delta x_k = \Omega(T) < \eta\,.$$

Так как $|q(x)| \le M = \sup\limits_{[-\pi,\pi]} |f(x)|$, то $|f(x) - q(x)| \le 2M$ и, следовательно, $\|f - q\|_{(2)} \le \sqrt{2M\, \|f - q\|_{(1)}} < \frac{\varepsilon}{3}$, если $2M\eta = \frac{\varepsilon^2}{9}$.

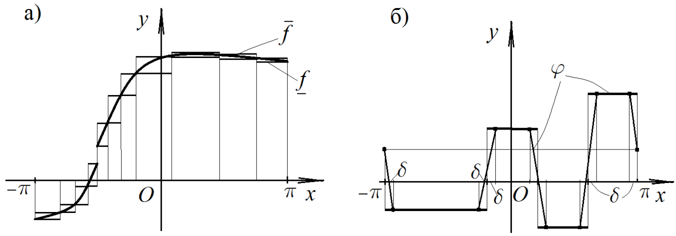


Рис. 16.8.

2) Построим непрерывную функцию $\varphi \in C(-\infty, \infty)$, имеющую период $\omega = 2\pi$ и хорошо приближающую q в смысле среднего квадратического. Функция q, построенная на первом шаге, может иметь разрывы только в точках x_0, x_1, …, x_n. Продолжим функцию q периодически на всю числовую прямую с периодом 2π. Возьмем δ настолько малым, чтобы выполнялись неравенства $x_{k-1}+\delta < x_k-\delta$ ($k = 1, ..., n$). Рассмотрим функцию q на отрезке $[-\pi - \delta, \pi + \delta]$. Каждую точку разрыва $x_k \in [-\pi, \pi]$ этой функции окружим интервалом длины $2\,\delta$ (рис. 16.8 б). Эти интервалы не пересекаются. На интервале $(x_k - \delta, x_k + \delta)$ заменим q линейной функцией, совпадающей с q в концах интервала. Рассмотрим получившуюся функцию на отрезке $[-\pi, \pi]$ и продолжим периодически на всю числовую прямую. Это и будет функция φ, непрерывная на всей числовой прямой и 2π-периодическая. Оценим уклонение $\|q - \varphi\|_{(2)}$:

$$\|q - \varphi\|_{(2)}^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |q(x) - \varphi(x)|^2 \, dx \le (n+1)4M^2 2\delta < \left(\tfrac{\varepsilon}{3}\right)^2,$$

так как $|q(x) - \varphi(x)|^2 \le 4M^2$, то надо выбрать $\delta < \frac{\varepsilon^2}{72M^2(n+1)}$. Здесь $n = n(\varepsilon)$ и $\delta = \delta(\varepsilon)$.

3) Функция $\varphi(x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы Фейера, ее суммы Фейера $\sigma_\nu(\varphi) \rightrightarrows \varphi$ ($\nu \to \infty$) на $(-\infty, \infty)$. Следовательно, $\forall\, \eta_1 > 0 \;\; \exists\, \nu \;\; \|\varphi - \sigma_\nu\|_C < \eta_1$. Тогда

$$\|\varphi - \sigma_\nu\|_{(2)} \le \sqrt{2\pi}\, \|\varphi - \sigma_\nu\|_C \le \sqrt{2\pi}\, \eta_1 < \tfrac{\varepsilon}{3},$$

если $\eta_1 < \frac{\varepsilon}{3\sqrt{2\pi}}$. Возьмем в качестве тригонометрического полинома p, который мы должны построить на третьем шаге, полином Фейера: $p = \sigma_\nu(\varphi)$. Значит, $\|\varphi - p\|_{(2)} < \frac{\varepsilon}{3}$. Собирая все оценки, получим

$$\|f-p\|_{(2)} \le \|f-q\|_{(2)} + \|q-\varphi\|_{(2)} + \|\varphi-p\|_{(2)} < \varepsilon\,. \ \blacktriangleright$$

Из теоремы следует, что $\|f-s_n\|_{(2)} \to 0$ ($n\to\infty$). Это значит, что всякая интегрируемая функция в смысле среднего квадратического представима в виде ее ряда Фурье.

Равенство Парсеваля – одно из самых мощных средств для вычисления интегралов и рядов.

Пример. Найдем сумму $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. Заметим, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}=\frac{\pi-x}{2}$, $0<x<2\pi$ (по крайней мере в смысле среднего квадратического). По равенству Парсеваля $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\left(\frac{\pi-x}{2}\right)^2dx=\frac{\pi^2}{6}$.

73.5. Равенство Парсеваля для произведения функций

Пусть функции $f,g\in R\,[-\pi,\pi]$, a_n, b_n – коэффициенты Фурье для функции f, α_n,β_n – коэффициенты Фурье для функции g. Справедливо равенство $4fg=(f+g)^2-(f-g)^2$. Сложив равенства Парсеваля для функций $f+g$ и $f-g$ и поделив на 4, получим *равенство Парсеваля для произведения функций*

$$\frac{a_0\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\alpha_n+b_n\beta_n)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)g(x)\,dx\,.$$

Пример. Для неинтегрируемой по Риману на отрезке $[-\pi,\pi]$ нечетной функции $f(x)=\frac{1}{x}$ ($0<|x|<\pi$), $f(0)=f(\pi)=0$, значения $b_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx dx$ ($n=1,2,\dots$) существуют как интегралы Римана. Поэтому "ряд Фурье" можно написать, но он не характеризует функцию. [6)]

3 семестр
Лекция 26
(11.12.68)

[6)] Нетрудно видеть, что $b_n\to\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx=1$ ($n\to\infty$) (см. интеграл Дирихле п. 68.1 с. 402), поэтому не будет сходимости ряда ни поточечной, ни в смысле среднего квадратического и ряд "не характеризует функцию". (Ред.)

§ 74. Обобщение формулы интегрирования по частям и теоремы о среднем значении

Если функция интегрируема по Риману, то и квадрат ее интегрируем по Риману. Если же функция интегрируема по Риману в несобственном смысле, $f \in \overline{R}\,[-\pi,\pi]$ (и даже абсолютно), то квадрат ее может не быть интегрируем в несобственном смысле. Т. е. из $f \in \overline{R}\,[-\pi,\pi] \;\not\Rightarrow\; f^2 \in \overline{R}\,[-\pi,\pi]$.

Пример. Возьмем функцию $f(x) = \begin{cases} 0 & (x=0) \\ \frac{1}{\sqrt{x}} & (0 < x \le 1) \end{cases}$. Тогда $f \in \overline{R}\,[0,1]$, но $f^2 \notin \overline{R}\,[0,1]$.

Среди несобственно интегрируемых функций существует широкий класс функций, для которых равенство Парсеваля имеет место.

Теорема. *Если* $f \in \overline{R}\,[-\pi,\pi]$ *и* $f^2 \in \overline{R}\,[-\pi,\pi]$, *то справедливо равенство Парсеваля* $\frac{a_0^2}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx$.

Мы не доказываем эту теорему (доказательство см. в [28] т. 3 п. 736).

Рассмотрим обратную задачу: когда последовательность чисел $\{a_n, b_n\}$ является последовательностью коэффициентов Фурье некоторой функции? Оказывается, что для любой последовательности чисел $\{a_n, b_n\}$ таких, что ряд $\frac{a_0^2}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right)$ сходится, существует функция f, для которой эта последовательность есть последовательность коэффициентов Фурье, но интеграл, с помощью которого можно вычислить коэффициенты Фурье этой функции, является не интегралом Римана, а более общим интегралом – интегралом Лебега. Функция f будет интегрируемой с квадратом по Лебегу. (Это утверждение теоремы Рисса – Фишера, см. [7] гл. 3 § 4 п. 5). Оказалось, что для получения окончательного результата, надо обобщить понятие интеграла Римана. Обобщение, предложенное Лебегом, и есть правильное обобщение.

74.1. Обобщенная формула интегрирования по частям

Вернемся к признакам Абеля и Дирихле для числовых рядов и несобственных интегралов. При доказательстве этих признаков для числовых рядов используется преобразование Абеля – "суммирование по частям". Для доказательства признаков Абеля и Дирихле для несобственных интегралов используется формула интегрирования по частям. Нами не была еще доказана формула интегрирования по частям с несимметричными условиями, которая позволяет усилить формулировки этих теорем. Так, например, можно следующим образом обобщить признак Дирихле.

Признак Дирихле сходимости несобственных интегралов. *Пусть функция* $f(x)$ *интегрируема на каждом отрезке* $[a,b]$, $b > a$, *и функция* $\Phi(x) = \int\limits_a^x f(u)\,du$ *ограничена на* $[a,\infty)$, *функция* $\alpha(x)$ *монотонна, имеет непрерывную производную на* $[a,\infty)$ *и* $\alpha(x) \to 0$ *при* $x \to \infty$. *Тогда несобственный интеграл* $\int\limits_a^\infty \alpha(x) f(x)\,dx$ *сходится.*

В отличие от прежней формулировки (п. 59.6 с. 327) здесь не предполагается непрерывность функции $f(x)$, а только интегрируемость на отрезках $[a,b]$, $b > a$. Доказательство отличается только тем, что мы будем опираться на обобщенную формулу интегрирования по частям. Для доказательства этой формулы, которая будет применена в дальнейшем исследовании рядов Фурье, нам понадобится

Замечание по теории интеграла Римана. По определению интеграла Римана

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{d(T)\to 0} S(T,\xi)\,,$$

где $S(T,\xi) = \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$, $(T) = (x_0,...,x_n)$ – разбиение отрезка $[a,b]$, $\xi = (\xi_1,...,\xi_n)$ – вектор с $\xi_k \in [x_{k-1},x_k]$, $k = 1,...,n$, $d(T)$ – диаметр разбиения, равный максимуму длин отрезков разбиения $[x_{k-1},x_k]$.

В теореме о предельном критерии интегрируемости функций (§ 38 с. 167) рассматривались пределы верхней $\overline{S}(T)$ и нижней

$\underline{S}(T)$ интегральных сумм. Если функция f непрерывна, то на отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ $m_k \le f(\xi_k) \le M_k$, где m_k и M_k – нижняя и, соответственно, верхняя грани функции f на отрезке $[x_{k-1}, x_k]$. Если f разрывна, то для множества значений $f(\xi_k)$ функции на $[x_{k-1}, x_k]$ включение $\{f(\xi_k)\} \subset [m_k, M_k]$ может быть строгое.

Обозначим $\mu_k \in [m_k, M_k]$ и рассмотрим обобщенную интегральную сумму $S^*(T,\mu) = \sum\limits_{k=1}^{n} \mu_k \Delta x_k$, где $\mu = (\mu_1, ..., \mu_k)$ и $\mu_k \in [m_k, M_k]$. Тогда $\underline{S}(T) \le S^*(T,\mu) \le \overline{S}(T)$ и для функции $f \in R\,[a,b]$ интеграл Римана является не только пределом интегральных сумм Римана, но и пределом обобщенных сумм Римана

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{d(T)\to 0} S^*(T,\mu)\,,$$

так как для доказательства существования интеграла Римана пользовались только неравенствами $\underline{S}(T) \le S(T,\xi) \le \overline{S}(T)$, а они верны и для обобщенных интегральных сумм $S^*(T,\mu)$. Таким образом, для каждой интегрируемой функции существует предел $\lim\limits_{d(T)\to 0} S^*(T,\mu)$, совпадающий с интегралом Римана. (Отметим, что при этом определении формулу для длины кривой можно получить при меньших предположениях гладкости).

Рассмотрим интеграл $\int\limits_a^b \varphi(x) f(x)\,dx$ и предположим, что функция $f \in R\,[a,b]$, а $\varphi(x) \in C\,[a,b]$. Тогда

$$\int\limits_a^b \varphi(x) f(x)\,dx = \lim_{d(T)\to 0} \sum_{k=1}^{n} \varphi(\xi_k) f(\xi_k) \Delta x_k = \lim_{d(T)\to 0} \sum_{k=1}^{n} \varphi(\xi_k) \mu_k \Delta x_k\,,$$

где $m_k(f) \le \mu_k \le M_k(f)$. Так как значение $\varphi(\xi_k)\mu_k$ – промежуточное между верней и нижней гранями функции $\varphi(x)f(x)$ на $[x_{k-1}, x_k]$, то в силу равномерной непрерывности функции φ ошибка будет стремиться к 0 при $d(T) \to 0$. Мы получили обобщение определения интеграла $\int\limits_a^b \varphi(x) f(x)\,dx$ в предположении, что $f \in R\,[a,b]$ и $\varphi(x) \in C\,[a,b]$.

Обобщение формулы интегрирования по частям. *Пусть* $g \in R\,[a,b]$, $h \in R\,[a,b]$, $u(x) = \int\limits_a^x g(t)\,dt$, $v(x) = \int\limits_a^x h(t)\,dt$, *тогда*

$$\int_a^b u(x)h(x)\,dx = u(x)v(x)\big|_a^b - \int_a^b v(x)g(x)\,dx\ ^{7)}.$$

Заметим, что интегралы слева и справа при сделанных предположениях существуют, но $u(x) = \int_a^x g(t)\,dt$ и $v(x) = \int_a^x h(t)\,dt$ могут не быть первообразными для подынтегральных функций (может быть много точек недифференцируемости).

Доказательство теоремы проводим сведением к интегральным суммам. Пусть $(T) = (x_0, ..., x_n)$ – разбиение отрезка $[a,b]$. Рассмотрим интегральную сумму $\sum_{k=1}^{n} u(\xi_k)\{v(x_k) - v(x_{k-1})\}$. Так как $v(x_k) - v(x_{k-1}) = \int_{x_{k-1}}^{x_k} h(t)dt = \Delta x_k \mu_k(h)$ для некоторого значения $\mu_k(h)$, где $m_k(h) \le \mu_k(h) \le M_k(h)$, то можем записать обобщенную интегральную сумму (если бы $h \in C[a,b]$, то применили бы теорему о среднем):

$$\sum_{k=1}^{n} u(\xi_k)\{v(x_k) - v(x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^{n} u(\xi_k)\mu_k(h)\Delta x_k \to \int_a^b u(x)h(x)dx$$

при $d(T) \to 0$. Рассмотрим $(T_\xi):\quad (\xi_0 = a,\ \xi_1, ..., \xi_n,\ \xi_{n+1} = b)$ – разбиение отрезка $[a,b]$. Тогда, применяя преобразование Абеля, получим

$$\sum_{k=1}^{n} u(\xi_k)\{v(x_k) - v(x_{k-1})\} = \sum_{k=0}^{n} v(x_k)\{u(\xi_k) - u(\xi_{k+1})\} -$$

$$- v(x_0)u(\xi_0) + v(x_n)u(\xi_{n+1}) = u(x)v(x)\big|_a^b - \sum_{k=0}^{n} v(x_k)\{u(\xi_{k+1}) - u(\xi_k)\} =$$

$$= u(x)v(x)\big|_a^b - \sum_{k=0}^{n} v(x_k)\mu_k(g)\Delta x_k.$$

Заметим, что $\sum_{k=0}^{n} v(x_k)\mu_k(g)\Delta x_k \to \int_a^b v(x)g(x)\,dx$ при $d(T_\xi) \to 0$.

Рассмотрим последовательность разбиений T такую, что $d(T) \to 0$, тогда и $d(T_\xi) \to 0$. Переходя к пределу при $d(T) \to 0$

---

7) Можно заметить, что если мы рассмотрим функции $u_1 = u_1(a) + u(x)$, $v_1 = v_1(a) + v(x)$, где $u_1(a)$, $v_1(a)$ – некоторые константы, то формула интегрирования по частям сохранит свой вид: $\int_a^b u_1(x)h(x)\,dx = u_1(x)v_1(x)\big|_a^b - \int_a^b v_1(x)g(x)\,dx$. (Ред.)

в формулах для интегральных сумм, получим необходимую формулу

$$\int_a^b u(x)h(x)\,dx = u(x)v(x)\big|_a^b - \int_a^b v(x)g(x)\,dx\,. \ ▶$$

74.2. Обобщенная теорема о среднем значении

Если $\varphi \ge 0$, $\varphi \in R\,[a,b]$, $f \in C\,[a,b]$, то по теореме о среднем (п. 40.2 с. 182)

$$\int_a^b \varphi f\,dx = f(\xi)\int_a^b \varphi\,dx$$

для некоторой точки $\xi \in [a,b]$. Перепишем эту формулу для функций $v \in C\,[a,b]$ и $g \ge 0$, $g \in R\,[a,b]$:

$$\int_a^b v(x)g(x)\,dx = v(\xi)\int_a^b g(x)\,dx = v(\xi)\,(u(b)-u(a))\,,$$

где $u(x) = \int\limits_a^x g(t)dt$.

Если $g, h \in R\,[a,b]$ и $g(x) \ge 0$, то по обобщенной формуле интегрирования по частям и по теореме о среднем, получим

$$\int_a^b u(x)h(x)\,dx = u(b)v(b) - u(a)v(a) - v(\xi)\,\{u(b)-u(a)\} =$$
$$= \{v(b)-v(\xi)\}\,u(b) - \{v(a)-v(\xi)\}\,u(a)\,,$$

где $v(x) = \int\limits_a^x h(t)dt$.

Таким образом, справедлива

Обобщенная теорема о среднем значении. [8] *Если* $g, h \in R\,[a,b]$, $g(x) \ge 0$, $u(x) = \int\limits_a^x g(t)dt$, $v(x) = \int\limits_a^x h(t)dt$, *то найдется точка* $\xi \in [a,b]$ *такая, что*

$$\int_a^b u(x)h(x)\,dx = \{v(b)-v(\xi)\}\,u(b) + \{v(\xi)-v(a)\}\,u(a)\,.$$

---

[8] Обобщенная теорема о среднем значении получена здесь при $u(a) = 0$, т. е. фактически получена *формула Бонне* $\int\limits_a^b u(x)h(x)\,dx = u(b)\int\limits_\xi^b h(x)\,dx$ (см. [28] т. 2 п. 306 с. 117 – 119). Обобщенная теорема о среднем значении в случае, если мы положим $u(x) = u(a) + \int\limits_a^x g(t)\,dt$, $v(x) = v(a) + \int\limits_a^x h(t)\,dt$, будет записываться той же самой формулой, что дана в формулировке. (Ред.)

3 семестр
Лекция 27
(13.12.68)

§ 75. Интегрирование и дифференцирование рядов Фурье

75.1. Формальная теория

Пусть имеется ряд Фурье некоторой функции. Проинтегрировав и продифференцировав функцию и ряд Фурье, получим ли ряд Фурье интеграла и производной или нет? (Теория формальная, так как не рассматриваем сходимость).

Пусть функция $f \in R[-\pi, \pi]$ и ее ряд Фурье

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)\,.$$

Пусть f имеет неопределенный интеграл $F(x) = \int f(x)\,dx$. Почленно проинтегрированный ряд Фурье функции f имеет вид

$$C + \frac{a_0}{2}x + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{a_n}{n} \sin nx + \frac{b_n}{n} \cos nx\right),$$

и, следовательно, будет тригонометрическим рядом, только если $a_0 = 0$, т. е. если $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 0$. (Но можно пойти дальше, разложить функцию $\frac{a_0}{2}x$ на отрезке $[-\pi, \pi]$ в ряд Фурье и получить в итоге тригонометрический ряд. Получим другое обоснование того, что достаточно рассмотреть случай $a_0 = 0$). Если рассмотрим ряд Фурье функции $f(x) - \frac{a_0}{2}$:

$$f(x) - \frac{a_0}{2} \sim \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)\,,$$

то ее почленно проинтегрированный ряд Фурье будет тригонометрическим рядом. Пусть $G(x)$ – неопределенный интеграл от функции $f(x) - \frac{a_0}{2}$ – следующим образом раскладывается в ряд Фурье

$$G(x) \sim C + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx)\,.$$

Разложив в ряд Фурье функцию $\frac{a_0}{2}x$ на отрезке $[-\pi, \pi]$ и сложив с этим рядом, получим ряд Фурье для $F(x)$ – неопределенного интеграла от функции f. Отсюда мы видим, что изучение задачи сводится к случаю $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 0$. В качестве $F(x)$ возьмем теперь не первообразную или неопределенный интеграл, а определенную для всякой интегрируемой функции f функцию $F(x) = \int\limits_{c}^{x} f(u)\,du$, где $c \in [-\pi, \pi]$. Тогда

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)\,,$$

$$F(x) \sim C + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx)\,.$$

Установим связь между величинами a_n, b_n, α_n, β_n. Возьмем

$$a_n = \tfrac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\,dx\,, \quad \beta_n = \tfrac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} F(x) \overbrace{\sin nx\,dx}^{dv}\,.$$

Применим обобщенную формулу интегрирования по частям:

$$\beta_n = -\tfrac{1}{\pi} F(x)\ \tfrac{\cos nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} + \tfrac{1}{n\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\,dx = \tfrac{a_n}{n}\,,$$

так как первое слагаемое обращается в нуль в силу 2π-периодичности функций $\cos nx$ и $F(x)$. Действительно, по условию $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 0$, следовательно, $F(x+2\pi) - F(x) = \int\limits_{x}^{x+2\pi} f(u) du = 0$. Аналогично, $\alpha_n = -\frac{b_n}{n}$. Таким образом,

$$F(x) \sim C + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\tfrac{b_n}{n} \cos nx + \tfrac{a_n}{n} \sin nx\right),$$

что есть почленно проинтегрированный ряд Фурье функции $f(x)$.

Мы доказали, что верна следующая

Лемма (интегрирование ряда Фурье). *Если* $f(x) \in R\,[-\pi, \pi]$ *и* $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 0$, *то законно формальное почленное интегрирование ее ряда Фурье: если*

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)\,,$$

то

$$F(x) = \int\limits_{c}^{x} f(u)\,du \sim C + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\tfrac{b_n}{n} \cos nx + \tfrac{a_n}{n} \sin nx\right).$$

Аналогично доказывается формальная дифференцируемость ряда Фурье.

Лемма (дифференцирование ряда Фурье). *Если функция* $F(x) = \int\limits_{c}^{x} f(u)\,du$ *непрерывна на всей прямой и имеет период* 2π, *то ряд Фурье функции* $f(x)$ *получается почленным дифференцированием ряда Фурье функции* $F(x)$ (*при этом* $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 0$ *в силу периодичности* $F(x)$).

Покажем, что условие непрерывности функции на всей прямой необходимо для справедливости этой леммы.

Пример. Рассмотрим $F(x) = -x$, $x \in [-\pi, \pi)$. Эта функция имеет ряд Фурье вида $F(x) \sim \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin nx$. На $(-\pi, \pi)$ $F'(x) = f(x) = -1$ и, следовательно, ряд Фурье $f(x) \sim -1$. Но при дифференцировании $F(x)$ получим тригонометрический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\alpha_n \cos nx$, а не -1. Это происходит из-за того, что при периодическом продолжении функции $F(x)$ она становится разрывной.

75.2. Неформальная теория интегрирования рядов Фурье

Пусть $f(x) \in R\,[-\pi, \pi]$, $a_0 = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 0$,

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)\,,$$

$$F(x) = \int_0^x f(u)\,du \sim c + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx)\,.$$

Если $f(x)$ раскладывается в равномерно сходящийся ряд Фурье, то почленно проинтегрированный ряд Фурье функции $f(x)$ будет равномерно сходиться к $F(x)$ (по теореме об интегрировании равномерно сходящихся рядов (п. 64.3 с. 363)) и будет рядом Фурье функции $F(x)$ (так как равномерно сходящийся тригонометрический ряд является рядом Фурье своей суммы (п. 71 с. 412)):

$$\int_0^x f(u)\,du = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x (a_n \cos nu + b_n \sin nu)\ du\,.$$

Этот результат справедлив при менее ограничительных условиях.

Теорема о сходимости почленно проинтегрированного ряда Фурье. *Пусть* $f(x) \in R\,[-\pi, \pi]$, $a_0 = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 0$ *и*

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)\,.$$

Тогда справедлива формула

$$\int_0^x f(u)\,du = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x (a_n \cos nu + b_n \sin nu)\ du\,.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем x, $0 < x \le \pi$, и рассмотрим функцию $\varphi_x(u) = \begin{cases} 1 & (0 \le u \le x) \\ 0 & (\text{вне } [0,x]) \end{cases}$. Тогда имеем $\int_0^x f(u)\,du = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_x(u) f(u)\,du$. Аналогично, с помощью функции $\varphi_x(u)$, запишем следующий интеграл

$$\int_0^x (a_n \cos nu + b_n \sin nu)\ du = a_n \int_0^x \cos nu\,du + b_n \int_0^x \sin nu\,du =$$

$$= a_n \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_x(u) \cos nu\,du + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_x(u) \sin nu\,du = \pi\,(a_n c_n + b_n d_n)\,,$$

где c_n, d_n – коэффициенты Фурье функции $\varphi_x(u)$. Применим к $\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_x(u) f(u)\,du$ равенство Парсеваля для произведения функций (п. 73.5 с. 435). Так как $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 0$, то получим $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_x(u) f(u)\,du = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n c_n + b_n d_n)$, что эквивалентно утверждению теоремы. ▶

В этой теореме не выяснен до конца характер сходимости ряда Фурье функции $F(x) = \int_0^x f(u)\,du$ к этой функции. Если тригонометрический ряд обладает свойством

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|) < \infty\,,$$

то по признаку Вейерштрасса он сходится абсолютно и равномерно. Таким образом, чтобы доказать абсолютную, а значит, и равномерную сходимость тригонометрического ряда достаточно доказать абсолютную сходимость ряда коэффициентов.

Теорема о равномерной и абсолютной сходимости почленно проинтегрированного ряда Фурье. *Если* $f(x) \in R\,[-\pi,\pi]$ *и* $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 0$, *то почленно проинтегрированный ряд Фурье функции* $f(x)$ *абсолютно и равномерно сходится.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Функция $f(x) \in R[-\pi,\pi]$, $f(x) \sim \sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$, значит справедливо равенство Парсеваля и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)$ сходится. С другой стороны, мы знаем, что коэффициенты Фурье α_n и β_n проинтегрированного ряда $F(x)=\int\limits_0^x f(u)\,du \sim c+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\alpha_n \cos nx+\beta_n \sin nx)$ выражаются как $\alpha_n=-\frac{b_n}{n}$, $\beta_n=\frac{a_n}{n}$. Применим неравенство Коши:

$$\sum_{n=1}^{N}(|\alpha_n|+|\beta_n|)=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}(|a_n|+|b_n|)\le$$
$$\le\sqrt{\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2}\sum_{n=1}^{N}(|a_n|+|b_n|)^2}\le\sqrt{\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2}\cdot 2\sum_{n=1}^{N}(a_n^2+b_n^2)}\le C(f),$$

где константа зависит от $f(x)$, но не зависит от N, так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится. Таким образом, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(|\alpha_n|+|\beta_n|)<\infty$. Значит, проинтегрированный ряд Фурье функции $f(x)$ равномерно и абсолютно сходится к функции $F(x)=\int\limits_0^x f(u)\,du$. ►

Следствие. *Пусть* $\Phi(x)\in C(-\infty,\infty)$, $\Phi(-\pi)=\Phi(\pi)$ *и существует* $f(x)\in R[-\pi,\pi]$ *такая, что* $\Phi(x)=\int\limits_0^x f(u)\,du+C$. *Тогда ряд Фурье функции* $\Phi(x)$ *будет абсолютно и равномерно сходиться к* $\Phi(x)$ *на всем периоде.*

Здесь формулировка теоремы записана в условиях, наложенных на Φ. В частности, следствие верно, если функция $f(x)$ ограниченная и имеет конечное число точек разрыва, т.е. когда $\Phi(x)$ – первообразная.

Лемма. *Пусть функция* $f(x)\in R[-\pi,\pi]$, *ее коэффициенты Фурье* a_n, $b_n=O(\frac{1}{n})$, $s_n(x)$, $\sigma_n(x)$ *– ее частичные суммы Фурье и Фейера, соответственно. Тогда*

1) $s_n(x)-\sigma_n(x)=O(1)$ ($n\to\infty$);

2) *если* $\sigma_n(x)\to s$ ($n\to\infty$), *то и* $s_n(x)\to s$ ($n\to\infty$).

В 2) говорится о том, что из условия $\sigma_n(x)\to s$ ($n\to\infty$) следует $s_n(x)-\sigma_n(x)\to 0$ ($n\to\infty$). Утверждение о равномерной сходимости было бы неверно. [9]

[9] Для функции $f(x)=\frac{\pi-x}{2}$ ряд Фурье $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k}$ сходится к $f(x)$ на

3 семестр
Лекция 28
(18.12.68)

Переформулируем лемму для числовых рядов.

Лемма. *Пусть дан числовой ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$, $u_n = O(\frac{1}{n})$, $s_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ *и* $\sigma_n = \frac{1}{n+1}\sum\limits_{k=0}^{n} s_k = \sum\limits_{k=0}^{n}\left(1-\frac{k}{n+1}\right)u_k$ *– аналог сумм Фейера. Тогда*

1) $s_n(x) - \sigma_n(x) = O(1)$ $(n\to\infty)$;

2) *если* $\sigma_n \to s$ $(n\to\infty)$, *то и* $s_n \to s$ $(n\to\infty)$.

Если $u_n = a_n \cos nx + b_n \sin nx$, $u_0 = \frac{a_0}{2}$, то получим лемму, сформулированную для рядов Фурье.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $n < m$, $m = m(n)$, $\gamma > 1$, $\frac{m}{n} \to \gamma$ $(n\to\infty)$. Рассмотрим $\frac{1}{m-n}\sum\limits_{k=n+1}^{m} s_k = \frac{m+1}{m-n}\sigma_m - \frac{n+1}{m-n}\sigma_n$.

Если $\sigma_n \to s$ $(n\to\infty)$, то $\frac{1}{m-n}\sum\limits_{k=n+1}^{m} s_k \to \frac{\gamma}{\gamma-1}s - \frac{1}{\gamma-1}s = s$ $(\forall\gamma > 1)$. Докажем, что если γ близко к 1, то $\frac{1}{m-n}\sum\limits_{k=n+1}^{m} s_k$ близко к s_n. Имеем $\frac{1}{m-n}\sum\limits_{k=n+1}^{m} s_k = s_n + \frac{1}{m-n}\sum\limits_{k=n+1}^{m}(s_k - s_n)$.

Для всех номеров k таких, что $n < k \le m$, так как $|u_\nu| \le \frac{A}{\nu}$ и $\frac{1}{\nu} \le \int\limits_{\nu-1}^{\nu}\frac{dx}{x}$, получим

$$|s_k - s_n| = \left|\sum_{\nu=n+1}^{k} u_\nu\right| \le \sum_{\nu=n+1}^{m}|u_\nu| \le A\sum_{\nu=n+1}^{m}\frac{1}{\nu} \le A\int_n^m\frac{dx}{x} \le A\ln\frac{m}{n},$$

$$\left|\frac{1}{m-n}\sum_{k=n+1}^{m} s_k - s_n\right| = \left|\frac{1}{m-n}\sum_{k=n+1}^{m}(s_k - s_n)\right| \le A\ln\frac{m}{n} \to A\ln\gamma < A(\gamma-1).$$

Зададим $\varepsilon > 0$ и возьмем γ такое, что выполняется неравенство $1 < \gamma < 1+\varepsilon$. Тогда найдется номер $n_0(\varepsilon)$ такой, что $|s_n - s| < A\varepsilon$, если $n \ge n_0(\varepsilon)$. Кроме того,

---

$(0, 2\pi)$ (см. [27] т. 2 п. 406 с. 392). Разность

$$s_n(x) - \sigma_n(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n-1}\sin kx = \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos\left(n-\frac{1}{2}\right)x}{(n+1)2\sin\frac{x}{2}} = \frac{1}{n+1}\frac{\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{n-1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}.$$

Если возьмем $x_n = \frac{\pi}{n}$, то $s_n(x_n) - \sigma_n(x_n) \to \frac{2}{\pi}$ $(n\to\infty)$. Отсюда следует, что равномерной сходимости $s_n(x) - \sigma_n(x)$ на $(0, 2\pi)$ нет. (Ред.)

$$s_n - \sigma_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \overbrace{ku_k}^{\text{огр.}} = O(1)\,. \ \blacktriangleright$$

Значит, и предыдущая лемма для рядов Фурье тоже доказана. Следовательно, если a_n, $b_n = O(\frac{1}{n})$ и $\sigma_n \to s$ ($n \to \infty$), то и $s_n \to s$ ($n \to \infty$). По теореме Фейера (п. 73.3 с. 428) $\sigma_n \to s$ всегда, когда существует $s = \frac{1}{2}\{f(x+0) + f(x-0)\}$. Таким образом, доказана следующая

Теорема. *Пусть* a_n, $b_n = O(\frac{1}{n})$ *– коэффициенты Фурье функции* f. *Тогда в каждой точке* x, *где* $f \in C(x)$ *или где существуют пределы* $f(x+0)$, $f(x-0)$, *ряд Фурье сходится к значению*

$$s = \frac{1}{2}\{f(x+0) + f(x-0)\}\,.$$

Определение. Функция $f(x)$ называется *кусочно-монотонной* на отрезке $[a,b]$, если этот отрезок можно разбить на конечное число промежутков, на каждом из которых функция монотонна.

Теорема о порядке убывания коэффициентов Фурье. *Пусть* $f(x)$ *– ограниченная,* 2π*-периодическая, кусочно-монотонная на периоде функция. Тогда коэффициенты Фурье этой функции* a_n, $b_n = O(\frac{1}{n})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о проведем для a_n, т. е. докажем, что $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = O\left(\frac{1}{n}\right)$.

Ряд Фурье функции $f(x)$ в каждой точке сходится к $s = \frac{1}{2}\{f(x+0) + f(x-0)\}$ (верно и для функций с ограниченной вариацией). Функция $f(x)$ – кусочно-монотонная на периоде (рис. 16.9). Значит $[0, 2\pi]$ можно разбить на конечное число промежутков, на каждом из которых функция монотонна. Пусть (α,β) (или $[\alpha,\beta]$, $[\alpha,\beta)$, $(\alpha,\beta]$) – один из таких промежутков. По обобщенному определению интеграла Римана (п. 74.1 с. 438)

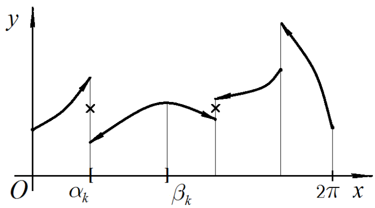


Рис. 16.9.

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)\,\overbrace{\cos nx dx}^{dv} = \lim_{d(T)\to 0}\sum_{k=1}^{m} f(\xi_k)\,\{v(x_k) - v(x_{k-1})\}\,,$$

где $v = \frac{\sin nx}{n}$. Пусть для определенности $f(x)$ на (α,β) возрастает. Имеем

$$\sum_{k=1}^{m} f(\xi_k)\left\{v(x_k)-v(x_{k-1})\right\}=f(x)v(x)\big|_{\alpha}^{\beta}-\sum_{k=0}^{m} v(x_k)\left\{f(\xi_{k+1})-f(\xi_k)\right\}.$$

Обозначим $V=\max\limits_{(\alpha,\beta)}|v(x)|$, $M=\max\limits_{(\alpha,\beta)}|f(x)|$. Тогда $\left|\sum\limits_{k=1}^{n}\right| \le V\cdot 4\,M$ и так как $|v(x)| \le \frac{1}{n}$, то $\left|\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)\cos nx dx\right| \le 4MV = O\left(\frac{1}{n}\right)$. Так как таких промежутков конечное число, то $a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$. Для b_n доказательство аналогично. ►

Следствием двух последних теорем является

Теорема Дирихле – Жордана. *Пусть $f(x)$ – ограниченная, 2π-периодическая функция, кусочно-монотонная на периоде. Тогда ряд Фурье этой функции сходится в каждой точке x к значению $s = \frac{1}{2}\{f(x+0)+f(x-0\}$.*

Теорема верна и для функций ограниченной вариации (функции ограниченной вариации см. п. 45.1).

§ 76. Интеграл Фурье

Пусть $f(x)$ интегрируема на отрезке $[-\pi,\pi]$ и имеет период $\omega = 2\pi$. При дополнительных условиях на функцию ее ряд Фурье к ней сходится

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx) = f(x).$$

Получим аналог этой формулы без ограничения периодичности (см. [27] т. 2 п.п. 408 – 412). Пусть функция $f(x)$ определена на $(-\infty,\infty)$. Если $f(x)$ имеет период $\omega = 2l$, то ее ряд Фурье имеет вид

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right),$$

где $a_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx$ ($n = 0,1,\dots$), $b_n = \frac{1}{l}\int\limits_{l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dt$ ($n = 1,2,\dots$) (косинус и синус имеют здесь период $\omega = 2l$). Что будет при $l\to\infty$?

Перепишем ряд Фурье, подставив в него формулы для коэффициентов Фурье

$$f(x)\sim\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(u)\,du+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(u)\cos\frac{n\pi}{l}(x-u)\,du.$$

Эту сумму можно рассмотреть как интегральную сумму с шагом $\frac{\pi}{l}$.

Если мы устремим $l \to \infty$, то нужно предположить существование интеграла $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ – аналога интеграла на периоде. Тогда придем к интегральному аналогу ряда Фурье

$$f(x) \sim \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} dz \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(u)\cos z(x-u)\,du = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dz \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(u)\cos z(u-x)\,du$$

(последнее равенство вытекает из четности внутреннего интеграла). Этот интеграл называется *интегралом Фурье*. Как правило, внешний интеграл по z понимается в смысле главного значения (Коши) (чтобы подчеркнуть это, перед интегралом иногда пишут букву P от слова "principal"):

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dz \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(u)\cos z(u-x)\,du = \lim_{A\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-A}^{A} dz \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(u)\cos z(u-x)du =$$

$$= \frac{1}{2\pi}(P)\int\limits_{-\infty}^{\infty} dz \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(u)\cos z(u-x)du\,.$$

Можно считать, что $\frac{1}{2\pi}(P)\int\limits_{-\infty}^{\infty} dz \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(u)\sin z(u-x)\,du = 0$, так как внутренний интеграл представляет собой нечетную функцию. Умножая этот интеграл на i и складывая с предыдущим, получим интеграл Фурье в комплексной форме

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dz \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(u)\cos z(u-x)\,du = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dz \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{iz(u-x)}du =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dz e^{-iz} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{izu}\,du\,.$$

Последний интеграл перепишем так

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dz e^{-izx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{izu}\,du\,.$$

Определим $F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{izu}\,du$ – *прямое преобразование Фурье*; и $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(z)e^{-izx}\,dz$ – *обратное преобразование Фурье*. Если $f(x)$ известна, то это – интегральное уравнение. Преобразование Фурье дает его решение $F(z)$.

Можно доказать, что верно следующее равенство.

Теорема Парсеваля. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |F(z)|^2 \, dz = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \, dx \, .$
(т. е. преобразование Фурье не меняет квадратичной нормы).

Вопросы к экзамену.

Глава 13. Числовые ряды и несобственные интегралы. Критерий сходимости рядов и интегралов. Признаки сходимости положительных рядов (теоремы сравнения). Интегральный признак сходимости. Теорема Лейбница. Теорема Абеля. Теорема Дирихле. Признак Гаусса. Свойства сходящихся рядов. Теорема Дирихле – Римана. Перемножение рядов. Теорема Мертенса. Ряды Тейлора. Бесконечные произведения.

Глава 14. Функциональные последовательности и ряды. Равномерная сходимость. Критерий равномерной сходимости. Признак Вейерштрасса. Теорема Дини. Свойства равномерно сходящихся рядов: предельный переход, непрерывность, интегрирование, дифференцирование (две теоремы). Пример Ван дер Вардена. Степенные ряды. Область сходимости. Равномерная сходимость. Теорема Коши – Адамара. Теорема единственности. Интегрирование и дифференцирование степенных рядов. Теорема Вейерштрасса.

Глава 15. Интегралы, зависящие от параметра. Предельный переход под знаком интеграла. Непрерывность, дифференцирование, интегрирование. Исследование интегралов, когда пределы зависят от параметра (непрерывность по всем переменным, дифференцирование).

Несобственные интегралы, зависящие от параметра. Критерий равномерной сходимости. Признаки равномерной сходимости. Аналог теоремы Дини. Предельный переход, непрерывность. Интегрирование в конечных пределах. Интегрирование в бесконечных пределах. Дифференцирование по параметру. Вычисление интегралов Дирихле и Лапласа. Эйлеровы интегралы. Сведение В к Г (бета-функции к гамма-функции), по Фихтенгольцу [27] т. 2 пп. 309 – 311.). Формула Стирлинга.

Глава 16. Ряды Фурье. Ряд Фурье. Коэффициенты Фурье. Ортогональные системы. Минимальное свойство коэффициентов Фурье. Неравенство Бесселя. Принцип локализации для рядов Фурье. Теорема Фейера. Равенство Парсеваля, полнота и замкнутость. Теорема единственности. Интегрирование и дифференцирование ряда Фурье. Теорема Дирихле о сходимости ряда Фурье. Понятие об интеграле Фурье (в качестве дополнительного вопроса).

Часть VI

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Глава 17

Двойной интеграл

4 семестр
Лекция 1
(07.02.69)

"Анализ – прилагательное." (С. Б. С.).
Рекомендованная литература [27], [13].

Простая замкнутая кривая является образом окружности при взаимно-однозначном и в обе стороны непрерывном отображении. [1]

Известна следующая

Теорема Жордана. *Каждая простая замкнутая кривая делит плоскость на две области, общей границей которых она является. При этом одна из областей ограничена, а другая не ограничена.* [2]

Определение. *Многоугольник* – открытая ограниченная часть плоскости, граница которой состоит из конечного числа замкнутых ломаных линий, любая из которых состоит из конечного числа звеньев.

Лемма (о разбиении многоугольника на треугольники). *Всякий замкнутый многоугольник разбивается на конечное число замкнутых треугольников.*

---

[1] См., например, [17] гл. 1 § 1. (Ред.)

[2] Доказательство можно найти, например, в [1] т. 1 гл. X § 3 п. 358 и в [9] т. 2 гл. 10 § 61 п. 11 (для общих пространств). (Ред.)

Считается очевидным, что любой многоугольник разбивается на конечное число треугольников, например, следующим образом. Через все вершины многоугольника на плоскости, на которой мы взяли оси координат, проведем вертикальные прямые. Тогда многоугольник разобьется на треугольники и трапеции (рис. 17.1). Далее, каждую трапецию разделим на два треугольника. Получим разбиение многоугольника на конечное число треугольников. Но на самом деле "это достаточно кропотливая теорема" [3] (С. Б. С.).

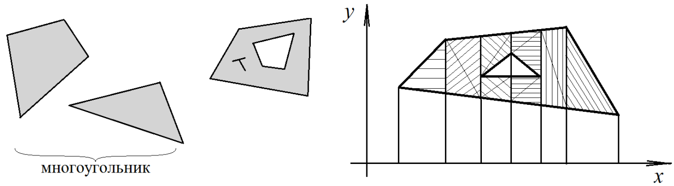


Рис. 17.1.

Заметим, что теперь, для того, чтобы узнать площадь многоугольника, мы можем сложить площади треугольников, на которые разбит многоугольник. Будем считать, что *площадь треугольника* "мы действительно умеем вычислять" (С. Б. С.).

§ 77. Мера ограниченного замкнутого множества на плоскости

При определении интеграла Римана от функции $y = f(x)$ одной переменной мы рассматривали произвольное разбиение T отрезка $[a, b]$. Каждый элемент $[x_{k-1}, x_k]$ этого разбиения был также отрезком. В интегральных суммах $\sum f(\xi_k)\Delta x_k$, где $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ – длина отрезка $[x_{k-1}, x_k]$.

Составляя аналогичные суммы для функции, заданной на некоторой области K на плоскости, мы должны разбить K на части ("кусочки подобласти, элементы разбиения) S_k. Область разбивается на подобласти сложного, вообще говоря, характера. Следовательно, для определения двойного интеграла надо иметь

[3] См. [13] т. 1 гл. 2 § 2. (Ред.)

некоторое определение площади. Существует понятие площади плоской фигуры, называемое *площадью по Жордану* или *мерой Жордана*. Понятие площади по Жордану, на котором обычно строят интеграл функций многих переменных, обладает рядом недостатков. Например, не всякое ограниченное замкнутое множество точек на плоскости имеет площадь по Жордану.

Вместо понятия площади будет рассмотрен некоторый "рудимент" меры – понятие просто *меры*, или *внешней меры*, или *меры Лебега* для компактных множеств. Напомним, что в конечномерном евклидовом пространстве компактные множества (или кратко, *компакты*) совпадают с ограниченными замкнутыми множествами. Мы будем, в случае интеграла по области на плоскости, делить область на части и, в качестве площадей фигур, будем брать площади фигур с границами.

Введем следующие обозначения.

P , Q – многоугольники, всегда открытые множества; пустое множество $\varnothing$ также считаем многоугольником;

$\overline{P}$, $\overline{Q}$ – многоугольники с границей, замкнутые множества;

$S(P)$ – площадь многоугольника.

Заметим, что пересечение, объединение двух многоугольников P и Q , а также множество $P\backslash\overline{Q}$ будут снова многоугольниками.

Свойства площади многоугольника.

1) $S(P)\geq 0$ (*неотрицательность*); $S(\varnothing)=0$;

2) если $P\subset P_1$, то $S(P)\leq S(P_1)$ (*монотонность*);

3) если P,P_1 – два прямоугольника, $P\bigcap P_1=\varnothing$, $P\bigcup P_1=Q$, то $S(Q)=S(P)+S(P_1)$ (*аддитивность*);

4) площадь квадрата со стороной 1 равна 1 (*нормированность*).

Пусть K – произвольное ограниченное замкнутое (т.е. компактное) множество на плоскости: $K\subset E^2$. Каждому K следующим образом поставим в соответствие число $m\,(K)$, которое назовем *мерой* компакта K .

Рассмотрим многоугольники P, содержащие K: $K\subset P$. Множество $\{P\}$ таких многоугольников не пусто, так как K ограничено.

Определение. *Мерой* (*внешней мерой* или *мерой Лебега*) *компактного множества* K назовем величину

$$m\,(K)=\inf_{K\subset P}S(P)\,.$$

Это не то, что называется площадью. Наряду с $\inf\limits_{K\subset P} S(P)$ можно рассмотреть величину (*внутреннюю меру Жордана* компакта K): $\sup\limits_{Q\subset K} S(Q)$, где Q – многоугольники, содержащиеся в K. Ясно, что $\sup\limits_{Q\subset K} S(Q) \leq \inf\limits_{K\subset P} S(P)$. Если это неравенство для некоторого множества K обращается в равенство, то их общее значение назовем *площадью, площадью в смысле Жордана* или *жордановой мерой* множества K. Множества, имеющие площадь в смысле Жордана, называются *квадрируемыми* множествами.

Не всякое компактное множество на плоскости имеет площадь в смысле Жордана, а меру имеет всякое. [4)]

Перечислим, а затем докажем, основные свойства меры компактных множеств на плоскости.

Первое свойство меры. $m\,(K) \geq 0$ (*неотрицательность*);
Второе свойство меры. *Если* $K_1 \subset K_2$, *то* $m\,(K_1) \leq m\,(K_2)$ (*монотонность меры*).
Третье свойство меры. *Пусть* K_1, K_2 *– компактные множества,* $K_1 \bigcap K_2 = \varnothing$, $K = K_1 \bigcup K_2$. *Тогда*

$$m\,(K) = m\,(K_1) + m\,(K_2)$$

(*аддитивность меры*).
Четвертое свойство меры. *Пусть имеются два компактных множества* K_1 *и* K_2, $K = K_1 \bigcup K_2$, $k = K_1 \bigcap K_2$, $m\,(k) = 0$. *Тогда*

$$m\,(K) = m\,(K_1) + m\,(K_2)\,.$$

(уточнение свойства аддитивности меры).

Свойство неотрицательности меры непосредственно следует из определения.

Докажем свойство монотонности меры. Пусть $K_1 \subset K_2$, $K_1 \subset P_1$, $K_2 \subset P_2$, где P_1 и P_2 – многоугольники. Положим $P = P_1 \cap P_2$. Тогда $K_1 \subset P \subset P_2$ и выполняются неравенства

[4)] Примеры некомпактных не имеющих площади множеств см., например, в [31] раздел 9.

Приведем пример компактного множества, не имеющего площади. Пусть E совершенное нигде не плотное множество положительной меры на отрезке $[0,1]$, например, канторовского типа ([2] гл. 8 пример 4). Декартово произведение E на отрезок $[0,1]$ даст искомый компакт. Мера его будет положительна, а никакой непустой многоугольник в нем не содержится. (Ред.)

$m(K_1) \le S(P) \le S(P_2)$, т.е. получаем $m(K_1) \le S(P_2)$ для любого P_2 такого, что $K_2 \subset P_2$. Отсюда и из определения меры следует искомое неравенство $m(K_1) \le m(K_2)$.

Строгой монотонности меры нет, как показывает следующий **Пример.** Рассмотрим множества $K_1 = \left[0, \frac{1}{2}\right]$ и $K_2 = [0, 1]$. Тогда $K_1 \subset K_2$, $K_1 \ne K_2$, но $m(K_1) = m(K_2) = 0$, так как каждое из этих множеств можно покрыть прямоугольниками сколь угодно малой площади.

Для доказательства третьего и четвертого свойств меры нам понадобится целый ряд утверждений и понятий.
Если компактное множество K *имеет внутренние точки, то* $m(K) > 0$.
Действительно, вместе с внутренней точкой множество K содержит квадратик q. Любой многоугольник P, покрывающий множество K, будет покрывать q, а тогда $m(K) \ge S(q) > 0$.

Обратное утверждение неверно. Компактное множество, не имеющее внутренних точек, может иметь положительную меру. "Это есть неприятность определения меры" (С. Б. С.). Существует такое компактное множество, граница которого имеет положительную меру (см. пример в п. 80.4 с. 477).

Для нас очень важен класс тех компактных множеств на плоскости, мера которых $m(K) = 0$. По определению меры, это будут такие и только такие множества, которые могут быть покрыты многоугольниками сколь угодно малой площади. Это вовсе не те множества, которые не имеют внутренних точек, а это "правильный" подкласс этих множеств.

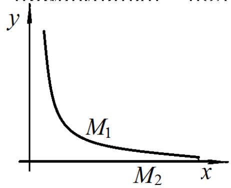


Рис. 17.2.

Пусть M_1, M_2 – непустые (не обязательно компактные) множества из E^n. *Расстоянием* d между множествами M_1, M_2 называется величина

$$d(M_1, M_2) = \inf_{\substack{x \in M_1 \\ y \in M_2}} \rho(x, y)$$

(здесь $\rho(x, y)$ – евклидово расстояние между x и y). Очевидно, $d(M_1, M_2) \ge 0$.

Если $M_1 \bigcap M_2 \ne \varnothing$, то $d(M_1, M_2) = 0$, так как M_1 и M_2 имеют общую точку. Обратное, вообще говоря, неверно. Существуют такие, даже замкнутые, множества, которые не пересекаются, и расстояние между которыми равно нулю.

Пример. Пусть M_1 – гипербола и M_2 – ее асимптота (см. рис. 17.2). Эти множества не пересекаются, а расстояние между ними $d(M_1, M_2) = 0$.

Лемма о расстоянии между двумя компактными множествами. *Пусть* $K_1, K_2 \subset E^n$ *– компактные множества в n-мерном евклидовом пространстве. Тогда найдутся такие точки* $x_0 \in K_1$ *и* $y_0 \in K_2$, *что* $d(K_1, K_2) = \rho(x_0, y_0)$. *В частности, если* $K_1 \bigcap K_2 = \varnothing$, *то* $d(K_1, K_2) = \alpha > 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По определению расстояния между множествами $\alpha = d(K_1, K_2) = \inf\limits_{\substack{x \in K_1 \\ y \in K_2}} \rho(x, y)$. Значит, найдутся последовательности точек $\{x_k\}$, $x_k \in K_1$, и $\{y_k\}$, $y_k \in K_2$, такие, что $\alpha = \inf\limits_{\substack{x \in K_1 \\ y \in K_2}} \rho(x, y) = \lim\limits_{k \to \infty} \rho(x_k, y_k)$. В силу компактности K_1 и K_2 из этих последовательностей можно выделить подпоследовательности $\{x_{n_k}\}$ и $\{y_{n_k}\}$, сходящиеся к некоторым элементам $x_0 \in K_1$ и $y_0 \in K_2$, соответственно. Следовательно, $d(K_1, K_2) = \rho(x_0, y_0)$. Если $K_1 \bigcap K_2 = \varnothing$, то $x_0 \neq y_0$ и $\alpha = d(K_1, K_2) > 0$. ►

Если для двух множеств M_1 и M_2 найдутся точки $x_0 \in M_1$ и $y_0 \in M_2$, такие что $d(M_1, M_2) = \rho(x_0, y_0)$, то говорят, что *расстояние между этими множествами достигается.* Таким образом, в лемме доказано, что расстояние между компактными множествами достигается.

Для того, чтобы расстояние между двумя множествами достигалось, достаточно, чтобы одно из множеств было компактным, а другое замкнутым. Докажем это.

4 семестр
Лекция 2
(12.02.69)

Лемма о расстоянии между компактным и замкнутым множеством. *Пусть в* E^n *задано два множества: компактное* K *и замкнутое* F. *Тогда расстояние между* K *и* F *достигается. Если* $K \bigcap F = \varnothing$, *то* $d(K, F) > 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть замкнутое множество F не ограничено (иначе выполняются условия предыдущей леммы). Возьмем шар радиуса R с центром в точке x_c из K, содержащий K и пересекающий F (см. рис. 17.3). Ясно, что $d(K, F) \leq R$.

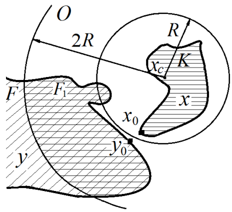


Рис. 17.3.

Пусть O – замкнутый шар радиуса $2R$ с центром в той же точке x_c из K. Тогда $F_1 = F\bigcap O$ – ограниченное замкнутое множество, т. е. компакт. Для произвольных $y \in F\backslash F_1$ и $x \in K$ имеем $2R < \rho(y, x_c) \le \rho(y, x)+$ $+\rho(x, x_c) \le \rho(y, x) + R$, откуда $\rho(y, x) > R$. Следовательно, $d(K, F) = d(K, F_1)$ ("расстояние $d(K, F)$ достигается в F_1"), и утверждение данной леммы следует из предыдущей. ▶

Определение меры компактного множества посредством квадрильяжа. Пусть K – компактное множество на плоскости.

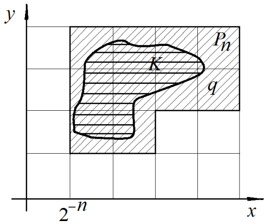


Рис. 17.4. Квадрильяж.

Введем декартову прямоугольную систему координат на этой плоскости и для выбранного натурального числа n разделим оси координат на отрезки длины 2^{-n}, начиная от начала координат. Координатные прямые, проходящие через эти точки образуют квадратную сетку, которая делит плоскость на замкнутые квадратики q со сторонами 2^{-n}. Такое разбиение плоскости на квадратики (не теоретико-множественное, так как внутренности квадратов не пересекаются, а границы могут пересекаться) называется *квадрильяж*.

Рассмотрим объединение $\bigcup\limits_i q_i$ таких замкнутых квадратиков, что $q_i \bigcap K \ne \varnothing$. Тогда $\overline{P}_n = \bigcup\limits_i q_i$ – некоторый замкнутый многоугольник (рис. 17.4). Покажем, что множество K содержится не только в замкнутом $\overline{P}_n$, но и в открытом многоугольнике P_n: $K \subset P_n$, так как граничные точки P_n не принадлежат K по построению. Действительно, если $x \in K$, то x принадлежит какому-нибудь замкнутому квадратику q из квадрильяжа, следовательно, этот квадратик $q \subset \overline{P}_n$. Тогда имеет место одна из следующих возможностей: x либо принадлежит внутренности q, либо лежит на его стороне или совпадает с вершиной q. Если x внутренняя точка q, то она будет также внутренней для P_n; если x лежит на стороне квадрата q, то она будет внутренней точкой объединения двух или четырех (в случае, если x вершина q) квадратиков, содержащихся в $\overline{P}_n$, следовательно, $x \in P_n$. Отсюда вытекает, что $K \subset P_n$ и граничные точки P_n не принадлежат K. По построению $\overline{P}_n$ – наименьший многоугольник, состоящий из квадратиков квадрильяжа, который содержит множество K в своей внутренности P_n.

Для построенных таким образом многоугольников P_n справедливо следующее

Предложение (выражение меры компактного множества через квадрильяж). *Пусть* K *– компактное множество на плоскости. Тогда*

$$m\,(K) = \lim_{n\to\infty} S(P_n)\,.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. По построению, $P_{n+1} \subset P_n$, поэтому площади $S(P_n)$ монотонно убывают с ростом n. Так как $m\,(K) \leq S(P_n)$, то $m\,(K) \leq \lim\limits_{n\to\infty} S(P_n)$. Для доказательства противоположного неравенства $m\,(K) \geq \lim\limits_{n\to\infty} S(P_n)$ рассмотрим

Свойство многоугольников P_n.

Пусть y – некоторая точка многоугольника P_n, построенного указанным выше способом для компактного множества K. Точка y принадлежит какому-то квадратику из квадрильяжа. В этом квадратике, по построению, есть точка из K, следовательно, $d(K,y) \leq 2^{-n}\cdot\sqrt{2}$ (в k-мерном пространстве будет справедливо неравенство $d(K,y) \leq 2^{-n}\cdot\sqrt{k}$). Рассмотрим произвольный открытый многоугольник Q, покрывающий K. Пусть $\complement Q = F$ – его дополнение. Это замкнутое множество. Множества K и F не пересекаются. Значит, они находятся друг от друга на некотором положительном расстоянии $d = d(K,F) > 0$, т.е. любая точка множества F удалена от K не меньше, чем на d. Найдем такое n, что $2^{-n}\cdot\sqrt{2} < d$ и построим наименьший многоугольник, состоящий из квадратиков квадрильяжа, построенного по этому числу n. Как показано выше, любая точка P_n удалена от K меньше, чем на $2^{-n}\cdot\sqrt{2}$. Это значит, что ни одна точка многоугольника P_n не принадлежит $\complement Q$, откуда следует, что $K \subset P_n \subset Q$. Из определения меры компактного множества следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой многоугольник Q, что $K \subset Q$ и $S(Q) < m(K)+\varepsilon$. Пусть P_n такой многоугольник из квадрильяжа, для которого выполняются включения $K \subset P_n \subset Q$. Значит, $S(P_n) < S(Q) < m(K)+\varepsilon$. Тогда $m(K) \geq S(P_n)-\varepsilon$ и, переходя к пределу, получим неравенство $m(K) \geq \lim\limits_{n\to\infty} S(P_n) - \varepsilon$. Следовательно, $m(K) = \lim\limits_{n\to\infty} S(P_n)$. ►

Таким образом, меру компактного множества K можно определять не только посредством произвольных многоугольников, но и посредством специальных многоугольников из квадрильяжа.

Для множества $M \subset E^2$ и положительного числа ε назовем *ε-расширением множества M* множество $M_\varepsilon = \{y : d(M, y) < \varepsilon\}$.

В ходе доказательства предложения мы установили, что для любого $d > 0$ найдется такой многоугольник $P = P_n$, который покрывает K и любая точка которого отстоит от K меньше, чем на d. Фактически мы доказали следующее

Утверждение. *Пусть K – компакт, $\varepsilon > 0$ и K_ε – ε-расширение множества K. Тогда существует многоугольник P такой, что $K \subset P \subset K_\varepsilon$.*

Это и есть то, что важно в квадрильяже. Он дает возможность строить для K покрывающий его многоугольник, любая точка которого удалена от K меньше произвольного наперед заданного ε. Таким образом, для изучения покрытия множества K многоугольниками достаточно рассматривать те многоугольники, которые находятся на ε-расстоянии от K. Мы определили меру множества K следующим образом: $m(K) = \inf\limits_{K\subset P} S(P)$.

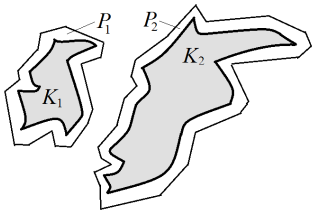


Рис. 17.5.

Но, вообще говоря, даже у тех многоугольников, площади которых мало отличаются от $m(K)$, могут быть точки, сильно удаленные от K. Теперь мы видим, что для многоугольника Q, покрывающего K, мы можем построить многоугольник P такой, что $K \subset P \subset K_\varepsilon$ и тогда $P \bigcap Q = Q_1 \supset K$, $K \subset Q_1 \subset K_\varepsilon$ и $Q_1 \subset Q$.

Следствие. *Непересекающиеся компактные множества на плоскости отделимы многоугольниками.*

Доказательство. Пусть K_1 и K_2 – компактные множества, $K_1 \bigcap K_2 = \varnothing$ (рис. 17.5), тогда $d(K_1, K_2) = d > 0$. Возьмем множества $(K_1)_{\frac{d}{3}}$ и $(K_2)_{\frac{d}{3}}$. Эти множества останутся непересекающимися. В силу предыдущего, существуют многоугольники P_1 и P_2 такие, что $K_1 \subset P_1 \subset (K_1)_{\frac{d}{3}}$, $K_2 \subset P_2 \subset (K_2)_{\frac{d}{3}}$, которые и являются искомыми. ▶

Заметим, что в метрических пространствах компактные непересекающиеся множества K_1 и K_2 тоже отделимы открытыми множествами $(K_1)_{\frac{d}{3}}$ и $(K_2)_{\frac{d}{3}}$, где d – расстояние между K_1 и K_2.

Доказательство третьего свойства меры. (Формулировку свойства см. на с. 455.) Покажем, что для любых компактных множеств K_1 и K_2, независимо от того, пересекаются они или нет, справедливо неравенство $m(K) \leq m(K_1) + m(K_2)$. Зададим $\varepsilon > 0$. Из определения меры следует, что найдутся многоугольники P_1 и P_2 такие, что $K_1 \subset P_1$, $K_2 \subset P_2$, и $m(K_1) \geq S(P_1) - \frac{\varepsilon}{2}$, $m(K_2) \geq S(P_2) - \frac{\varepsilon}{2}$. Положим $P = P_1 \bigcup P_2$. Для площадей этих многоугольников справедливо неравенство $S(P) \leq S(P_1) + S(P_2)$. Отсюда следует, что

$$m(K) \leq S(P) \leq S(P_1) + S(P_2) \leq m(K_1) + m(K_2) + \varepsilon,$$

и, в силу произвольности ε, получаем $m(K) \leq m(K_1) + m(K_2)$.

Пусть теперь $K_1 \bigcap K_2 = \varnothing$. Докажем, что $m(K) \geq m(K_1) + m(K_2)$. Это значит, что для любого многоугольника P, покрывающего K, его площадь не меньше, чем $m(K_1) + m(K_2)$. Отделим K_1 и K_2 многоугольниками P_1 и P_2. Таким образом, $K_1 \subset P_1$, $K_2 \subset P_2$ и $P_1 \bigcap P_2 = \varnothing$. Пусть многоугольник $P \supset K$. Построим многоугольники $Q_1 = P \bigcap P_1$ и $Q_2 = P \bigcap P_2$. Тогда многоугольники Q_1 и Q_2 тоже не будут пересекаться, будут покрывать множества K_1 и K_2, соответственно, и $Q_1 \bigcup Q_2 \subset P$. Отсюда, в силу свойств площади многоугольников и меры компактных множеств, получим

$$S(P) \geq S(Q_1 \bigcup Q_2) = S(Q_1) + S(Q_2) \geq m(K_1) + m(K_2).$$

Это верно для произвольного многоугольника $P \supset K$, следовательно, $m(K) \geq m(K_1) + m(K_2)$ и свойство 3) доказано. ▶

Доказательство четвертого свойства меры. (Формулировку свойства см. на с. 455.) Четвертое свойство является усилением третьего, а именно, теперь множества K_1 и K_2 могут пересекаться, $k = K_1 \bigcap K_2$, но $m(k) = 0$. Как уже было показано при доказательстве свойства 3) $m(K) \leq m(K_1) + m(K_2)$. Надо доказать, что $m(K) \geq m(K_1) + m(K_2)$. Зададим $\varepsilon > 0$ и построим такой многоугольник P, что $k \subset P$ и $S(P) < \varepsilon$. Рассмотрим компактные множества $l_1 = K_1 \backslash P$ и $l_2 = K_2 \backslash P$. Тогда

$l_1 \bigcap l_2 = \varnothing$, $l_1 \subset K_1$, $l_2 \subset K_2$. Значит, $m\,(K_i) \geq m\,(l_i)$ ($i = 1, 2$). Оценим меру $m\,(l_i)$ снизу. Возьмем многоугольники R_i , содержащие l_i ($i = 1, 2$). Тогда $K_i \subset R_i \bigcup P$ и $m\,(K_i) \leq S(R_i \bigcup P) \leq$ $\leq S(R_i) + S(P) < S(R_i) + \varepsilon$ ($i = 1, 2$). Отсюда, в силу определения меры, вытекает, что $m\,(K_i) \leq m(l_i) + \varepsilon$ или $m\,(l_i) \geq m\,(K_i) - \varepsilon$ ($i = 1, 2$). В силу свойства 3 $m\,(l_1 \bigcup l_2) = m\,(l_1) + m\,(l_2)$. В силу монотонности меры отсюда получим, что

$$m\,(K) \geq m\,(l_1 \bigcup l_2) = m\,(l_1) + m\,(l_2) \geq m\,(K_1) + m\,(K_2) - 2\varepsilon\,. \quad \blacktriangleright$$

§ 78. Двойной интеграл Римана

Пусть K – произвольное компактное множество на плоскости и для точек $p \in K$ определена действительная функция $f(p)$. Дадим определение $\iint\limits_K f(p)\,ds$ (здесь ds обозначает элемент площади или элемент меры).

Разбиение (T) компактного множества K есть представление K в виде объединения $K = \bigcup\limits_{i=1}^{n} K_i$ компактных множеств K_i ("кусочков частей, элементов разбиения, ячеек...) таких, что если $i \neq j$, то множество $K_i \bigcap K_j = k_{ij}$ имеет меру $m\,(k_{ij}) = 0$.

Определим *диаметр разбиения* $d(T) = \max\limits_{i=1,\ldots,n} d(K_i)$ – это максимальный диаметр входящих в разбиение компактных множеств. *Диаметром множества* M в метрическом пространстве называется величина

$$d\,(M) = \sup_{x \in M,\, y \in M} \rho(x, y)$$

(в кратных, криволинейных и в поверхностных интегралах нам понадобятся диаметры множеств в пространстве E^n). Диаметр компактного множества K *достигается* (доказывается аналогично тому, как доказывается, что расстояние между компактными множествами достигается), т. е. существуют точки x_0, $y_0 \in K$ такие, что $d(K) = \sup\limits_{x,\, y \in M} \rho(x, y) = \rho(x_0, y_0)$.

Нас будут интересовать системы разбиений $\left\{(T^{(k)})\right\}$, диаметры которых стремятся к нулю: $d\,(T^{(k)}) \to 0$ ($k \to \infty$). *Существуют ли такие разбиения*? Вспомним, что граница компактных множеств может не иметь меру 0. Вопрос существования до-

пустимых разбиений решается методом квадрильяжа. Тогда пересечения $K_i \bigcap K_j = k_{ij}$ будут состоять из кусков стороны квадрата, а сторона квадрата имеет меру 0, следовательно и $m\,(k_{ij}) = 0$.
Определение. Рассмотрим разбиение (T) области интегрирования K. Положим $m_i = \inf\limits_{p \in K_i} f(p)$, $M_i = \sup\limits_{p \in K_i} f(p)$. В каждом из множеств K_i выберем точку ξ_i. Получим вектор $\xi = \xi_1, ..., \xi_n$. Составим *интегральную сумму Римана* для функции $f(p)$ по области интегрирования K, соответствующую разбиению (T) и вектору ξ:

$$S(T) = S(f, K, T, \xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, m\,(K_i)\,.$$

Можно это определение изменить следующим образом. Пусть $m_i = \inf\limits_{p \in K_i} f(p)$, $M_i = \sup\limits_{p \in K_i} f(p)$. Рассмотрим произвольные числа μ_i, $m_i \le \mu_i \le M_i$, и рассмотрим сумму $S(T) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i\, m\,(K_i)$. Тогда *двойным интегралом Римана* функции $f(p)$ по области интегрирования K назовем предел интегральных сумм Римана при $d(T) \to 0$:

$$\iint\limits_K f(p)\, ds = \lim_{d\,(T) \to 0} S(T)\,.$$

Замечание. Построенный нами интеграл не будет прямым аналогом классического интеграла Римана по отрезку. Он является аналогом одномерного интеграла Римана по компактному множеству в качестве области интегрирования. Чтобы определить такой интеграл, мы должны были бы определить на прямой меру компактных множеств. Двумерным аналогом интеграла Римана по отрезку будет интеграл Римана по квадрату или прямоугольнику.

Двойной интеграл, который мы рассматриваем, отличается от того, который рассматривается в [27] (т. 2 гл. 21) и в [28] (т. 2 гл. 16). Мы должны понять, что у двойного интеграла есть общего с одномерным интегралом Римана и что у них различно.

При интегрировании по отрезку для интеграла $\int\limits_a^b f(x)\, dx$ был доказан необходимый признак интегрирования: если f интегрируема на $[a, b]$, то она ограничена на этом отрезке. *Будет ли это выполняться в случае двойного интеграла*?

4 семестр
Лекция 3
(14.02.69)

На прошлой лекции было дано определение двойного интеграла Римана. "Теперь я некоторое время буду философствовать на эту тему." (С.Б.С.)

В понятие интеграла Римана $\iint\limits_K f(p)\,ds$ входит понятие меры. При этом не было необходимости, чтобы эта мера была двумерной мерой Лебега замкнутых ограниченных множеств. Анализируя понятие двойного интеграла Римана, мы видим, что это определение двойного интеграла может быть обобщено и для какой-нибудь другой меры. Это означает следующее. На плоскости E^2 заданы измеримые множества M. Класс *измеримых множеств* обозначим $\mathcal{M}$. В случае нашей меры $\mathcal{M} = \mathcal{K}$ – класс компактных множеств. Но это нигде в определении не использовалось. Для определения интеграла должен быть просто задан некоторый класс $\mathcal{M}$ измеримых множеств, для которых задана некоторая мера: для любого множества $M \in \mathcal{M}$ известна мера $\mu(M)$ этого множества. Мера должна обладать теми же четырьмя известными нам свойствами, которыми обладает мера Лебега и еще одним свойством 5) *существования сколь угодно мелких* разбиений измеримых множеств:

1) *положительность*;

2) *монотонность*;

3) *аддитивность*;

4) *аддитивность для случая* $k = K_1 \bigcap K_2 \neq \varnothing$, $\mu(k) = 0$;

5) *для любого* $M \in \mathcal{M}$ *существуют разбиения* (T) *множества* M *такие, что* $d(T) \to 0$ *и элементы каждого разбиения* (T) *пересекаются по множеству меры* 0.

Тогда можно определить двойной интеграл для класса $\mathcal{M}$. Таким образом, рассмотренный нами двойной интеграл Римана не является единственно возможным. Определение варьируется в зависимости от того, какая мера у нас введена. Можно меру Лебега, заданную первоначально на $\mathcal{K}$, распространить на более широкий класс $\mathcal{L}$ множеств, измеримых по Лебегу ($\mathcal{K} \subset \mathcal{L}$). Можно класс областей интегрирования сужать, например, можно рассмотреть класс $\mathcal{K}_1$ – класс компактных квадрируемых множеств ($\mathcal{K}_1 \subset \mathcal{K}$). [5] Если мы будем интегрировать по квадрируемым множествам, то мы получим так называемый "*классический интеграл Римана*".

Чем у́же класс множеств интегрирования, тем лучше свойства интеграла Римана. Не все свойства одномерного интеграла по отрезку переносятся на двойной интеграл. Рассмотрим примеры.

Пример ("Урод I"). Существуют $K \in \mathcal{K}$ и неограниченная функция $f(p)$, определенная на K, такие, что $\iint\limits_K f(p)\,ds$ существует.

Действительно, для произвольного компактного множества K меры 0 и для любой функции $f(p)$, $p \in K$, $\iint\limits_K f(p)\,ds = 0$, так как при любом разбиении (T) с любым выбором $\xi_i \in K_i$ интегральная сумма $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,m\,(K_i) = 0$.

Таким образом,

для двойного интеграла Римана не имеет места теорема об ограниченности интегрируемой функции. [6]

Пример ("Урод II"). Для интеграла Римана по отрезку справедлива следующая теорема об аддитивности интеграла по множеству. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезках $[a,c]$ и $[c,b]$. Тогда она интегрируема на их объединении $[a,b]$ и имеет место равенство $\int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Для двойного интеграла Римана теорема об аддитивности интеграла по множеству не остается верной. [7] Приведем пример компактных множеств K_1 и K_2, $m\,(K_1 \bigcap K_2) = 0$, и функции $f(p)$, $p \in K_1 \bigcup K_2$, таких, что $f(p)$ интегрируема на K_1, интегрируема на K_2, а на их объединении не интегрируема. Такое обстоятельство может иметь место для "*волосатых*" множеств: рассмотрим множества K_1 и K_2, изображенные на

---

[5] Фихтенгольц в [27], [28] рассматривает еще более узкий, чем $\mathcal{K}_1$ класс множеств - он рассматривает компакты, являющиеся замыканиями открытых множеств. (Ред.)

[6] Для двойного интеграла, рассматриваемого в [27] и [28], из интегрируемости функции следует ограниченность, как и в одномерном случае (см. [27] т. 2 п. 339, [28] т. 3 п. 589). (Ред.)

[7] Для двойного интеграла, рассматриваемого в [27] и [28], свойство аддитивности по мере, как и в одномерном случае, выполняется (см. [27] т. 2 п. 342, [28] т. 3 п. 592). (Ред.)

рис. 17.6. Множества K_1 и K_2 пересекаются в одной точке $K_1 \bigcap K_2 = p_0$ и $m(K_2) = 0$. Определим $f(p)$ так, что $f(p) = 0$ для $p \in K_1$. Тогда $f(p)$ интегрируема по множеству K_1 и $\iint\limits_{K_1} f(p)\,ds = 0$. Доопределим функцию $f(p)$ на $K_2 \backslash p_0$. Ясно, что как бы мы ее ни определили на K_2, интеграл $\iint\limits_{K_2} f(p)\,ds$ существует и равен 0, так как $m(K_2) = 0$. Определим функцию $f(p)$ на $K_2 \backslash p_0$ так, чтобы в любой окрестности точки p_0 функция $f(p)$ была неограниченная. Для этого сначала линейно отобразим отрезок K_2 на $[0,1]$ так, чтобы точка p_0 отображалась в 0. Таким образом, с помощью параметра t будет установлено взаимно однозначное соответствие между точками $K_2 \backslash p_0$ и точками полуинтервала $(0,1]$. Для точек из $K_2 \backslash p_0$ положим $f(p(t)) = \frac{1}{t}$. Тогда $f(p)$ не будет интегрируема на K. Для доказательства построим такую последовательность разбиений, интегральные суммы по которым не будут иметь предела, чего не может быть в случае интегрируемости функции на K. "Отрежем" от множества K "кусочек" K' положительной меры, захватывающий части множеств и от K_1 и от K_2. Пусть (T) – произвольное разбиение множества K, одним из элементов которого является K'. Все слагаемые в интегральной сумме равны нулю, кроме того слагаемого, которое отвечает кусочку K'. На кусочке K' значение функции сколь угодно велико. Путем выбора ξ произведение $f(\xi)m(K')$ можно сделать сколь угодно большим. Следовательно, предел интегральных сумм не существует и функция $f(p)$ на K не интегри-

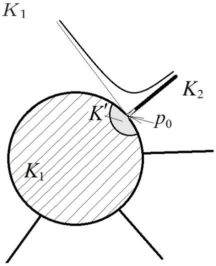


Рис. 17.6.

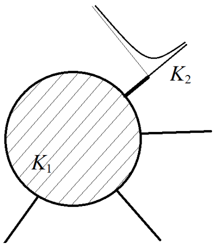


Рис. 17.7.

Пример ("Уродливый урод"). Существует функция, неограниченная на множестве положительной меры и интегрируемая на нем. Возьмем "волосатое" множество K из предыдущего примера, $m(K) > 0$ (см. рис. 17.7). На подмножестве K_1 и примыкающей к нему половине подмножества K_2 положим $f(p) = 0$. На оставшейся части подмножества K_2 пусть функция будет неограниченной. Эта функция интегрируема на K и $\iint\limits_K f(p)\, ds = 0$, так как все интегральные суммы по любому, достаточно мелкому, разбиению равны нулю.

Замечание. Однако, все "хорошие" свойства интеграла Римана сохраняются, если рассматривать ограниченные функции.

Теперь мы будем изучать двойной интеграл Римана от ограниченных функций.

§ 79. Критерии интегрируемости

Пусть имеется компактное множество K, функция $f(p)$ определена на K и $|f(p)| \le M$ $(\forall\, p \in K)$. Изучим условия, при которых существует $\iint\limits_K f(p) ds$. Здесь нам встретятся такие вопросы, для которых есть полное соответствие с одномерным случаем, и на них мы подробно останавливаться не будем. Но будут и вопросы, аналога которым нет в одномерном случае или решение которых требует методов, отличных от одномерного случая.

Так же, как и в одномерном случае можно ввести верхнюю и нижнюю интегральные суммы Дарбу и рассмотреть сумму колебаний $\Omega(T) = \sum\limits_{i=1}^{n} \omega_i\, m\,(K_i)$, где $\omega_i = \sup\limits_{p\in K_i} f(p) - \inf\limits_{p\in K_i} f(p)$. Так же, как в одномерном случае (§ 38 с. 167), доказывается

Предельный критерий интегрируемости. *Для того, чтобы ограниченная функция, заданная на компакте K, была интегрируема на K, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lim_{d(T)\to 0} \Omega(T) = 0\,.$$

Критерий Дарбу формулируется аналогично одномерному случаю (§ 38 с. 168), но доказывается иначе.

Критерий Дарбу. *Пусть функция $f(p)$ определена и ограничена на компактном множестве K. Тогда для того, чтобы существовал интеграл $\iint\limits_K f(p) ds$, необходимо и достаточно, чтобы* $\inf\limits_T \Omega(T) = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Н е о б х о д и м о с т ь очевидна (из предельного критерия).

Д о с т а т о ч н о с т ь (доказывается по тому же плану, что и в одномерном случае). Пусть $\inf\limits_T \Omega(T) = 0$, докажем, что тогда и предельный критерий выполнен. Из условия следует, что $\forall \varepsilon > 0$ $\exists (T_0)$ – такое разбиение множества K, что $\Omega(T_0) < \varepsilon$. Докажем, что тогда $\exists \delta = \delta(\varepsilon)$ $\forall (T)$, $d(T) < \delta$, $\Omega(T) < 2\varepsilon$. Это и будет означать, что для любого достаточно мелкого разбиения все суммы малы и по предельному критерию функция интегрируема.

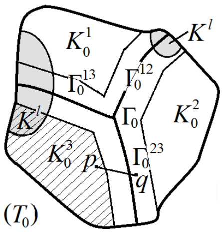


Рис. 17.8.

Зададим $\varepsilon > 0$. Для этого значения ε зафиксируем разбиение (T_0) такое, для которого $\Omega(T_0) < \varepsilon$. (T_0) состоит из компактных множеств K_0^i ($i = 1, ..., n_0$). Таким образом, $\bigcup\limits_{i=1}^{n_0} K_0^i = K$. Обозначим $K_0^i \bigcap K_0^j = \Gamma_0^{ij}$ ($m(\Gamma_0^{ij}) = 0$, $i \neq j$) и $\bigcup\limits_{i \neq j} \Gamma_0^{ij} = \Gamma_0$. При этом $\Gamma_0^{ij} \in \mathcal{K}$ и $\Gamma_0 \in \mathcal{K}$, как пересечения и конечное объединение компактных множеств. В силу основных свойств меры $m(\Gamma_0) = 0$. Заметим, что Γ_0 не обязано содержать всю границу множества K.

Так как $m(\Gamma_0) = 0$, то найдется многоугольник $P_0 \supset \Gamma_0$ сколь угодно малой площади (см. рис. 17.8). Мы будем считать, что $m(P_0) < \eta$ (η зададим позже).

Рассмотрим теперь множества $L^i = K_0^i \backslash P_0 \in \mathcal{K}$. Очевидно, что $L^i \bigcap K_0^j = \varnothing$ ($i \neq j$). Следовательно, $d(L^i, K_0^j) = d_{ij} > 0$ ($i \neq j$). Обозначим $d = \min\limits_{i \neq j} d_{ij} > 0$ и заметим, что если мы возьмем произвольные точки $p \in L^i$ и $q \in K_0^j$, то расстояние между ними $\rho(p,q) \geq d$ ($i \neq j$). Ясно, что $d = d(\varepsilon, \eta)$, т.е. d зависит от ε и η.

Возьмем мелкое разбиение (T), состоящее из элементов K^l ($l = 1, ..., n$). Допустим, что $d(T) < \delta$ (δ мы подберем после, в зависимости от ε и так, чтобы любой кусочек разбиения (T), который пересекается по крайней мере с двумя элементами разбиения (T_0), лежал бы целиком в P_0).

Если K^l не лежит в P_0, то это значит, что K^l пересекается с некоторым L^i. Мы хотим, чтобы в этом случае $K^l \subset K_0^i$. Для этого достаточно потребовать, чтобы выполнялось неравенство $d(T) < \delta = d(\varepsilon, \eta)$. Действительно, в этом случае, в силу построения, для точки $p \in K^l \bigcap L^i$, расстояние до множеств K_0^j ($j \neq i$) больше или равно $d = d(\varepsilon, \eta) = \delta$, а тогда ни одна точка из K^l не принадлежит K_0^j ($j \neq i$). Следовательно, $K^l \subset K_0^i$. Таким образом, каждое множество K^l либо содержится в одном из множеств K_0^i, либо содержится в P_0.

Дальше, как в одномерном случае, разделим все множества K^l на два класса I и II (см. рис. 17.9). К I отнесем те множества K^l, для которых $K^l \bigcap L^i \neq \varnothing$ и, согласно доказанному, $K^l \subset K_0^i$, а к II – такие множества K^l, что $K^l \subset P_0$. Оценим

$$\Omega(T) = \sum_{\mathrm{I}} \omega_l \, m\,(K^l) + \sum_{\mathrm{II}} \omega_l \, m\,(K^l)\,.$$

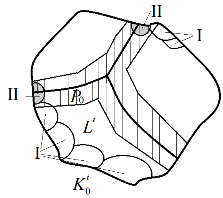


Рис. 17.9.

Оценим первую сумму. Для любого K^l из класса I $K^l \subset K_0^i$. Значит, справедливы неравенства $\omega_l \le \omega_i^0$ и $\sum\limits_{K^l \subset K_0^i} m\,(K^l) \le m(K_0^i)$, и так как $\Omega(T_0) < \varepsilon$, то

$$\sum_{\mathrm{I}} \omega_l \, m\,(K^l) \le \sum_{i=1}^{n_0} \omega_i^0 \, m\,(K_0^i) < \varepsilon\,.$$

Так как для класса II множества $K^l \subset P_0$ и так как $f(p)$ ограниченная функция, и, следовательно, $|f(p)| \le M$ ($p \in K$) для некоторого $M > 0$, то для второй суммы

$$\sum_{\mathrm{II}} \omega_l \, m\,(K^l) \le 2M \sum_{\mathrm{II}} m(K^l) \le 2Mm\,(P_0) \le 2M\eta\,.$$

Положим $\eta = \frac{\varepsilon}{2M}$. Тогда $d(\varepsilon, \eta) = d\left(\varepsilon, \frac{\varepsilon}{2M}\right) = d_0(\varepsilon)$ и $\delta(\varepsilon) = d_0(\varepsilon)$. Таким образом, имеем: $\forall\,(T)$, $d(T) < \delta(\varepsilon)$, $\Omega(T) \le \varepsilon + 2M\eta \le 2\varepsilon$. ►

4 семестр
Лекция 4
(19.02.69)

Замечание к теореме Дарбу. В плоскости геометрия устроена сложнее, чем на прямой. Поэтому доказательство в плоском случае оказалось сложнее, чем в линейном случае. Почему это так? Пусть есть компактное множество $K \subset E^2$ и два разбиения (T) и (T'). Можем ли мы считать, что ячейки K_i и K'_j этих разбиений устроены достаточно просто? Например, если множество K связно, то можем ли мы считать, что всегда ячейки разбиений связны, или этого может не быть?

Назовем разбиение (T'') *продолжением разбиения* (T), если каждый элемент разбиения (T) является объединением элементов разбиения (T'').

Рассмотрим разбиения (T) и (T'), изображенные на рисунке 17.10 а). Построим разбиение (T''), которое будет продолжением разбиений (T) и (T'). Разбиение (T'') состоит из четырех ячеек: $K_1 \bigcap K_1' = K_1''$, $K_1 \bigcap K_2' = K_2''$, $K_2 \bigcap K_1' = K_3''$, $K_2 \bigcap K_2' = K_4''$. В исходных разбиениях ячейки были связны, но в продолжении (T'') ячейки оказались "рассыпанными" (причем некоторые на счетное число кусочков). Таким образом, ячейки в разбиении могут быть достаточно сложными (например, мы не имеем права считать их связными). Но все они имеют меру и меры их попарных пересечений равны 0.

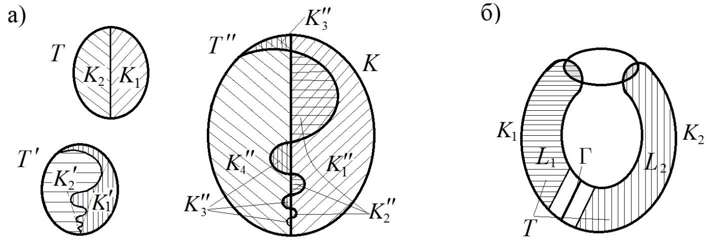


Рис. 17.10.

Рисунок 17.10 б) иллюстрирует тот факт, что если бы в доказательстве теоремы Дарбу мы взяли диаметры разбиений меньшими, чем расстояния множеств L_i ($i = 1, 2$) от границы Γ, то могли бы также получить несвязную ячейку, пересекающуюся и с L_1 и с L_2. Это показывает, что данное нами доказательство теоремы Дарбу, таким способом упростить нельзя.

§ 80. Признаки интегрируемости функций

80.1. Необходимый признак интегрируемости

Будем обозначать $R[K]$ класс интегрируемых на K функций. Уже отмечалось, что существуют множества такие, что неограниченные функции на них оказываются интегрируемыми. Возникает вопрос: нельзя ли найти подкласс $\mathcal{K}_0 \subset \mathcal{K}$ такой, что если $K \in \mathcal{K}_0$ и $f \in R[K]$, то f ограниченная?

Необходимый признак интегрируемости для специальных множеств. *Пусть компактное множество* $K \subset E^2$ *обладает следующим свойством: для любого* $x \in K$ *для любой окрестности* $O(x)$ $m\left(K \bigcap \overline{O(x)}\right) > 0$. *Тогда, если* $f \in R[K]$, *то* f *ограниченная.*

Замечание. Здесь рассматривается "стриженое" множество. "Волосатое" множество этим свойством не обладает. При доказательстве этой теоремы будем пользоваться принципом ящиков.

Принцип ящиков. [8] *Если счетное множество шариков поместить в конечное множество ящиков, то, по крайней мере, в одном из ящиков будет счетное множество шариков.*

Доказательство теоремы. 1) Докажем, что $\forall x_0 \in K$ $\forall T$ $\exists i_0 \in \mathbb{N}$ $x_0 \in K_{i_0}$ и $m(K_{i_0}) > 0$. Таким образом, для множеств K, удовлетворяющих условию теоремы, каждая точка попадает в ячейку положительной меры. Возьмем точку $x_0 \in K$; зададим $\varepsilon_1 > 0$ и рассмотрим ε_1-окрестность точки x_0. По условию $m\left(K \bigcap \overline{O_{\varepsilon_1}(x)}\right) = m_1 > 0$. Выберем $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$ так , что $m\left(\overline{O_{\varepsilon_2}(x_0)}\right) < m_2 < m_1$. Тогда кольцо $l_1 = \overline{O_{\varepsilon_1}(x)} \backslash O_{\varepsilon_2}(x_0)$ имеет положительную меру и его пересечение с K тоже имеет положительную меру. Продолжая далее это построение, получим последовательность колец $l_1, l_2, \ldots$, пересекающихся друг с другом по мере 0, стягивающихся к точке x_0 и таких, что пересечение любого из них с K имеет положительную меру (см. рис. 17.11 а).

Рассмотрим теперь пересечения ячеек с одним из колец $K_i \bigcap l_s$ ($i = 1, \ldots, m$). Так как $K = \bigcup\limits_{i=1}^{m} K_i$, а $m(K \bigcap l_s) > 0$, то найдется номер i, для которого $m(K_i \bigcap l_s) > 0$. Это утверждение справедливо для любого из колец l_s ($s = 1, 2, \ldots$). Так как ячеек K_i конечное число, а колец l_s счетное множество, то в силу принципа ящиков найдется номер i_0 такой, что $m(K_{i_0} \bigcap l_s) > 0$ для бесконечного множества номеров s. Но кольца стягиваются

[8] Известен *принцип "ящиков" Дирихле* для конечных множеств, который обычно формулируют так: если в n ящиков поместить $n+1$ шар, то найдется ящик, в котором будет более, чем один шар. (Ред.)

к x_0 , значит, в любой окрестности точки x_0 найдутся точки множества K_{i_0} . Таким образом, x_0 – предельная точка замкнутого множества K_{i_0} и, следовательно, $x_0 \in K_{i_0}$. Итак, для произвольного разбиения T мы нашли такой номер i_0 , что $x_0 \in K_{i_0}$ и $m\left(K_{i_0}\right) > 0$.

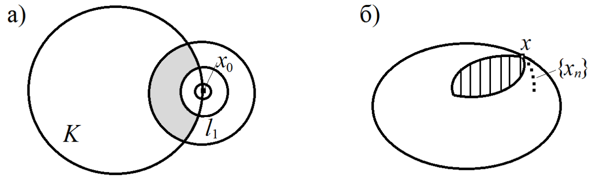


Рис. 17.11.

2) Допустим теперь, что функция f – неограниченная на K . Тогда, в силу компактности K , мы можем найти точку x и последовательность $x_n \to x$ (см. рис. 17.11 б) такую, что $|f(x_n)| \to \infty$ ($n \to \infty$). Пусть теперь (T) – произвольное разбиение компакта K . По доказанному в 1) $\forall x_n \ \ \exists K_{i_n} \ \ m(K_{i_n}) > 0$ и $x_n \in K_{i_n}$. Так как членов последовательности $\{x_n\}$ – счетное множество, а ячеек конечное число, то по принципу ящиков $\exists p \ \ m\left(K_p\right) > 0$ и $x_{n_j} \in K_p$, $j = 1, 2\ldots$. Таким образом, для произвольного разбиения T мы нашли ячейку, в которой функция неограниченная. Следовательно (как и в одномерном случае), по любому разбиению (T) мы можем сделать интегральную сумму Римана сколь угодно большой по абсолютной величине. Значит, интегральные суммы Римана предела не имеют и функция f не интегрируема на K , что противоречит условию. ►

Заметим, что компакты, являющиеся замыканиями открытых квадрируемых множеств, удовлетворяют условию теоремы, но класс множеств, удовлетворяющих этому условию, более широкий.

80.2. Интегрируемость характеристических функций множеств

Пусть на плоскости E^2 задано произвольное ограниченное множество M. Построим замкнутый квадрат D такой, что $M \subset D$.

Рассмотрим $\chi_M(p) = \begin{cases} 1, & p \in M, \\ 0, & p \in \complement M, \end{cases}$ – характеристическую функцию множества M, определенную на всем D.

Если $\iint\limits_D \chi_M(p)\,ds = S(M)$ существует, то мы будем говорить, что *множество* M *имеет площадь* $S(M)$. Если множество имеет площадь, то называется *квадрируемым множеством* (по аналогии с одномерным случаем, когда мы говорили, что если одномерный интеграл от характеристической функции множества существует, то множество имеет длину). Далее мы увидим, что в случае компактных множеств такие определения площади множества и квадрируемости множества совпадают с данными ранее.

Замечание. Обратим внимание на то, что $\iint\limits_{\overline{M}} \chi_M(p)\,ds$ есть более широкое понятие, чем $\iint\limits_D \chi_M(p)\,ds$. Например, если M – ограниченное замкнутое множество, $M = \overline{M}$, то $\iint\limits_{\overline{M}} \chi_M(p)\,ds$ всегда существует и равен $m\,(M)$. Мы увидим, что $\iint\limits_D \chi_M(p)\,ds$ существует не всегда. Предварительно заметим, что граница $\Gamma(M)$ ограниченного множества M является компактным множеством и, следовательно, измерима. Вычисление площади - основное геометрическое приложение двойного интеграла.

Теорема о площади ограниченного множества. *Для того, чтобы ограниченное множество имело площадь, необходимо и достаточно, чтобы граница множества имела меру нуль.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть на плоскости задано произвольное ограниченное множество $M \subset E^2$. Построим замкнутый квадрат D такой, что $M \subset D$. Докажем, что если мера границы положительна, то интеграл $\iint\limits_D \chi_M(p)\,ds$ не существует. В самом деле, зададим $\varepsilon > 0$ и возьмем мелкое разбиение (T), $d(T) < \varepsilon$, множества D на квадратики – квадрильяж квадрата D. Рассмотрим те квадратики K_i, внутренности которых пересекаются с Γ. Тогда объединение этих замкнутых квадратиков будет содержать Γ и значит,

$$\sum_{\overset{\circ}{K}_i \bigcap \Gamma \neq \varnothing} m\,(K_i) \geq m\,(\Gamma) > 0$$

($\overset{\circ}{K}_i$ – внутренность K_i). Возьмем квадратик K_i, у которого внутренность пересекается с Γ. В любой окрестности точки $p_0 \in \overset{\circ}{K}_i \bigcap \Gamma \neq \varnothing$ есть точки из M и есть точки из $\complement M$. Значит, в любой окрестности точки p_0 есть точки p, в которых характеристическая функция $\chi_M(p) = 1$, и есть точки p (см. рис. 17.12 а), в которых $\chi_M(p) = 0$. На таких квадратиках K_i колебание функции $\omega_i = 1$. Значит, $\Omega(T) \geq m(\Gamma)$, а $d(T) < \varepsilon$. Из предельного критерия следует, что функция $\chi_M(p)$ не интегрируема, т.е. множество M не имеет площади.

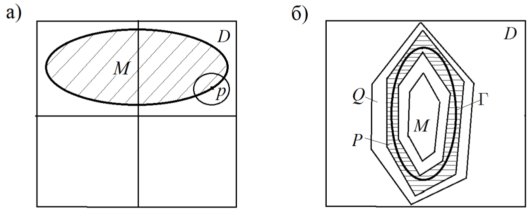


Рис. 17.12.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть граница Γ множества M имеет меру нуль. Это значит, что границу Γ мы можем заключить в многоугольник P (см. рис. 17.12 б), площадь которого меньше $\frac{\varepsilon}{2}$. Замкнутый многоугольник $\overline{P}$ заключим в многоугольник Q, площадь которого меньше ε. Тогда $D \backslash Q$ компакт и $\rho(\overline{P}, D \backslash Q) = \delta > 0$. В $D \backslash P$ характеристическая функция χ_M непрерывна, так как каждая точка множества $D \backslash P$ является либо внутренней, либо внешней точкой множества M. Значит, χ_M либо равна 1, либо равна 0 в некоторой окрестности произвольной точки из $D \backslash P$ и, следовательно, непрерывна на $D \backslash P$. Так как $D \backslash P$ компакт, то χ_M равномерно непрерывна на $D \backslash P$. В силу равномерной непрерывности найдется $\delta_0 > 0$ такое, что колебание $\omega_i < \frac{1}{2}$ (и, значит, $\omega_i = 0$, в силу того, что функция у нас характеристическая) на всяком подмножестве компакта $D \backslash P$, диаметр которого меньше δ_0. Возьмем разбиение (T), диаметр которого меньше $\delta_1 = \min(\delta, \delta_0)$, и оценим для него $\Omega(T)$. Для этого разобьем сумму $\Omega(T)$ на две части: сумму по тем кусочкам, которые пересекаются с P, и по остальным кусочкам. Тогда

$$\Omega(T) = \sum_{K_i \bigcap P \neq \varnothing} + \sum_{K_i \bigcap P = \varnothing} \leq \sum_{K_i \bigcap P \neq \varnothing} m(K_i) < S(Q) < \varepsilon,$$

так как, если $K_i \bigcap P = \varnothing$, то $K_i \subset D \backslash P$, и $\omega_i = 0$, и вторая сумма равна нулю, а в первой сумме все кусочки не выходят за пределы Q. Таким образом, в силу предельного критерия интегрируемости, функция χ_M интегрируема на D, и, значит, множество M имеет площадь. ▶

Переформулируем доказанную теорему для характеристической функции.

Необходимое и достаточное условие интегрируемости характеристической функции. *Для того, чтобы характеристическая функция ограниченного множества была интегрируема, необходимо и достаточно, чтобы граница множества имела меру нуль.*

4 семестр
Лекция 5
(21.02.69)

Замечание. Теорема о необходимом и достаточном условии интегрируемости характеристической функции имеет более простое доказательство, если свести достаточность к критерию Дарбу. Именно, мы можем заключить границу $\Gamma = \Gamma(M)$ множества M в многоугольник P достаточно малой площади $m(P) < \varepsilon$. Тогда множество $E = D \backslash P$ – замкнутое множество. Его можно разбить на два множества: E_0, на котором функция $\chi_M(x) = 0$ и E_1, на котором $\chi_M(x) = 1$. Так как характеристическая функция χ_M на множестве E непрерывна, то множества E_0 и E_1 замкнуты и $E_0 \bigcap E_1 = \varnothing$. Значит, на квадрате D построено разбиение на три множества E_0, E_1, $\overline{P}$. Для множества $\overline{P}$ из этого разбиения $m(\overline{P}) < \varepsilon$, $\omega = 1$, на двух других множествах колебание функции равно нулю, и, следовательно, $\Omega(T) < \varepsilon$. Критерий Дарбу выполнен и достаточность доказана.

80.3. Достаточное условие интегрируемости функции

Достаточное условие интегрируемости функции. *Пусть функция f ограничена на некотором компактном множестве K и замыкание множества ее точек разрыва имеет меру нуль. Тогда функция f интегрируема по множеству K.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $|f(p)| \leq M$ на множестве K и N – множество точек разрыва функции f. Это множество, вообще говоря, не является замкнутым. По условию теоремы $m(\overline{N}) = 0$. Зададим $\varepsilon > 0$. Покроем множество $\overline{N}$ таким многоугольником P, $\overline{N} \subset P$, для которого $m(\overline{P}) < \frac{\varepsilon}{4M}$. Рассмотрим компактное множество $K \backslash P = K_1$, оно не содержит точек разрыва функции, значит функция равномерно непрерывна на множестве K_1. Мы можем взять такое разбиение (T_1) множества K_1 с диаметром $d(T_1) < \delta$, что на любом кусочке K_1^i этого разбиения колебание функции будет мало: $\omega_i < \frac{\varepsilon}{2m(K)}$. Рассмотрим теперь разбиение (T) всего компакта K, которое состоит из $\overline{P} = K_0$ и разбиения (T_1). Тогда

$$\Omega(T) = \omega_0 m(K_0) + \sum_{i=1}^{n} \omega_i m(K_1^i) < \frac{\varepsilon}{4M} 2M + \sum_{i=1}^{n} \omega_i m(K_1^i) <$$
$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2m(K)} m(K) = \varepsilon .$$

Отсюда в силу критерия Дарбу следует, что функция интегрируема. ▶

Упражнение. Построить такую интегрируемую функцию, замыкание множества точек разрыва которой имеет ненулевую меру. Таким образом, будет показано, что условие теоремы не является необходимым.

80.4. Свойства двойного интеграла

Теорема (интегрируемость на замкнутых подмножествах). *Пусть функция f определена и ограничена на ограниченном замкнутом множестве K, $f \in R[K]$ и пусть K_1 – замкнутое подмножество K. Тогда функция f будет интегрируема на K_1.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зададим $\varepsilon > 0$ и построим разбиение $(T) = (T_K)$ множества K, для которого разность $\Omega_K(T_K)$ верхней и нижней сумм Дарбу меньше ε (это можно сделать в силу интегрируемости функции f на K). Обозначим K_i' ячейки разбиения (T_K). Возьмем следующее разбиение (T) множества $K_1 : K_i'' = K_i' \bigcap K_1$. Это будет допустимое разбиение K_1, так как ячейки K_i'' замкнуты и их пересечения $K_i'' \bigcap K_j''$ ($i \neq j$) имеют меру нуль. В таком случае, очевидно, $\Omega_{K_1}(T) \leq \Omega_K(T_K) < \varepsilon$, и по критерию Дарбу функция интегрируема на K_1. Значит, интегрирование функции на множестве влечет интегрирование и на любом замкнутом подмножестве. ▶

Обратная теорема неверна, даже если функцию продолжить нулем. Переход от K_1 к K может нарушить интегрируемость. Об этом говорилось в замечании в начале пункта 80.2. Конкретный пример таких множеств и функции приведем после того, как построим

Пример компактного множества с границей положительной меры. Возьмем числовую последовательность $\{\varepsilon_n\}$, $\varepsilon_n > 0$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < 1$. Из квадрата площади $S = 1$ выбросим открытый крест площади $S_1 \leq \varepsilon_1$ (см. рис. 17.13). Из каждого из четырех получившихся квадратиков выбросим кресты суммарной площади $S_2 \leq \varepsilon_2$, и так далее. Тогда внутренних точек у получившегося множества нет, множество совпадает со своей границей и мера границы $m(\Gamma) > 0$.

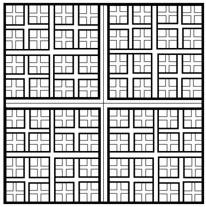


Рис. 17.13.

Если в качестве K взять квадрат площади единица, а в качестве K_1 – построенный в примере компакт с границей положительной меры, то характеристическая функция множества K_1 не будет интегрируемой.

Теорема (аддитивность интеграла Римана). *Пусть функция f задана и ограничена на объединении K компактов K_1 и K_2, $m(K_1 \bigcap K_2) = 0$, и $f \in R[K_1]$, $f \in R[K_2]$. Тогда $f \in R[K]$.*

Доказательство. Зададим $\varepsilon > 0$ и возьмем разбиения (T_1) множества K_1 и (T_2) множества K_2 (см. рис. 17.14) такие, что $\Omega_{K_1}(T_1) < \frac{\varepsilon}{2}$, $\Omega_{K_2}(T_2) < \frac{\varepsilon}{2}$ (это можно сделать в силу интегрируемости функции f на K_1 и на K_2). Возьмем разбиение (T), состоящее из ячеек разбиений (T_1) и (T_2). В силу условия $m(K_1 \bigcap K_2) = 0$ разбиение (T) – допустимое разбиение множества K. Тогда $\Omega_K(T) \leq \Omega_{K_1}(T_1) + \Omega_{K_2}(T_2) < \varepsilon$ и функция интегрируема на K. Далее, рассматривая интегральные суммы и переходя к пределу, получим $\iint\limits_K f\,ds = \iint\limits_{K_1} f\,ds + \iint\limits_{K_2} f\,ds$. ▶

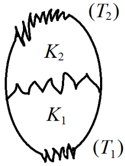


Рис. 17.14.

Замечание. Без условия ограниченности функции на K или без условия $m(K_1 \bigcap K_2) = 0$ теорема неверна.

Следующие свойства интеграла Римана по отрезку сохраняются для двойного интеграла от ограниченных функций и доказательства ничем не отличаются от одномерного случая:

1. $c\iint\limits_K f\,ds = \iint\limits_K cf\,ds$;

2. $\iint\limits_K f_1\,ds + \iint\limits_K f_2\,ds = \iint\limits_K \{f_1+f_2\}\,ds$.

Эти равенства читаются слева направо: если интегралы в левых частях существуют, то и в правых частях существуют, и имеют место равенства.

3. Если $A \le f(p) \le B$ на K и функция $f \in R[K]$, то
$$Am(K) \le \iint\limits_K f\,ds \le Bm(K)\,.$$

4. Если $f \in R[K]$, то и $|f| \in R[K]$, и справедливо неравенство:
$$\left|\iint\limits_K f\,ds\right| \le \iint\limits_K |f|\,ds\,.$$
Из этих свойств следует, что на классе ограниченных функций двойной интеграл Римана по ограниченному замкнутому множеству есть ограниченный линейный функционал. При этом
$$\left|\iint\limits_K f\,ds\right| \le \sup_K |f|\,m(K)\,.$$
Отметим еще одно свойство

5. Если $f \in R[K]$ и $g \in R[K]$, то $fg \in R[K]$.

§ 81. Вычисление двойного интеграла

81.1. Сведение двойного интеграла к повторному

Теорема 1. *Пусть* $f \in R[D]$, *где* $D = \left\{\begin{array}{c} a \le x \le b \\ c \le y \le d \end{array}\right\}$ (*прямоугольник*). *Предположим, что для любого* $x \in [a,b]$ *существует интеграл* $I(x) = \int\limits_c^d f(x,y)\,dy$. *Тогда* $I(x) \in R[a,b]$ *и имеет место равенство*
$$\iint\limits_D f(x,y)\,ds = \int\limits_a^b I(x)\,dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)\,dy\,.$$
Если для любого $y \in [c,d]$ *существует* $J(y) = \int\limits_a^b f(x,y)\,dx$, *то*

$$\iint\limits_D f(x,y)\,ds = \int\limits_c^d J(y)\,dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x,y)\,dx\,.$$

При выполнении обоих условий

$$\iint\limits_D f(x,y)\,ds = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)\,dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x,y)\,dx\,.$$

Отметим, что если существует двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)\,ds$, то интеграл $I(x)$ может и не существовать даже для очень многих x.[9)]

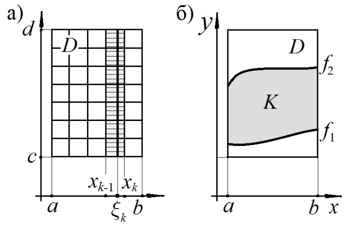


Рис. 17.15.

Доказательство. Так как f интегрируема на прямоугольнике, то она ограничена. Разобьем прямоугольник D на мелкие прямоугольники (см. рис. 17.15 а):

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\,,$$
$$c = y_0 < y_1 < \ldots < y_m = d\,.$$

Возьмем любой отрезок $[x_{k-1}, x_k]$, выберем и зафиксируем точку $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$. Функция $f \in R[D]$, значит, f ннтегрируема и по всему "столбику" $[x_{k-1}, x_k] \times [c,d]$ и по прямоугольникам

$$D_{k,j} = [x_{k-1}, x_k] \times [y_{j-1}, y_j]\,.$$

Обозначим $m_{ik} = \inf\limits_{D_{ik}} f(x,y)$, $M_{ik} = \sup\limits_{D_{ik}} f(x,y)$. Тогда для функции f справедливы неравенства $m_{jk} \le f(\xi_k, y) \le M_{jk}$ и

$$\Delta x_k \sum_{j=1}^m m_{jk}\Delta y_j \le \Delta x_k \sum_{j=1}^m \int\limits_{y_{j-1}}^{y_j} f(\xi_k,y)\,dy \le \Delta x_k \sum_{j=1}^m M_{jk}\Delta y_j\,.$$

Просуммируем эти неравенства еще и по k:

$$\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m m_{jk}\Delta x_k \Delta y_j \le \sum_{k=1}^n \Delta x_k \int\limits_c^d f(\xi_k,y)\,dy \le \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m M_{jk}\Delta x_k \Delta y_j\,.$$

Суммы в левой и правой частях этих неравенств есть нижняя и верхняя суммы Дарбу для $f \in R[D]$, следовательно, левая и правая части неравенств при $d(T) \to 0$ имеют один и тот же предел. Этот же предел имеет и сумма

$$\sum_{k=1}^n \Delta x_k \int\limits_c^d f(\xi_k,y)\,dy = \sum_{k=1}^n \Delta x_k I(\xi_k)\,,$$

9) Подобный пример см. в [31], пример 15.11. (Ред.)

которая есть интегральная сумма для функции $I(x)$ на отрезке $[a,b]$. Следовательно, $I(x)\in R\,[a,b]$ и $\iint\limits_D f(x,y)ds=\int\limits_a^b dx\int\limits_c^d f(x,y)dy$.

Если для любого $y\in[c,d]$ существует $J(y)=\int\limits_a^b f(x,y)\,dx$, то аналогично можно показать, что $J(y)\in R\,[c,d]$ и имеет место равенство $\iint\limits_D f(x,y)\,ds=\int\limits_c^d dy\int\limits_a^b f(x,y)\,dx$. ►

Теорема 2 (о сведении двойного интеграла к повторному). *Пусть* $f\in R\,[K]$, *где* $K=\left\{\begin{array}{c} f_1(x)\le y\le f_2(x)\\ a\le x\le b\end{array}\right.$, f_1,f_2 *– непрерывные на* $[a,b]$ *функции, множество* $\{x\in[a,b]:\ f_1(x)=f_2(x)\}$ *имеет меру нуль, и для любого* $x\in[a,b]$ *существует интеграл* $I(x)=\int\limits_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)\,dy$. *Тогда* $I(x)\in R\,[a,b]$ *и справедливо равенство* $\iint\limits_K f(x,y)\,ds=\int\limits_a^b I(x)\,dx$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим прежде всего, что компакт K обладает свойством, указанным в необходимом признаке интегрируемости для специальных множеств (с. 471), поэтому из интегрируемости функции f на K следует ее ограниченность на K. Также отметим, что граница множества K имеет меру нуль. Построим расширение $\overline{f}$ функции f. Возьмем прямоугольник $D\supset K$ (рис. 17.15 б) и определим функцию $\overline{f}(p)=\left\{\begin{array}{ll} f(p), & p\in K,\\ 0, & p\notin K, p\in D.\end{array}\right.$ Следовательно, $\overline{f}\in R\,[D]$ по теореме об аддитивности интеграла Римана (с. 477). Для функций f и $\overline{f}$ справедливы равенства

$$I(x)=\int\limits_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)\,dy=\int\limits_c^d \overline{f}(x,y)\,dy\,,$$

и выполнены все условия предыдущей теоремы для функции $\overline{f}$ на D. Значит

$$\iint\limits_K f(x,y)\,ds=\iint\limits_D \overline{f}(x,y)\,ds=\int\limits_a^b I(x)\,dx=\int\limits_a^b dx\int\limits_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)\,dy\,.\ ►$$

4 семестр
Лекция 6
(26.02.69)

81.2. Дифференцируемые отображения

Пусть есть две плоскости: плоскость переменных (u, v) – плоскость прообразов и плоскость переменных (x, y) – плоскость образов. Пусть на плоскости переменных (u, v) задано множество $K = K_{u,v}$, и на нем определено отображение $\varphi : \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases}$, которое точке $(u, v) \in K_{u,v}$ ставит в соответствие точку (x, y): $(u, v) \overset{\varphi}{\to} (x, y)$ (см. рис. 17.16 а). Образы всех точек из $K_{u,v}$ образуют некоторое множество, которое мы обозначим $K_{x,y}$.

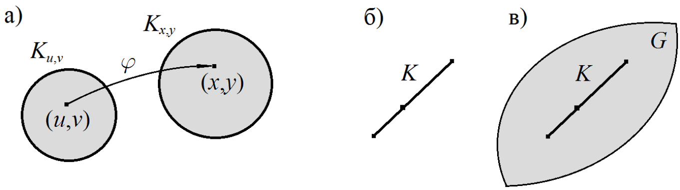


Рис. 17.16.

Если $K_{u,v}$ – открытое множество, то для таких множеств было дано (см. §55 с. 258) определение дифференцируемости вектор-функции. Запишем его в координатной форме для отображения $\varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$. Отображение φ дифференцируемо в точке (x_0, y_0), если приращения Δx и Δy функций $x = x(u, v)$ и $y = y(u, v)$ можно представить следующим образом:

$$\begin{cases} \Delta x = A_u \Delta u + A_v \Delta v + o(\rho) \\ \Delta y = B_u \Delta u + B_v \Delta v + o(\rho) \end{cases} \qquad (\rho \to 0),$$

где $\rho = \sqrt{(\Delta u)^2 + (\Delta v)^2}$. Эти формулы для приращений могут иметь смысл и для таких отображений, которые заданы в более широком классе множеств K. Поэтому можно принять более общее определение: отображение φ называется *дифференцируемым на* K, если для каждой точки из K верны эти формулы для приращений.

Главная линейная часть $\left\{ \begin{array}{l} \Delta x = A_u \Delta u + A_v \Delta v \\ \Delta y = B_u \Delta u + B_v \Delta v \end{array} \right.$ приращения отображения $\varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$ есть касательное линейное отображение в точке (x_0, y_0). Касательное линейное отображение линейно относительно приращений переменных, но является аффинным отображением относительно самих переменных.

В классическом случае, когда K – открытое множество, коэффициенты A_u, A_v, B_u и B_v были частными производными функций $x = x(u, v)$ и $y = y(u, v)$; при нашем определении эти формулы могут оказаться справедливыми, даже если частных производных не существует.

Пример. Пусть K есть косо расположенный относительно осей координат отрезок (см. рис. 17.16 б), и функции $x = x(u, v)$ и $y = y(u, v)$ заданы на K. Тогда частных производных для этих функций, задающих отображение φ на K, не существует. Тем не менее, отображение, заданное на этом отрезке K может оказаться дифференцируемым в смысле нашего определения.

Значит, оперировать надо не с частными производными, а с коэффициентами касательного линейного отображения, которые и будем считать *обобщенными частными производными*.

Заметим, что коэффициенты A_u, A_v, B_u и B_v могут определяться не единственным образом для отображения φ, заданного на множестве K, так как много разных дифференцируемых функций могут совпадать с заданной на K функцией, например с случае, когда K – отрезок.

Часто будем считать, что задача несколько упрощена: мы будем предполагать, что множество K погружено в некоторое открытое множество G, где и определено наше отображение, или отображение φ может быть продолжено на G так, что будет дифференцируемым на G (для примера с косо расположенным отрезком см. рис. 17.16 в). Тогда формулы для приращений функций $x = x(u, v)$ и $y = y(u, v)$ можно будет использовать для определения частных производных. Например, если K – отрезок, то хотя мы не можем говорить об обычных частных производных функций $x = x(u, v)$ и $y = y(u, v)$ на этом отрезке, но коэффициенты A_u, A_v, B_u и B_v касательного линейного отображения можно понимать как частные производные продолженного на G отображения.

Рассмотрим равномерно дифференцируемые отображения.

Определение. Отображение $\varphi : \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases}$ называется *равномерно дифференцируемым на* K, если оно дифференцируемо на K и $\frac{o(\rho)}{\rho} \to 0 \quad (\rho \to 0)$ равномерно на всем K, на котором рассматривается отображение.

Формулы для приращений могут быть переписаны как

$$\begin{cases} \Delta x = A_u \Delta u + A_v \Delta v + \alpha(\rho) \\ \Delta y = B_u \Delta u + B_v \Delta v + \beta(\rho) \end{cases}.$$

Тогда отображение φ равномерно дифференцируемо, если величины $\frac{\alpha(\rho)}{\rho}$ и $\frac{\beta(\rho)}{\rho}$ при $\rho \to 0$ стремятся к нулю равномерно на $K = K_{u,v}$.

Справедлива следующая

Лемма (признак равномерной дифференцируемости отображения). *Пусть* K *– ограниченное, замкнутое, выпуклое множество и частные производные* (*в обобщенном смысле*) $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial x}{\partial v}$, $\frac{\partial y}{\partial u}$, $\frac{\partial y}{\partial v}$ *непрерывны на* K. *Тогда отображение* $\varphi : \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases}$ *равномерно дифференцируемо на* K.

Приведем идею доказательства этой леммы. Зададимся вопросом: *при чем здесь выпуклость*? Мы можем взять две точки, соединить их отрезком прямой, который в силу выпуклости K целиком принадлежит K, и для приращения воспользоваться формулой Лагранжа. Тогда появятся производные в промежуточных точках и мы сможем перевести их в производные в наших точках, сделав ошибку, равномерно малую в силу равномерной непрерывности непрерывных производных на K.

Упражнение. Дать полное доказательство этой леммы.

Выясним теперь, когда φ не только однозначное, но и взаимно однозначное отображение (см. рис. 17.17 а), т. е. когда существует обратное отображение $\psi = \varphi^{-1}$? Что это значит аналитически?

Рассмотрим систему уравнений $\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases}$, определяющих x и y как функции от u и v. Основное условие разрешимости для этой системы уравнений состоит в том, что якобиан отображения

$$D\frac{(x,y)}{(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0\,.$$

Если это условие выполнено в точке (u, v), то в некоторой окрестности точки $(x(u, v), y(u, v))$ существует обратное отображение (п. 57.2 с. 283) (из этого, в частности, следует тот факт, что внутренняя точка при дифференцируемом отображении переходит во внутреннюю же точку).

Вспомним, что условие на якобиан есть условие локальное. Если якобиан отличен от нуля во всей области K, то из этого не следует, что существует обратное отображение во всей области.

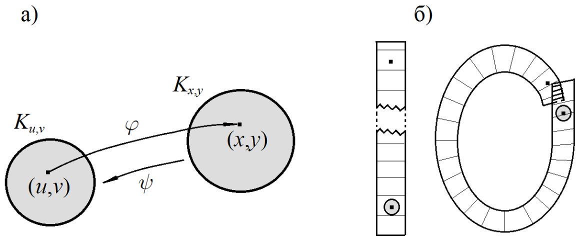


Рис. 17.17.

Пример. Пусть в плоскости (u,v) множество K – длинная полоска (см. рис. 17.17 б), отображение "скручивает" полоску. Даже в этом случае теорема о неявных функциях продолжает действовать локально. Если точка (u_0,v_0) отображается в точку (x_0,y_0), то у точки (x_0,y_0) существует такая окрестность, в которой обратное отображение существует.

Без условия $D\frac{(x,y)}{(u,v)} \neq 0$ внутренняя точка может переходить не во внутреннюю.

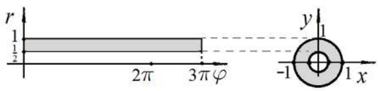


Рис. 17.18.

Пусть K – ограниченное замкнутое множество и якобиан отличен от нуля $D\frac{(x,y)}{(u,v)} \neq 0$ во всей области K. Доказано, что каждая внутренняя точка области K переходит во внутреннюю точку образа. Образ имеет границу. Так как при нашем отображении внутренние точки переходят во внутренние, то граница образа содержится в образе границы. [10] Если отображение взаимно

[10] При отображении $\varphi : \begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ прямоугольник $K: \quad 0 \leq \varphi \leq 3\pi$, $\frac{1}{2} \leq r \leq 1$, лежащий на плоскости (φ, r), переходит в кольцо $\frac{1}{4} \leq x^2+y^2 \leq 1$ на плоскости (x,y) и при этом нарушается взаимная однозначность отображения (рис. 17.18). Граница образа состоит из двух окружностей $r = \frac{1}{2}$ и

однозначно на всем K , то граница образа совпадает с образом границы.

Мы знаем, что непрерывный образ компактного множества есть компактное множество (т. е. компактность сохраняется при непрерывном отображении).

Обычно мы будем полагать, что $D\frac{(x,y)}{(u,v)} \neq 0$ и, кроме того, что отображение взаимно однозначно.

81.3. Поведение меры при отображениях

Компактное множество $K_{u,v}$ при непрерывном отображении φ переходит в компактное множество $K_{x,y}$. Компактные множества имеют меру. Следовательно, если произвольное замкнутое множество $F \subset K_{u,v}$, то для любого непрерывного отображения φ имеет смысл говорить о мере $m_{x,y}(\varphi(F))$ его образа. Мы хотим указать достаточно простые условия для того, чтобы получить аналитическое выражение для меры образа множества F :

$$m_{x,y}(\varphi(F)) = \iint\limits_F \left| D\frac{(x,y)}{(u,v)} \right| \, dudv \, .$$

Эта формула справедлива только в том случае, если отображение φ на множестве F взаимно однозначно. Если отображение не взаимно однозначно, формула все же дает некоторый геометрический факт, а именно выражает площадь с учетом кратности отображения.

4 семестр
Лекция 7
(05.03.69)

Выясним, как ведут себя площади при достаточно хороших преобразованиях. Пусть $G_{u,v}$ – открытая область. Рассмотрим отображение $\varphi : \left\{ \begin{array}{l} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{array} \right.$, $(u,v) \in G_{u,v}$. Пусть компакт $K \subset G_{u,v}$. При отображении φ он переходит в $M = \varphi(K)$ на плоскости (x,y). Предположим, что φ обладает некоторыми "хорошими" свойствами:

1) φ взаимно однозначно на K ;

$r = 1$; образ границы состоит из окружностей $r = \frac{1}{2}$ и $r = 1$, и отрезков $[\frac{1}{2}, 1]$ и $[-1, -\frac{1}{2}]$ действительной оси, т. е. граница образа содержится в образе границы. (Ред.)

2) $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial x}{\partial v}$, $\frac{\partial y}{\partial u}$, $\frac{\partial y}{\partial v} \in C(G_{u,v})$.
Отображение, которое допускает продолжение на открытое множество и обладает свойствами 1) и 2), называется *регулярным* на K. Регулярное отображение непрерывно и дифференцируемо на $G_{u,v}$. Касательное линейное отображение (п. 81.2 с. 482) в точке (u, v) обозначим $L_{u,v} = D_\varphi$.

Возьмем произвольную точку $(u, v) \in K$ и близкую точку $(u', v') \in K$ и рассмотрим ее образы при φ и при L. Сформулируем свойство равномерной дифференцируемости отображения φ, данное на с. 481, на языке "$\varepsilon - \delta$". Обозначим $(x', y') = \varphi(u', v')$, $(x'', y'') = L(u', v')$, $\Delta u = u' - u$, $\Delta v = v' - v$, $r = \sqrt{(\Delta u)^2 + (\Delta v)^2}$. Отображение φ равномерно дифференцируемо на K, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для произвольных $(u, v), (u', v') \in K$ таких, что $r < \delta$, выполняется неравенство $\rho_{x,y}((x', y'), (x'', y'')) \le \varepsilon r$. Это свойство равномерной дифференцируемости нам понадобится при доказательстве следующей леммы.

Лемма о площади образа квадрата. *Пусть φ – регулярное отображение, заданное на компактном множестве K, и пусть K имеет внутренние точки. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для любого квадрата $Q \subset K$, $d(Q) < \delta$, выполняется неравенство*

$$m_{x,y}(\varphi(Q)) \le \left\{ \max_Q \left| D\tfrac{(x,y)}{(u,v)} \right| + \varepsilon \right\} m_{u,v}(Q)\,.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть (u_0, v_0) – внутренняя точка компакта K. Рассмотрим замкнутый квадрат Q с центром в этой точке, $Q \subset K$, размер Q определим позже. Образ $\varphi(Q)$ квадрата Q является замкнутым множеством, так как отображение φ непрерывно. Построим образ Q при соответствующем касательном отображении D_φ. Так как D_φ – афинное отображение (см. п. 81.2 с. 482), то этот образ будет параллелограмм (или отрезок, в случае вырожденного отображения φ). Вокруг этого параллелограмма построим "рамку". Для этого "раздуем" параллелограмм на некоторое число η (см. рис. 17.19). Обозначим $Q_{x,y} = D_\varphi(Q)$ и $(Q_{x,y})_\eta = \{p : d(Q_{x,y}, p) \le \eta\}$ ($(Q_{x,y})_\eta$ является замыканием η-расширения множества $Q_{x,y}$ (см. п. 77 с. 460)). Покажем, что η можно выбрать так, что $\varphi(Q) \subset (Q_{x,y})_\eta$, а тогда получим, что $m_{x,y}(\varphi(Q)) \le m_{x,y}((Q_{x,y})_\eta)$. Площадь рамки R, на которую увеличивается площадь параллелограмма $Q_{x,y}$ при переходе к $(Q_{x,y})_\eta$, оценивается через длину периметра плюс

$O\left(\eta^2\right)$. Т.е. площадь рамки R равна $O\left(\eta l+\eta^2\right)$, где l – периметр параллелограмма $D_\varphi(Q)$.

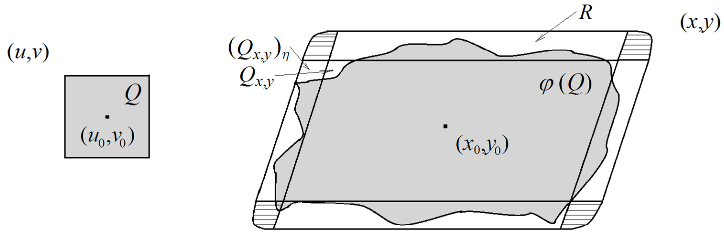


Рис. 17.19. "Рамка".

Обозначим $N=\max\limits_{(u,v)\in K}\left\{\left|\frac{\partial x}{\partial u}\right|,\left|\frac{\partial x}{\partial v}\right|,\left|\frac{\partial y}{\partial u}\right|,\left|\frac{\partial y}{\partial v}\right|\right\}$. Тогда $l\le 4Nr$, где $r=d(Q)$. Значит, $m(R)=O(r\eta+\eta^2)$. (Можно уточнить, что $m(R)\le 4\pi\eta^2+2Nd(Q)\eta$). Образ квадрата при отображении φ может и не лежать в $D_\varphi(Q)$. Докажем, что при правильном выборе η образ квадрата Q не выйдет за пределы рамки.

Пусть задано $\varepsilon>0$. В силу леммы на с. 483 о равномерной дифференцируемости для выпуклого компакта на всяком квадрате $Q\subset K$ отображение φ равномерно дифференцируемо. Но нам нужна равномерная дифференцируемость по всем "маленьким" квадратикам, содержащимся в K. И это можно доказать, аналогично доказательству леммы. Пусть квадрат $Q\subset K$, точки $(u_0,v_0)\in Q$ и $(u,v)\in Q$, D_φ – касательное отображение к φ в точке (u_0,v_0). Тогда расстояние между точками $\varphi(u,v)$ и $D_\varphi(u,v)$ оценивается (с помощью теоремы Лагранжа) через модуль разности значений частных производных $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial x}{\partial v}$, $\frac{\partial y}{\partial u}$, $\frac{\partial y}{\partial v}$ в точках отрезка $[(u_0,v_0),(u,v)]$ и диаметр квадрата Q. Справедливо неравенство

$$\rho(\varphi(u,v),D_\varphi(u,v))\le$$
$$\le\max_{M,M'\in Q}\left\{\left|\frac{\partial x}{\partial u}\Big|_M-\frac{\partial x}{\partial u}\Big|_{M'}\right|,\ldots,\left|\frac{\partial y}{\partial v}\Big|_M-\frac{\partial y}{\partial v}\Big|_{M'}\right|\right\}d(Q)\,.$$

В силу непрерывности частных производных на компакте K, они являются и равномерно непрерывными на K, и, следовательно, найдется $\delta>0$ такое, что если $d(Q)<\delta$, то указанный максимум меньше ε. Значит, $\rho(\varphi(u,v),D_\varphi(u,v))\le\varepsilon\delta$. Будем рассматривать именно такие квадраты.

Положим $\eta=\varepsilon d(Q)$. Тогда, в силу предыдущего неравенства, $\varphi(Q)\subset(Q_{xy})_\eta$. При этом получим, что

$$m(R) = O\left(\varepsilon d(Q)^2 + \varepsilon^2 d(Q)^2\right) = O\left(\varepsilon^2 d(Q)^2\right),$$

где "O-большое" тоже оценивается равномерно по всем квадратам Q. Таким образом, $m(R) = O(\varepsilon m(Q))$. Отсюда следует, что

$$m(\varphi(Q)) \le m\left(L_{u_0,v_0}(Q)\right) + m(R) = |J(u_0,v_0)|\, m(Q) + O(\varepsilon) m(Q) =$$

$$= (|J| + O(\varepsilon)) m(Q) \quad \forall\, (u_0, v_0) \in K\,.$$

Заметим, что площадь рамки мала по сравнению с площадью Q, а не $\varphi(Q)$. ►

Доказанная лемма может служить для доказательства некоторых свойств регулярных отображений.

Следствие. *Если компактное множество K квадрируемо (имеет площадь) и отображение φ – регулярное на K и взаимно однозначное всюду на $G_{u,v}$, то образ $\varphi(K)$ – квадрируемое множество.*

Доказательство. Покроем множество K открытыми квадратиками так, чтобы вместе со своими замыканиями они не выходили за пределы множества $G_{u,v}$. Из покрытия можно выбрать конечное подпокрытие. Получим конечное число квадратиков. Объединение замыканий этих квадратиков, обозначим его K_1, содержит K и содержится в $G_{u,v}$. На компакте K_1 отображение φ тоже регулярно. Граница Γ множества K может быть покрыта квадратиками, содержащимися в K_1, со сколь угодно малой суммой площадей. При регулярном отображении площадь любого квадратика увеличивается в конечное число раз, откуда все следует. ►

Лемма (оценка площади образа снизу). *В условиях предыдущей леммы*

$$m\,(\varphi(Q)) \ge (|J| - \varepsilon)\, m(Q)\,.$$

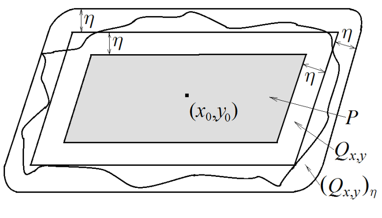


Рис. 17.20.

Доказательство аналогично доказательству предыдущей леммы. В случае $J = 0$ неравенство очевидно, поэтому считаем, что $J \ne 0$. Строим рамку шириной η внутри $Q_{xy} = D_\varphi(Q)$ (см. рис. 17.20), ее площадь $\approx l\eta$ (при η, найденном при заданном ε в доказательстве леммы о площади квадрата, с. 486).

Внутренний параллелограмм P может быть и пустым, если якобиан очень мал. Покажем, что если P содержит хотя бы одну точку из $\varphi(Q)$, то он целиком заполнен точками из $\varphi(Q)$. Действительно, при $|J| \neq 0$ внутренние точки при отображении φ переходят во внутренние. Пусть точка M из внутреннего параллелограмма P принадлежит $\varphi(Q)$, а $M_1 \in P$, но не принадлежит $\varphi(Q)$. Тогда в P найдется граничная точка M_2 множества $\varphi(Q)$. Тогда M_2 является образом некоторой точки E, принадлежащей границе квадрата $Q : M_2 = \varphi(E)$. При отображении D_φ все точки границы квадрата Q перешли в точки границы параллелограмма $D_\varphi(Q)$. Тогда расстояние между точками $\varphi(E)$ и $D_\varphi(E)$ будет больше η, что противоречит равномерной дифференцируемости по всем "маленьким" квадратикам, содержащимся в K. Следовательно, $P \subset \varphi(Q)$. Отсюда следует искомая оценка. ▶

Геометрический смысл модуля якобиана. Модуль якобиана показывает, во сколько раз растягивается площадь при данном регулярном отображении. Из полученных в двух последних леммах неравенств, следует, что $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ такое, что $\forall Q \subset K$, $d(Q) < \delta$,

$$\{|J(u,v)| - \varepsilon\}\, m(Q) \leq m(\varphi(Q)) \leq \{|J(u,v)| + \varepsilon\}\, m(Q),$$

где (u,v) – точка из квадрата Q.

Лемма о мерах при отображении. *Пусть K – компактное квадрируемое множество, $\varphi\,(u,v)$ – регулярное на K и взаимно однозначное в некоторой окрестности множества K отображение, $\varphi(K) = M$. Тогда $m(M) = \iint\limits_K |J(u,v)|\, dudv$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сделаем мелкий квадрильяж (п. 77 с. 458). Обозначим через K_1 объединение тех замкнутых квадратиков Q_i квадрильяжа, которые целиком содержатся в K (рис. 17.21): $K_1 = \bigcup\limits_{i:\, Q_i \subset K} Q_i$, а через K_2 – пересекающихся с K квадратиков: $K_2 = \bigcup\limits_{i:\, Q_i \bigcap K \neq \varnothing} Q_i$. Тогда $K_1 \subset K \subset K_2$. Найдем меры множеств $\varphi(K_1)$ и $\varphi(K_2)$. В силу неравенств для площади образа квадрата малого диаметра

$$\{|J(u,v)| - \varepsilon\}\, m(Q) \leq m(\varphi(Q)) \leq \{|J(u,v)| + \varepsilon\}\, m(Q)$$

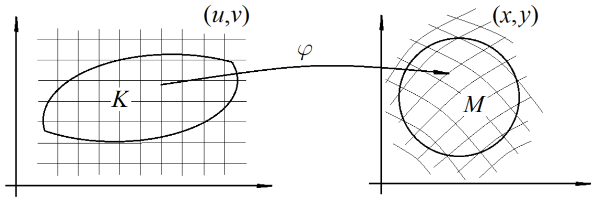


Рис. 17.21.

будем иметь

$$\sum |J(u_i,v_i)|\, m(Q_i) - \varepsilon m(K_1) \le m(\varphi(K_1)) = \sum m(\varphi(Q_i)) \le$$
$$\le \sum |J(u_i,v_i)|\, m(Q_i) + \varepsilon m(K_1)\,.$$

Устремив диаметр разбиения к 0, получим

$$\iint\limits_{K_1} |J(u,v)|\; dudv - \varepsilon m(K_1) \le m(\varphi(K_1)) \le \iint\limits_{K_1} |J(u,v)|\; dudv + \varepsilon m(K_1)\,.$$

В силу произвольности ε $\quad m(\varphi(K_1)) = \iint\limits_{K_1} |J(u,v)|\; dudv.$

Аналогично доказательству следствия на с. 488 получим, что $m(\varphi(K_2)) = \iint\limits_{K_2} |J(u,v)|\; dudv$. Так как $m(\varphi(K_1)) \le m(\varphi(K)) \le$ $\le m(\varphi(K_2))$ и

$$\left| \iint\limits_{K} |J(u,v)|\; dudv - \iint\limits_{K_i} |J(u,v)|\; dudv \right| \le \max_{K_2} |J(u,v)| \cdot |m(K) - m(K_i)|\,,$$

$i = 1,2$, а меры множеств K и K_i, $i = 1,2$, могут быть сделаны как угодно близкими, то $m(\varphi(K)) = \iint\limits_{K} |J(u,v)|\; dudv$. ▶

Если K связно, то к последней формуле мы можем применить теорему о среднем. Получим, что найдется точка $(\xi,\eta) \in K$ такая, что $m(\varphi(K)) = \iint\limits_{K} |J(u,v)|\; dudv = |J(\xi,\eta)|\, m(K)\,.$

81.4. Замена переменных в двойном интеграле

Теорема (замена переменных в двойном интеграле). *Пусть* $\varphi : \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$ *– регулярное отображение компактного квадрируемого множества* K, *взаимно однозначное в некоторой окрестности множества* K, $\varphi(K) = M$ *и функция* $f(x,y) \in C(M)$. *Тогда справедлива формула*

$$\iint\limits_{M} f(x,y)\, dxdy = \iint\limits_{K} f(x(u,v), y(u,v))\, |J(u,v)|\; dudv\,.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что оба интеграла существуют, надо доказать их равенство. Возьмем мелкое разбиение $(T) = (T_{uv})$ множества K, и пусть K_i – элементы этого разбиения. Тогда $\sum f\left(x(\xi_i,\eta_i), y(\xi_i,\eta_i)\right)|J(\xi_i,\eta_i)|\, m(K_i)$ – интегральные суммы для интеграла $\iint\limits_K f(x(u,v), y(u,v))\,|J(u,v)|\,dudv$, а $\sum f(x_i,y_i)\, m(\varphi(K_i))$, где $x_i = x(\xi_i,\eta_i)$, $y_i = y(\xi_i,\eta_i)$ – интегральные суммы для интеграла $\iint\limits_M f(x,y)\,dxdy$. Если диаметр разбиения мал, то множители $|J(\xi_i,\eta_i)|\, m(K_i)$ и $m(\varphi(K_i))$ равномерно близки. Отсюда следует, что абсолютная величина разности между этими интегральными суммами мала, если диаметр разбиения мал. Значит, равенство интегралов справедливо. ▶

Замечания. 1. При применении формулы замены переменной надо проверять взаимную однозначность отображения φ.

2. Теорема доказана для случая, когда φ можно распространить на некоторую открытую область G, содержащую K. На самом деле формула верна и без предположения о продолжении φ на G, в этой теореме это условие излишне. Чтобы это показать, надо приближать K изнутри компактами K_ε, для которых формула верна, и показать, что существует предел этих интегралов по K_ε при $\varepsilon \to 0$, который даст интеграл по K.

3. Условие $f(x,y) \in C(M)$ можно ослабить, предположив только ограниченность и интегрируемость f на M.

4 семестр
Лекция 8
(07.03.69)

Напомним формулу замены переменных в одномерном интеграле:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_\alpha^\beta f(x(u))x'(u)\,du\,,$$

где $f(x) \in C\,[a,b]$, $x = x(u)$, $u \in [\alpha,\beta]$, $x(\alpha) = a$, $x(\beta) = b$, $x'_u \in C[\alpha,\beta]$. А для двойного интеграла мы получили

$$\iint\limits_M f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_K f(x(u,v), y(u,v))\,|J(u,v)|\,dudv\,.$$

Отчего появился модуль в формуле замены переменных для двойного интеграла? Дело в том, что здесь в одномерном случае интеграл рассматривается по ориентированному отрезку. Можно рассматривать как $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, так и $\int\limits_b^a f(x)\,dx$. В формуле замены переменной у нас может оказаться $\alpha > \beta$. Для двойного интеграла понятия ориентации области интегрирования не было, но его можно ввести.

Пусть в плоскости (x, y) задан достаточно гладкий контур Γ, ограничивающий множество M. "Ходить по контуру" можно в двух противоположных направлениях. *Ориентация области* связана с направлением обхода ее контура. Обход против часовой стрелки считается положительным, а по часовой стрелке – отрицательным. Положительное направление обхода контура, индуцирует положительную ориентацию области, площадь такой области – обычная площадь со знаком плюс. Отрицательное направление обхода контура, индуцирует отрицательную ориентацию области, ориентированная площадь такой области берется со знаком минус. Пусть отображение φ переводит область K, ограниченную контуром γ на плоскости (u, v), в область M, ограниченную контуром Γ на плоскости (x, y). Если γ (в плоскости (u, v)) обходится в положительном направлении, то Γ может обходиться как в положительном, так и в отрицательном направлении. Все отображения φ можно разбить на 2 типа: сохраняющие и не сохраняющие ориентацию обхода.

Ориентация обхода будет сохраняться или меняться на противоположную, в зависимости от того, сохраняется или нет ориентация для линейного касательного отображения $L = D_\varphi$.

Если $J > 0$, то ориентация сохраняется.

Если $J < 0$, то ориентация меняется на противоположную.

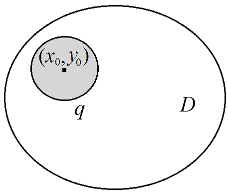


Рис. 17.22.

Заметим, что у нас в области K якобиан не обращается в 0 и поэтому знак якобиана не меняется в области. Таким образом, если рассматривать площадь вместе со знаком, соответствующим ориентации, то в формуле можно опустить модуль якобиана.

Сравним еще одну одномерную и двумерную формулы.

Получим для двойных интегралов аналог производной по переменному верхнему пределу. Как известно, если $x_0 \in [a, b]$, $f \in C[x_0]$, то производная $\frac{d}{dx}\int\limits_a^x f(u)\,du$ в точке x_0 равна значению $f(x_0)$ (п. 40.3 с. 184). Пусть точка $(x_0, y_0) \in D$. Рассмотрим $\frac{1}{m(q)}\iint\limits_q f\,d\sigma$, где $(x_0, y_0) \in q \subset D$

(рис. 17.22). Если $\lim\limits_{\substack{(x_0,y_0)\in q\\ d(q)\to 0}} \frac{1}{m(q)} \iint\limits_q f\,d\sigma$ существует, то он называется *производной интеграла по площади в точке* (x_0, y_0). [11] Если $f \in C\,(D)$, то по теореме о среднем

$$\lim_{\substack{(x_0,y_0)\in q\\ d(q)\to 0}} \frac{1}{m(q)} \iint\limits_q f\,d\sigma = f(x_0, y_0)\,.$$

Производная по площади определяется для произвольной аддитивной функции области. Интеграл – хорошая аддитивная функция области, имеет производную по площади.

§ 82. n-кратные интегралы

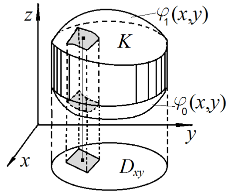


Рис. 17.23.

Теория n-кратных интегралов аналогична теории двойных интегралов. Аналогия сохраняется в той степени, в какой мы рассматриваем меры той же размерности, что и размерность пространств, т. е. площадь в двумерном случае и объем в трехмерном. Но в 2-мерном случае есть уже две меры: длина и площадь, а в в 3-мерном случае три меры: длина, площадь и объем, и здесь появляются интегралы, не имеющие аналогов в меньших размерностях.

Пусть $K \subset E^n$ и $m_n(K)$ – n-мерная мера множества K.

82.1. Тройные интегралы

При $n = 3$ по мере m_3 определяем тройной интеграл $\iiint\limits_K f(p)\,dv$.

Свойства тройного интеграла те же, что и для двойного интеграла. Подобно вычислению двойного интеграла (п. 81.1 с. 480) тройной интеграл [12] по области, являющейся "криволинейным брусом ограниченным сверху и снизу непрерывными поверхностями φ_0, φ_1, а с боков цилиндрической поверхностью с обра-

[11] В [27] т.2 п.377 и [28] т.3 п.644 такая производная называется производной по области. Близкие понятия называют также сильной дифференцируемостью, производной аддитивной функции множества по семейству множеств и т.п. (Ред.)

[12] См. более подробно в [27] т.2 п. 378 с. 334 – 336 и в [28] т.3 п.п. 645,646 с. 312 – 315. (Ред.)

зующими, параллельными оси Oz (см. рис. 17.23), вычисляется по формуле

$$\iiint\limits_K f(p)\,dv = \iint\limits_{D_{x,y}} ds \int\limits_{\varphi_0(x,y)}^{\varphi_1(x,y)} f(x,y,z)\,dz\,,$$

где $D_{x,y}$ – квадрируемая проекция бруса на плоскость xOy. Формула верна, если тройной интеграл слева и внутренний интеграл справа существуют.

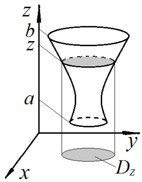


Рис. 17.24.

Для области K, расположенной между плоскостями $z = a$ и $z = b$ и сечения которой плоскостями $z = \text{const}$ для всякого $a \leq z \leq b$ имеют квадрируемые проекции D_z на плоскость xOy (см. рис. 17.24), тройной интеграл вычисляется по формуле

$$\iiint\limits_K f(p)\,dv = \int\limits_a^b dz \iint\limits_{D_z} f(x,y,z)\,ds\,.$$

Здесь также формула верна, если тройной интеграл слева и внутренний двойной интеграл справа существуют.

Аналогичные формулы можно получить для n-мерного случая.

82.2. Интеграл Дирихле

Интегралом Дирихле называется n-кратный интеграл вида

$$\overbrace{\int\ldots\int}^{n}\limits_{\substack{x_1\geq 0,\ldots,x_n\geq 0\\ x_1+x_2+\ldots+x_n\leq 1}} x_1^{p_1-1}x_2^{p_2-1}\ldots\, x_n^{p_n-1}dx_1\ldots dx_n\,,$$

где $p_1 > 0,\ldots,p_n > 0$ (см. рис. 17.25 для $n = 3$). При $p_i \geq 1$ ($i = 1,2,\ldots,n$) это обычный кратный интеграл Римана, а при $p_i < 1$ – несобственный интеграл. Справедлива формула Дирихле:

$$\overbrace{\int\ldots\int}^{n}\limits_{\substack{x_1\geq 0,\ldots,x_n\geq 0\\ x_1+x_2+\ldots+x_n\leq 1}} x_1^{p_1-1}x_2^{p_2-1}\ldots\, x_n^{p_n-1}dx_1\ldots dx_n = \frac{\Gamma(p_1)\ldots\Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1+\ldots+p_n+1)}\,.$$

Здесь $\Gamma(x)$ – гамма-функция Эйлера (см. § 69).

При $n = 2$ вычисляем двукратный интеграл:

$$\int\limits_{\substack{x\ge0,\, y\ge0\\ x+y\le1}}\int x^{p-1}y^{q-1}\,dxdy = \tfrac{1}{q}\int\limits_0^1 x^{p-1}\,dx \int\limits_0^{1-x} y^{q-1}\,dy =$$

$$= \tfrac{1}{q}\int\limits_0^1 x^{p-1}\,(1-x)^q\;dx = \tfrac{1}{q}\tfrac{\Gamma(p)\Gamma(q+1)}{\Gamma(p+q+1)} = \tfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q+1)}\,.$$

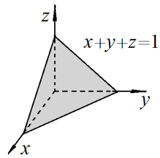


Рис. 17.25.

Далее доказательство проведем по индукции. Предположим, что для $n-1$ формула доказана. Сведем n-кратный интеграл к $(n-1)$-кратному:

$$\int\limits_0^1 x_n^{p_n-1}\,dx_n \overbrace{\int\limits_{\substack{x_1\ge0,\dots,x_{n-1}\ge0\\ x_1+\ldots+x_{n-1}\le1-x_n}} \ldots \int}^{n-1} x_{n-1}^{p_{n-1}-1}\ldots\, x_1^{p_1-1}dx_1\ldots dx_{n-1} =$$

Сделав замену переменных $x_i = (1-x_n)y_i$ ($i = 1,\ldots,n-1$), и продолжая вычисления, с учетом предположения индукции, получим

$$= \int\limits_0^1 x_n^{p_n-1}(1-x_n)^{p_1+\ldots+p_{n-1}}dx_n \overbrace{\int\limits_{\substack{y_1\ge0,\dots,y_{n-1}\ge0\\ y_1+\ldots+y_{n-1}\le1}} \ldots \int}^{n-1} y_1^{p_1-1}\ldots y_{n-1}^{p_n-1}dy_1\ldots dy_{n-1} =$$

$$= \frac{\Gamma(p_1)\ldots\Gamma(p_{n-1})}{\Gamma(p_1+\ldots+p_{n-1}+1)}\int\limits_0^1 x_n^{p_n-1}(1-x_n)^{p_1+\ldots+p_{n-1}}\,dx_n =$$

$$= \frac{\Gamma(p_1)\ldots\Gamma(p_{n-1})}{\Gamma(p_1+\ldots+p_{n-1}+1)}\frac{\Gamma(p_n)\Gamma(p_1+\ldots+p_{n-1}+1)}{\Gamma(p_1+\ldots+p_n+1)} = \frac{\Gamma(p_1)\ldots\Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1+\ldots+p_n+1)}\,.$$

Замечание. Теория простых и теория кратных несобственных интегралов существенно различаются. Условная сходимость несобственных простых интегралов основана на упорядочении точек на прямой. Естественного упорядочения площадей для плоскости нет. Поэтому нет естественного аналога условной сходимости для двойных несобственных интегралов. Всякий сходящийся кратный несобственный интеграл абсолютно сходится. Условную сходимость можно получить, упорядочив некоторым специальным образом области интегрирования.

§ 83. Площадь поверхности

Длина кривой Γ, лежащей на плоскости, определялась формулой $l(\Gamma) = \sup l(L)$, где супремум берется по всем вписанным ломаным L (п. 45.2 с. 202).

В трехмерном пространстве, если вписывать в поверхность многогранники Q и считать их площади, то в большинстве случаев получим $\sup\limits_{Q} S(Q) = \infty$.

Пример Шварца. В боковую поверхность кругового цилиндра вписываются многогранники с треугольными гранями (см. рис. 17.26 а). Можно так вписать многогранники, что треугольники лежат почти плоско: получается "гармошка "голенище сапога". Верхняя грань площадей таких многогранников равна бесконечности [13] .

Следовательно, через произвольные вписаннные многогранники определять площадь поверхности нельзя. Возникает задача так аппроксимировать поверхность, чтобы "гармошки" не было.

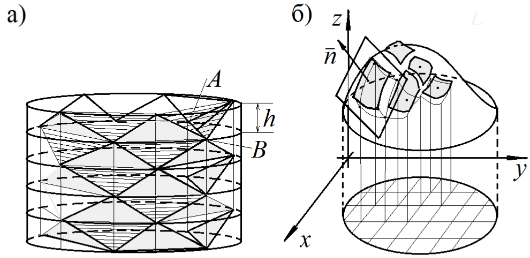


Рис. 17.26.

Функция $f(x, y)$, определенная на множестве D на плоскости, задаёт *поверхность*

$$S = \{(x, y, z)\colon z = f(x, y),\ (x, y) \in D\}.$$

Будем предполагать, что D — компакт, ограниченный простым кусочно-гладким контуром. Относительно функции f предположим, что $f \in C^1(D)$, то есть f определена и дифференцируема в окрестности D, и $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \in C(D)$.

[13] Подробнее пример Шварца можно посмотреть в [27] т.2 с. 304 или в [31] пример 16.11 с. 456. (Ред.)

Геометрическое определение площади поверхности. Возьмем разбиение (T) компакта D на "маленькие элементарные площади": $D = \bigcup\limits_{i=1}^{n} K_i$. Ячейка $K \subset D$ задает на поверхности "шапку" $L \subset S$. Возьмем точку $p \in L$, построим плоскость P , касательную к поверхности в точке p . Спроектируем L ортогонально на P , получим множество Q (рис 17.26 б). *Площадью поверхности* S назовем величину

$$\lim_{d(T)\to 0} \textstyle\sum_{i=1}^{n} m(Q_i) \, .$$

При аппроксимации поверхности мы получили "панцирь черепахи" $\bigcup\limits_{i=1}^{n} Q_i$. Таким образом, плоские множества Q_i , приближающие S , близки к S равномерно и в смысле "наклона".

4 семестр
Лекция 9
(12.03.69)

Геометрическая площадь поверхности не зависит от положения поверхности в пространстве, то есть инвариантна относительно движений (это можно вывести из того, что ортогональное проектирование на касательную плоскость инвариантно относительно движений). Недостаток геометрического определения площади в том, что его неудобно использовать для выражения площади поверхности в виде интеграла по области D . Поэтому будет дано еще "техническое" определение площади, которое легко сведется к интегралу, а потом будет показана эквивалентность этих определений.

Техническое определение площади поверхности. Возьмем ячейку $K \subset D$, она задает на поверхности "шапку" $L \subset S$. Построим плоскость P , касательную к поверхности в некоторой точке $p \in L$. Спроектируем L на P параллельно оси Oz . Получим множество L' (рис. 17.27). *"Технической" площадью поверхности* S назовем величину

$$\sigma(S) = \lim_{d(T)\to 0} \sum_{i=1}^{n} m(L_i') \, .$$

Отличие этого определения от геометрического в том, что проектирование на касательную плоскость мы производим не ортогонально, а вдоль оси Oz. При этом мы снова получим "панцирь черепахи вообще говоря, другой, чем в геометрическом определении.

В любой точке поверхности существует касательная плоскость и вектор $\overline{n}$ нормали к поверхности. Запишем $\overline{n}$ через направляющие косинусы: $\overline{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$; здесь безразлично, куда этот вектор направлен, вверх или вниз. Если нормаль почти горизонтальна, то есть $\cos\gamma$ близок к нулю, то может оказаться, что ячейка K мала, а соответствующая ячейка L' на касательной плоскости большая – такая ситуация для нас нежелательна. Покажем, что при наших предположениях этого не происходит.

Касательная плоскость к поверхности $z=f(x,y)$ в точке (x_0,y_0,z_0) задается уравнением

$$z-z_0=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0(x-x_0)+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0(y-y_0)\,,$$

где частные производные берутся в точке (x_0,y_0,z_0). Следовательно,

$$|\cos\gamma|=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}\,.$$

Таким образом, поскольку $f\in C^1(D)$, то $\cos\gamma$ отделен от нуля и касательная плоскость нигде не вертикальна.

Теорема о технической площади поверхности. *Пусть D – компакт на плоскости, ограниченный простым кусочно-гладким контуром и функция $f\in C^1(D)$. Тогда "техническая" площадь поверхности $S\colon z=f(x,y),\ (x,y)\in D$, существует и выражается формулой*

$$\sigma(S)=\iint\limits_D\frac{dx\,dy}{|\cos\gamma(x,y)|}=\iint\limits_D\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy\,.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим разбиение $(T)\colon D=\bigcup\limits_{i=1}^{n}K_i$. Нетрудно видеть, что двумерная мера $m(L_i')=\frac{m(K_i)}{|\cos\gamma(\xi_i,\eta_i)|}$, где $(\xi_i,\eta_i)\in K_i$, поскольку L_i' есть проекция K_i на касательную плоскость. Ясно, что $\sum\limits_{i=1}^{n}m(L_i')=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{m(K_i)}{|\cos\gamma(\xi_i,\eta_i)|}$. Эта сумма есть интегральная сумма для двойного интеграла Римана

$$\sigma(S)=\iint\limits_D\frac{dx\,dy}{|\cos\gamma(x,y)|}\,,$$

который существует, так как функция $|\cos\gamma|^{-1}$ непрерывна на D при наших предположениях. ►

Часто элемент площади $dx\,dy$ обозначается через ds; формула для площади записывается в виде $\sigma(S) = \iint\limits_D |\cos\gamma(x,y)|^{-1}\,ds$.

Теорема о равенстве геометрической и технической площади поверхности. *Пусть D – компакт на плоскости, ограниченный простым кусочно-гладким контуром и $f \in C^1(D)$. Тогда "геометрическая" площадь поверхности $S\colon z = f(x,y)$, $(x,y) \in D$, совпадает с "технической".*

С х е м а д о к а з а т е л ь с т в а. Пусть (см. рис. 17.27)

K – квадрат со стороной ρ;

L – проекция K вдоль оси Oz на поверхность;

L' – параллелограмм, полученный проекцией K вдоль оси Oz на касательную плоскость P к поверхности, проведенную в точке $p \in L$; очевидно, что L' получается проекцией L вдоль оси Oz на P;

L_n – ортогональная проекция L на касательную плоскость P; L_n – криволинейный четырехугольник.

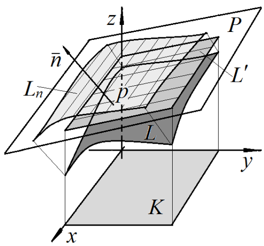


Рис. 17.27.

Расстояние между точкой на L и ее ортогональной проекцией на P есть величина $o(\rho)$ ($\rho \to 0$). То же верно и для проекции вдоль Oz, поскольку при проектировании вдоль Oz и ортогональном проектировании расстояние между точкой и проекцией отличается в $|\cos\gamma|^{-1}$ раз. Рассуждения, аналогичные доказательству леммы о площади образа квадрата (п. 81.3 с. 486), показывают, что при замене одной площади проекции другой мы делаем ошибку равномерно бесконечно малую относительно площади ячейки K. Эта ошибка при предельном переходе при вычислении интеграла превращается в 0. ►

Площадь поверхности в криволинейных координатах. Определим теперь понятие площади для более широкого класса множеств. Поверхности вида $S\colon z = f(x,y)$, $(x,y) \in D$, рассмотренные нами, назовем *элементарными*. Множество точек поверхности, соответствующих $(x,y) \in \partial D$, назовем *краем* поверхности (∂D – граница компакта D); очевидно, что край суть кусочно-гладкий контур в пространстве. Также нам понадобятся элементарные поверхности вида $\{x = f(y,z)\}$ или $\{y = f(x,z)\}$, для них все определения аналогичны. (Если поверхность можно представить более чем одним из способов, то, как нетрудно показать, понятия площади и края не зависят от выбора способа.)

Пусть множество S в пространстве представляется в виде объединения конечного числа элементарных поверхностей, которые пересекаются только по краям. Площадью S назовем сумму площадей этих поверхностей. Так определенная площадь не зависит от способа разбиения S на "кусочки". Доказывать это мы не будем.

В дифференциальной геометрии принято поверхности задавать параметрически

$$S\colon \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v), \qquad (u,v) \in M\ . \\ z = z(u,v) \end{cases}$$

Будем предполагать, что выполнены следующие свойства:

- M – компакт на плоскости (u,v), ограниченный простым кусочно-гладким контуром, $x, y, z \in C^1(M)$;

- поверхность не имеет самопересечений, т. е. для любых различных $(u,v), (u',v') \in M$ точки $P = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ и $P' = (x(u',v'), y(u',v'), z(u',v'))$ различны;

- в любой точке $(u,v) \in M$ отличен от нуля по крайней мере один из определителей $D\frac{(x,y)}{(u,v)}$, $D\frac{(x,y)}{(u,v)}$ или $D\frac{(x,y)}{(u,v)}$.

Последнее условие можно записать следующим образом:

$$\left|D\frac{(x,y)}{(u,v)}\right|^2 + \left|D\frac{(y,z)}{(u,v)}\right|^2 + \left|D\frac{(z,x)}{(u,v)}\right|^2 > 0\ .$$

Это условие гарантирует, что в окрестности любой точки (u,v) из M какие-то два уравнения из трех, задающих S, могут быть разрешены относительно u и v. Следовательно, локально S представляется в виде $\{x = f(y,z)\}$, $\{y = f(x,z)\}$ или $\{z = f(x,y)\}$.

Разбивая множество M на маленькие части, мы представим S в виде объединения элементарных поверхностей, пересекающихся по краям. Следовательно, для S определена площадь $\sigma(S)$, выведем для нее формулу.

Будем предполагать, что поверхность представляется в виде $\{z = f(x,y)\}$, где $(x,y) \in D$ однозначно соответствует $(u,v) \in M$. Общий случай получим, разбивая поверхность на маленькие "кусочки".

Рассмотрим точку $(u_0, v_0) \in M$. Тогда функции x, y, z, как функции от u при фиксированном v_0, будут определять в пространстве некоторую кривую, проходящую через (u_0, v_0). Теперь зафиксируем u_0, получим еще одну кривую, проходящую через точку (u_0, v_0). Ясно, что касательная плоскость к поверхности, проходящая через эту точку, будет проходить через соответствующие касательные

$$\frac{x-x_0}{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)_0} = \frac{y-y_0}{\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)_0} = \frac{z-z_0}{\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)_0}, \qquad \frac{x-x_0}{\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)_0} = \frac{y-y_0}{\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)_0} = \frac{z-z_0}{\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)_0}$$

к полученным нами кривым. Значит, вектор нормали к касательной плоскости в точке (u_0, v_0) имеет следующее выражение

$$\overline{n} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \end{vmatrix}.$$

Обозначим

$$A = D\frac{(x,y)}{(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad B = D\frac{(y,z)}{(u,v)}, \quad C = D\frac{(x,z)}{(u,v)}.$$

Из формулы для $\overline{n}$ получаем $|\cos\gamma| = \frac{|A|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$. Теперь в формуле для площади поверхности $\sigma(S) = \iint\limits_D \frac{dx\,dy}{|\cos\gamma(x,y)|}$ сделаем замену переменных и получим следующую формулу

$$\sigma(S) = \iint\limits_D \frac{dx\,dy}{|\cos\gamma(x,y)|} = \iint\limits_M \frac{\left|D\frac{(x,y)}{(u,v)}\right|}{|\cos\gamma(x,y)|}\,du\,dv = \iint\limits_M \sqrt{A^2+B^2+C^2}\,du\,dv.$$

Подсчитав, получим $A^2 + B^2 + C^2 = EG - F^2$, где

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2, \quad G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2,$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

Таким образом, окончательная формула для площади поверхности имеет вид

$$\sigma(S) = \iint\limits_M \sqrt{EG - F^2}\,du\,dv.$$

Глава 18

Криволинейные и поверхностные интегралы

В n-мерном пространстве мы строили n-мерную меру m_n. Рассмотрим частный случай $n = 3$. В этом случае у нас есть три меры: m_3 — объем тела, m_2 — площадь поверхности, m_1 — длина кривой. Поэтому мы можем строить интегральное исчисление и по отношению к мерам m_2 и m_1 и получим, соответственно, *поверхностные* и *криволинейные* интегралы, порожденные этими неполноразмерными мерами.

Мы можем накладывать некоторые ограничения, именно, в большинстве случаев мы будем интегрировать по таким кривым Γ и поверхностям S, которые имеют, соответственно, длину и площадь поверхности, выражаемые простыми интегралами

$$l(\Gamma)=\int_\alpha^\beta \sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,dt, \quad \sigma(S)=\iint_M \sqrt{EG-F^2}\,dudv\,.$$

Фактически, мы будем даже предполагать непрерывность подынтегральных функций.

Теория криволинейных и поверхностных интегралов распадается на две части: на часть, которая не зависит, и часть, которая зависит от ориентации кривых и поверхностей. Поэтому различаются криволинейные и поверхностные интегралы, соответственно, первого и второго рода. Интегралы первого рода более простые, второго – "более полезные".

§ 84. Криволинейные и поверхностные интегралы первого рода

84.1. Определения криволинейного и поверхностного интегралов первого рода

Пусть $\Gamma \subset E^3$ — *простая регулярная кривая*. Это означает, что Γ представляется в виде $\Gamma = \{r(t)\colon t \in [a,b]\}$, где $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $x, y, z \in C^1[a,b]$, разным точкам $t_1, t_2 \in [a,b]$ соответствуют различные точки $r(t_1), r(t_2) \in \Gamma$, и выполнено условие регулярности: вектор $r'(t)$ не обращается в нуль.

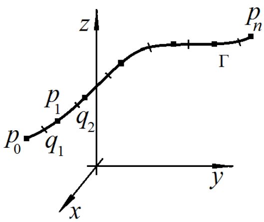


Рис. 18.1.

Пусть на кривой Γ задана непрерывная функция $f \in C(\Gamma)$. Разобьем Γ на "кусочки" Γ_k с помощью системы точек $p_0, \dots, p_n$ (см. рис. 18.1). Каждый такой кусочек имеет длину $m_1(\Gamma_k) = l(\Gamma_k)$. Диаметром полученного разбиения T назовем $d(T) = \max\limits_k d(\Gamma_k)$ (сравни с определением на с. 462). Возьмем произвольные точки $q_k \in \Gamma_k$ и составим интегральную сумму $\sum\limits_{k=1}^{n} f(q_k) l(\Gamma_k)$.

Определение. *Криволинейным интегралом 1-го рода* от функции f по кривой Γ называется следующий предел:

$$\int\limits_{\Gamma} f(p)\, dl = \lim_{d(T_\Gamma) \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(q_k) l(\Gamma_k)\,.$$

Это определение имеет чисто геометрический характер, оно связано только с геометрическими объектами (длина кривой, диаметр кусочка кривой), и не связано со способом аналитического задания Γ. Значит, интеграл не зависит от способа параметризации кривой.

Замечание. В определении интеграла мы могли бы брать в качестве диаметра $d(T) = \max\limits_k l(\Gamma_k)$ или $d(T) = \max\limits_k |t_k - t_{k+1}|$, где точки t_k соответствуют разбиению $[a,b]$ (для некоторой па-

раметризации).
Замечание. Криволинейный интеграл 1-го рода можно определить по простым спрямляемым кривым Γ, условие регулярности излишне.

Аналогично определяется поверхностный интеграл первого рода $\iint\limits_S f(p)\,d\sigma$. Пусть задана простая поверхность S, имеющая площадь. Возьмем разбиение T поверхности S на кусочки S_k (элементарные поверхности, пересекающиеся только по краям), каждый из которых имеет площадь $\sigma(S_k)$, составим интегральную сумму и перейдем к пределу при $d(T) = \max\limits_k d(S_k) \to 0$:

$$\iint\limits_S f(p)\,d\sigma = \lim_{d(T)\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(q_k)\,\sigma(S_k)\,.$$

Это определение тоже чисто геометрическое и не зависит от способа задания поверхности.

4 семестр
Лекция 10
(14.03.69)

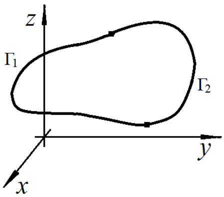


Рис. 18.2.

Замечание. В случае замкнутых кривых и поверхностей соответствующие интегралы обозначаются следующим образом: $\oint\limits_\Gamma f(p)\,dl$, $\oiint\limits_S f(p)\,d\sigma$.
(Формально, интеграл по замкнутой кривой не подходит под наше определение – на замкнутой кривой есть кратные точки: начальная точка совпадает с конечной. Но мы можем разбить кривую Γ на две простые кривые Γ_1 и Γ_2 (см. рис. 18.2) и определить $\int\limits_\Gamma f(p)\,dl = \int\limits_{\Gamma_1} f(p)\,dl + \int\limits_{\Gamma_2} f(p)\,dl$.)

84.2. Вычисление криволинейных и поверхностных интегралов первого рода

Следующей нашей задачей будет свести теорию криволинейного и поверхностного интеграла к теории простых и двойных интегралов Римана (при известных условиях гладкости на кривые и поверхности). Отметим, что если $f(p) \equiv 1$, то интегральные суммы просто равны длине кривой или, соответственно, площади поверхности.

Теорема (вычисление криволинейного интеграла первого рода). *Пусть простая кривая* Γ *выражается параметрически*:
$\Gamma: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$, $a \le t \le b$, $r(t) \in C^1[a,b]$. *Пусть, кроме того,* $f(p) \in C(\Gamma)$. *Тогда*

$$\int_\Gamma f(p)\,dl = \int_a^b f(p(t))\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\,dt\,.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предельный переход в определении криволинейного интеграла был определен геометрически, при сведении к интегралу Римана надо связать геометрический предельный переход с предельным переходом по параметру. Поскольку кривая Γ является простой, то отображение $r\colon [a,b] \to \Gamma$, $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$, взаимно однозначно. Поскольку r непрерывно, то, по теореме о *гомеоморфизме* (если отображение, заданное на компакте, непрерывно и взаимнооднозначно, то и обратное отображение непрерывно), обратное отображение r^{-1} тоже непрерывно. Так как эти отображения заданы на компакте, то они равномерно непрерывны и, следовательно, $d(T_\Gamma) \to 0 \Leftrightarrow d(T_{[a,b]}) \to 0$. Значит, предельный переход геометрического характера эквивалентен предельному переходу аналитического характера. Запишем интегральные суммы для $\int_\Gamma f(p)\,dl$, пользуясь тем, что в предположениях теоремы длина кривой выражается интегралом Римана:

$$\sum_{k=1}^n f(q_k) l(\Gamma_k) = \sum_{k=1}^n f(p(\tau_k)) \int_{a_k}^{b_k} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\,dt\,. \qquad (*)$$

Здесь разбиению кривой Γ точками $p_0, \ldots, p_n$ соответствует разбиение отрезка $[a,b]$ точками $t_0, \ldots, t_n$, причем $a_k = t_{k-1}$, $b_k = t_k$, $r(\tau_k) = q_k$, $t_{k-1} \le \tau_k \le t_k$.

С другой стороны, рассмотрим интеграл

$$\int_{a_k}^{b_k} f(p(t))\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\,dt\,. \qquad \text{(v)}$$

Составим для этого интеграла интегральную сумму

$$\Sigma_1 = \sum_{k=1}^n f(p(\tau_k))\sqrt{x'^2(\tau_k) + y'^2(\tau_k) + z'^2(\tau_k)}\,\Delta t_k\,.$$

Применив к интегралам в $(*)$ теорему о среднем, получим

$$\sum_{k=1}^{n} f(q_k) l\,(\Gamma_k) = \sum_{k=1}^{n} f(p(\tau_k)) \sqrt{x'^2(\tau_k') + y'^2(\tau_k') + z'^2(\tau_k')}\,\Delta t_k = \Sigma_2 .$$

Здесь промежуточные точки для f и для x, y, z разные. Заметим, что разность между интегральными суммами $\Sigma_1 - \Sigma_2 \to 0$ при $d\left(T_{[a,b]}\right) \to 0$ в силу равномерной непрерывности функции $\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}$. А так как интеграл Римана (v) существует, пределы Σ_1, Σ_2 существуют и равны. ►

Аналогичная теорема верна и для поверхностей, только вместо отрезка $[a, b]$ рассматриваем некоторое компактное множество K на плоскости и рассматриваем взаимно однозначное отображение компактного множества K на поверхность. Значит, имеем право вместо предельного перехода геометрического рассмотреть предельный переход аналитический.

Теорема (вычисление поверхностного интеграла первого рода). *Для поверхностного интеграла первого рода от функции* $f \in C(S)$ *по поверхности* S : $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases}$, *где* $(u,v) \in K$, $x, y, z \in C^1(M)$ *и* $\left|D\frac{(x,y)}{(u,v)}\right|^2 + \left|D\frac{(y,z)}{(u,v)}\right|^2 + \left|D\frac{(z,x)}{(u,v)}\right|^2 > 0$, *имеет место формула*

$$\iint\limits_S f(p)\, d\sigma = \iint\limits_K f(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \sqrt{EG - F^2}\, dudv\,. \quad \text{(I)}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Отображение $r\colon K \to S$, параметризующее поверхность, непрерывно и взаимно-однозначно. Поэтому, аналогично случаю криволинейного интеграла первого рода, предельный переход геометрического характера эквивалентен предельному переходу аналитическому.

Интегральная сумма для интеграла (I) слева

$$\sum_k f(q_k)\sigma(S_k) = \sum_k f(q_k) \iint\limits_{K_k} \sqrt{EG - F^2}\, dudv\,,$$

а справа получим

$$\sum_k f(q_k) \left(\sqrt{EG - F^2}\right)_{(u_k, v_k)} m(K_k)\,.$$

В силу равномерной непрерывности функции $\sqrt{EG - F^2}$, мы можем оценить двойной интеграл: для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для разбиения с $d(T) < \delta$

$$\left| \iint\limits_{K_k} \sqrt{EG - F^2}\, dudv - \left(\sqrt{EG - F^2}\right)_{(u_k, v_k)} m(K_k) \right| < \varepsilon m(K_k)\,.$$

Суммируя по k, получаем, что интегральные суммы отличаются не более чем на $\varepsilon Lm(K)$, где $L = \max\limits_{p\in S}|f(p)|$. Поскольку при $d(T)\to 0$ мы можем устремить $\varepsilon\to 0$, поверхностный интеграл первого рода сведен к двойному интегралу Римана. ▶

84.3. Некоторые частные случаи криволинейных и поверхностных интегралов первого рода

Для криволинейного интеграла рассмотрим случай, когда Γ задается так, что в качестве параметра принимается переменная x: $\Gamma:\ \begin{cases} y = y(x) \\ z = z(x) \end{cases},\ a\le x\le b$. В таком случае

$$\int\limits_{\Gamma} f(p)\,dl = \int\limits_a^b f(p(x))\sqrt{1+y'^2+z'^2}\,dx\,.$$

Корень $\sqrt{1+y'^2+z'^2}$ имеет простой геометрический смысл. Если рассмотрим вектор $\overline{t}$ касательной к кривой с направляющими косинусами $(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$, то

$$\int\limits_{\Gamma} f(p)\,dl = \int\limits_a^b f(p(x))\sqrt{1+y'^2+z'^2}\,dx = \int\limits_a^b \frac{f(p(x))}{\left|\cos\widehat{\overline{t},x}\right|}\,dx\,.$$

Отметим, что здесь не может быть особенности в силу условий на Γ.

Аналогично, если поверхность задана так, что $S:\ z=z(x,y)$, где $(x,y)\in K\subset E^2_{(x,y)}$, то $\iint\limits_S f(p)\,d\sigma = \iint\limits_K f(p(x,y))\frac{dxdy}{|\cos\gamma|}$. Здесь $\cos\gamma$ – направляющий косинус нормали к поверхности по отношению к оси Oz, т. е. $\gamma=\widehat{\overline{n},z}$.

Теория криволинейных и поверхностных интегралов первого рода закончена.

Замечание. Для приложений бывают нужны интегралы и по самопересекающимся объектам.

Определение. Если кривая Γ может быть представлена как $\Gamma=\bigcup\limits_{k=1}^n\Gamma_k$, где Γ_k – простые кривые, такие, что любая пара этих кривых имеет пересечение не более, чем в одной точке, то по определению будем считать $\int\limits_\Gamma f(p)\,dl = \sum\limits_{k=1}^n\int\limits_{\Gamma_k} f(p)\,dl$. И даже больше, допустим, что Γ может быть представлена как счетное объединение $\Gamma=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\Gamma_k$ таких кривых Γ_k – простых и имеющих попарно пересечение не более, чем в одной точке. Тогда будем считать по определению $\int\limits_{\Gamma} f(p)\,dl=\sum\limits_{k=1}^{\infty}{}^{*}\int\limits_{\Gamma_k} f(p)\,dl$, если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}{}^{*}\int\limits_{\Gamma_k} f(p)\,dl$.

"Здесь у знака суммы поставлена * потому, что к этому определению надо относиться осторожно: мы говорим, что $\int\limits_{\Gamma} f(p)\,dl$ существует, если только для любого такого разбиения ряд сходится и имеет сумму, не зависящую от разбиения $\Gamma=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\Gamma_k$. Точно также, если $S=\bigcup\limits_{k=1}^{n}S_k$, где $\sigma\,(S_k\bigcap S_l)=0$ $(\,l\neq k\,)$, то мы положим $\iint\limits_{S} f(p)\,d\sigma=\sum\limits_{k=1}^{n}\iint\limits_{S_k} f(p)\,d\sigma$. И с той же осторожностью для ряда $\iint\limits_{S} f(p)\,d\sigma=\sum\limits_{k=1}^{\infty}{}^{*}\iint\limits_{S_k} f(p)\,d\sigma$, если $S=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}S_k$. Теперь определения имеют достаточную для приложений общность." (С. Б. С.)

84.4. Предельный переход под знаком криволинейного интеграла первого рода

В простом интеграле Римана $\int\limits_a^b f_n(x)\,dx\to\int\limits_a^b f(x)\,dx$ при $n\to\infty$, если $f_n(x)\rightrightarrows f(x)$ на $[a,b]$ при $n\to\infty$. Для $\int\limits_{\Gamma} f(p)\,dl=F(f,\Gamma)$ это более сложный вопрос.

Вопрос о предельном переходе можно ставить двояким способом – по отношению к f и по отношению к Γ. В случае равномерной сходимости $f_n(x)\rightrightarrows f(x)$ $(\,n\to\infty\,)$ ясно, что законен предельный переход $\int\limits_{\Gamma} f_n(p)\,dl\to\int\limits_{\Gamma} f(p)\,dl$ $(\,n\to\infty\,)$ под знаком криволинейного (и, аналогично, поверхностного) интеграла.

Несколько более "хитрым" является вопрос о предельном переходе по кривой при $\Gamma_n\to\Gamma$: $\int\limits_{\Gamma_n} f(p)\,dl\to\int\limits_{\Gamma} f(p)\,dl$ $(\,n\to\infty)$. Какая сходимость кривых характеризует возможность предельного перехода под знаком криволинейного интеграла? Одной равномерной сходимости Γ_n к кривой Γ в некоторой параметризации недостаточно. Для ответа на этот вопрос надо перейти к интегралу Римана. Под интегралом стоят не только x, y, z как функции от t ($a \le t \le b$), но и x', y', z'. Следовательно, достаточно следующих условий "гладкой" сходимости кривых:

$$\begin{aligned} x_n(t) \rightrightarrows x(t), \quad x_n'(t) \rightrightarrows x'(t), \\ y_n(t) \rightrightarrows y(t), \quad y_n'(t) \rightrightarrows y'(t), \\ z_n(t) \rightrightarrows z(t), \quad z_n'(t) \rightrightarrows z'(t) \end{aligned}$$

(равномерная сходимость на $[a,b]$ при $n \to \infty$).

Аналогичные рассуждения проходят и для поверхностного интеграла.

4 семестр
Лекция 11
(19.03.69)

§ 85. Криволинейные и поверхностные интегралы второго рода

85.1. Ориентация кривой и поверхности

Пусть задана простая регулярная кривая Γ, $\overline{r}(t) \in C^1[a,b]$, $|\overline{r}'(t)| > 0$. В этом случае единичный вектор касательной $\overline{\tau}$ определен в каждой точке кривой однозначно с точностью до направления. Если в некоторой точке кривой мы выберем направление единичного вектора касательной $\overline{\tau}_0$, то мы можем по непрерывности однозначно определить направление вектора касательной в каждой точке кривой. Тогда можно говорить не просто о кривой, а об ориентированной или направленной кривой, можно говорить о начальной и конечной точках кривой.

Направление на кривой можно задать, упорядочив концевые точки кривой A и B так, что на первое место в паре ставим начальную, а на второе – конечную точку кривой: (A,B) либо (B,A) (рис. 18.3 а). [1]

---

[1] В томе 1 (§ 34 п. 34.1 с. 139) элементарной кривой назывался образ интервала при топологическом отображении, или, что то же, гомеоморфный образ интервала. Определение ориентации с помощью направления касательного вектора годится и для гладкой элементарной кривой. В вопросах, связанных с вычислением длины кривой и интегрированием по кривой, рассматриваются кривые $\overline{r} = \overline{r}(t)$ для значений параметра, меняющегося на отрезке.

Ориентация или направление $N(\Gamma)$ *кривой* Γ есть *релейная* или *логическая функция* от кривой, т. е. функция, которая может принимать по определенному правилу два значения "+" или "– если мы считаем ее релейной, и "1" или "0 если считаем ее логической. Таким образом, если $N(\overset{\smile}{AB})$ принимает значение "+ то $N(\overset{\smile}{BA})$ принимает значение "–". Всякая гладкая кривая ориентируема.

Направление касательного вектора связано с ориентацией кривой только тем, что оно дает наглядное геометрическое представление. На самом деле ориентацию кривой (направление на кривой) можно задать, упорядочив пару концевых точек A и B. Таким образом, гладкость кривой и наличие касательной к кривой в этом вопросе не по существу, а по существу значение релейной функции.

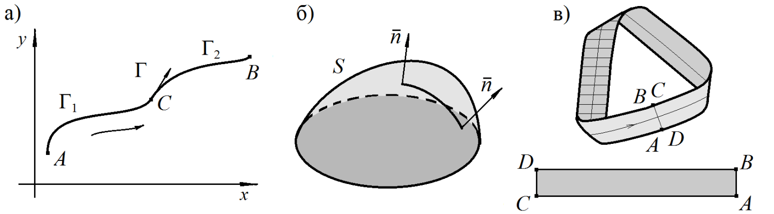


Рис. 18.3.

Кривая может состоять из нескольких частей. При этом ориентация таких частей может быть согласованной или несогласованной. От этого зависит, можно ли распространить ориентацию на всю кривую. Например, пусть точка C делит кривую Γ с концевыми точками A и B на две части: $\Gamma_1 = \overset{\smile}{AC}$ с ориентацией (A, C) и $\Gamma_2 = \overset{\smile}{CB}$ с ориентацией (C, B). Тогда ориентация Γ_1 и Γ_2 согласована и дает ориентацию всей кривой $\Gamma = \overset{\smile}{AB}$.

Пусть в пространстве задана простая (без самопересечений) поверхность S. Надо найти на S такую характеристику, которая была бы, во-первых, релейной и, во-вторых, для гладких поверхностей могла бы по непрерывности быть перенесена от точки к точке. Для поверхности это, естественно, вектор нормали

Для них также применяется термин "кривая". Если на элементарной кривой нет концевых точек, то ориентацию все же можно задать и при отсутствии концевых точек, выбрав две точки на кривой и упорядочив их. (Ред.)

$\overline{n}$. Вектор нормали в любой точке определяется геометрически с точностью до направления и для гладких поверхностей допускает непрерывный перенос по поверхности (не пересекая края поверхности) (рис. 18.3 б). Но, оказывается, этого не достаточно. Например, для листа Мебиуса[2] (рис. 18.3 в) после обхода по некоторым замкнутым кривым, не пересекающим края поверхности, нормаль при возвращении в начальную точку движения меняет свое направление. Такие поверхности называются односторонними поверхностями. Таким образом, не всякая поверхность без самопересечений ориентируема, в отличие от кривых. (На кривой условие ориентируемости в малом переносится на всю кривую, а с поверхностью дело обстоит не так.)

"В математике есть принцип: если что-нибудь в самом общем виде не получается, то надо выделить класс объектов, для которых это верно" (С.Б.С.).

В нашем случае правильная постановка вопроса состоит в том, чтобы среди всех простых гладких поверхностей выделить класс ориентируемых поверхностей.

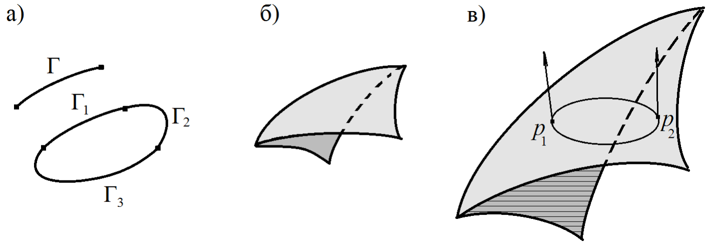


Рис. 18.4.

Помимо кривых определим еще дуги.

Определение. *Простой дугой* (рис. 18.4 а) назовем взаимно однозначный и взаимно непрерывный образ отрезка при отображении в n-мерное евклидово пространство (или, иначе, простая дуга – это гомеоморфный образ отрезка).

На простой дуге можно ввести ориентацию, упорядочив концевые точки.

---

[2] Лист Мебиуса может быть получен отождествлением двух противоположных сторон AB и DC прямоугольника $ABCD$ так, что точки A и B совмещаются соответственно с точками C и D (из Математичечкой энциклопедии [14] т. 3 с. 630; см. также [28] т. 3 с. 242). (Ред.)

Как мы знаем, простая замкнутая кривая есть гомеоморфный образ окружности.

Напомним, что множество M связно, если его нельзя разбить на две непустые части, отделяющиеся непересекающимися открытыми множествами.

Простая замкнутая кривая – связное множество точек в пространстве, которое можно разбить на конечное число простых дуг. Если ориентация простых дуг согласована, можно определить *ориентацию простой замкнутой кривой.*

Эти определения переносятся и на случай поверхностей.

Определение. *Простой кусок поверхности* (рис. 18.4 б) – это взаимно однозначный и взаимно непрерывный образ квадрата.

Определение. *Простая поверхность* – это связное множество, которое представляется в виде объединения конечного числа простых кусков поверхностей, которые пересекаются только по краям.

С этой точки зрения *лист Мебиуса – простая поверхность*, так как его можно склеить из двух квадратов.

На простом гладком куске поверхности можно ввести ориентацию, но не на всякой простой поверхности (на листе Мебиуса, например, нельзя ввести ориентацию).

Таким образом, мы приходим к некоторой классификации: поверхности бывают ориентируемые и не ориентируемые.

Определение. *Простая поверхность ориентируема*, если для любой простой замкнутой кривой, лежащей на поверхности и не пересекающей ее края, при обходе по кривой вектор нормали возвращается в начальное положение с исходным направлением (рис. 18.4 в).

Следовательно, для ориентируемой поверхности, если мы выберем направление нормали в некоторой точке поверхности, то и в остальных точках поверхности направление вектора нормали будет определено (т. е. вектор нормали можно однозначно переносить по поверхности). Противоположное означало бы, что найдется замкнутая кривая, при обходе которой вектор нормали меняет направление.

Таким образом, мы можем приписать поверхности две стороны ($N(S) = "+"$ и $N(S) = "-"$) и выбор стороны поверхности означает, что мы выбрали направление нормали в некоторой точке поверхности, а значит, и во всех точках поверхности. Таким образом, сторона поверхности – это поверхность с выбранными на ней указанным способом направлениями нормалей.

85.2. Криволинейные интегралы второго рода

Пусть Γ есть простая ориентированная дуга в пространстве (или на плоскости) с начальной точкой A и конечной точкой B. Пусть задана непрерывная функция $P \in C(\Gamma)$. Возьмем произвольное разбиение (T_Γ) дуги Γ точками $A_k = (x_k, y_k, z_k)$ ($k = 0, 1, ..., n$), $A_0 = A$, $A_n = B$, на кусочки $\Gamma_k = \smile{A_{k-1}A_k}$ ($k = 1, ..., n$). Каждый из этих кусочков ориентирован, так как ориентация кривой индуцирует на Γ_k согласованную ориентацию. Выберем точки $q_k \in \Gamma_k$ ($k = 1, ..., n$) и составим интегральную сумму $\sum\limits_{k=1}^{n} P(q_k)\Delta x_k$, где $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ (Δx_k – здесь не мера!).

Определение. *Криволинейным интегралом второго рода* [3] $\int\limits_\Gamma P(p)\,dx$ от функции $P(p)$ по простой ориентированной дуге Γ называется предел

$$\int\limits_\Gamma P(p)\,dx = \lim_{d(T_\Gamma)\to 0} \sum_{k=1}^{n} P(q_k)\Delta x_k\,,$$

если он существует, не зависит от способа разбиения Γ на части и от выбора точек q_k.

Пусть заданы непрерывные функции P, Q, $R \in C(\Gamma)$. Тогда мы можем определить $\int\limits_\Gamma P(p)\,dx$, $\int\limits_\Gamma Q(p)\,dy$, $\int\limits_\Gamma R(p)\,dz$, где второй и третий интегралы определяются аналогично первому, только проекции частичных дуг берутся на оси Oy и Oz. Сумму этих интегралов называют общим интегралом второго рода и обозначают

$$\int\limits_\Gamma P(p)\,dx + Q(p)\,dy + R(p)\,dz$$

(в плоском случае третьего слагаемого нет). [4]

Рассматривая интегральные суммы мы видим, что

$$\int\limits_{\smile{AB}} P(p)dx + Q(p)dy + R(p)dz = -\int\limits_{\smile{BA}} P(p)\,dx + Q(p)dy + R(p)dz\,.$$

---

[3] Криволинейным интегралом второго типа в [27] и в [28]. В лекциях употреблялись оба названия. (Ред.)

[4] В некоторых учебниках криволинейный интеграл второго рода определяется как $\int\limits_\Gamma (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)ds$, где $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ – единичный касательный вектор к кривой, $s = s(t)$ – переменная длина дуги (см., например, [8] т. 2 п. 47.2). (Ред.)

Интеграл по замкнутой ориентированной простой кривой Γ определяется с помощью разбиения ее на дуги Γ_1 и Γ_2, ориентация которых индуцируется ориентацией кривой. По определению, $\oint\limits_{\Gamma} = \int\limits_{\Gamma_1} + \int\limits_{\Gamma_2}$.

"Понятие криволинейного интеграла второго типа и есть самое важное для приложений." (С. Б. С.)

Особенно простым это определение становится в том случае, если простая дуга Γ задается уравнениями $\begin{cases} y = y(x) \\ z = z(x) \end{cases}$. Тогда промежуточные точки q_k имеют координаты $(\xi_k, y(\xi_k), z(\xi_k))$ и интегральные суммы для интеграла $\int\limits_{\Gamma} P(p)dx$ будут

$$\sum_{k=1}^{n} P(\xi_k, y(\xi_k), z(\xi_k)) \Delta x_k .$$

Если мы предположим, что изменению параметра x от a до b соответствует перемещение точки $p = (x, y, z) = (x, y(x), z(x))$ от начальной точки A до конечной точки B, то при сделанных предположениях $d(T_\Gamma) \to 0 \Leftrightarrow d\left(T_{[a,b]}\right) \to 0$ (это следует из того, что дуга – непрерывный образ отрезка и, следовательно, функции $y(x)$ и $z(x)$ непрерывны). Следовательно, интегральные суммы для криволинейного интеграла сходятся к интегралу Римана

$$\sum_{k=1}^{n} P(\xi_k, y(\xi_k), z(\xi_k)) \Delta x_k \to \int_a^b P(x, y(x), z(x))\, dx .$$

Замечание. Для существования интеграла первого рода мы требовали, чтобы кривая Γ была спрямляемой, здесь мы просто требуем, чтобы $P \in C(\Gamma)$, а Γ – произвольная простая дуга (спрямляемость кривой Γ не предполагается).

Вычислим криволинейный интеграл второго рода еще в одном случае: пусть непрерывная кривая Γ лежит в плоскости $x = x_0$. В интегральных суммах для этого интеграла стоят Δx_k, соответствующие разбиению (T_Γ) кривой Γ на кусочки Γ_k. Так как x не меняется, то $\Delta x_k = 0$ ($k = 1, ..., n$). Значит, интеграл $\int\limits_{\Gamma} P(p)\, dx = 0$.

Соответствующие частные случаи, очевидно, могут быть рассмотрены и для интегралов $\int\limits_{\Gamma} Q(p)\, dy$ и $\int\limits_{\Gamma} R(p)\, dz$.

4 семестр
Лекция 12
(21.03.69)

85.3. Вычисление криволинейных интегралов второго рода, связь с криволинейными интегралами первого рода

Рассмотрим вопрос о вычислении криволинейного интеграла $\int\limits_\Gamma P(p)\,dx + Q(p)\,dy + R(p)\,dz$ по кривой $\Gamma = \breve{AB}$: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$, $t \in [\alpha, \beta]$, где $(x(\alpha), y(\alpha), z(\alpha)) = A$, $(x(\beta), y(\beta), z(\beta)) = B$, а функции P, Q и R непрерывны на Γ.

Пусть сначала у нас есть $\int\limits_\Gamma P(p)\,dx$ по простой гладкой кривой Γ. Интегральные суммы для этого интеграла имеют вид $\sum\limits_{k=1}^{n} P(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\,\Delta x_k$ для разбиения (T_Γ) кривой Γ, которое соответствует разбиению (T) отрезка $[\alpha, \beta]$. Тогда можно выразить $\Delta x_k = \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} x'(t)\,dt$, и если точка (ξ_k, η_k, ζ_k) соответствует параметру $t_{k-1} \le \tau_k \le t_k$, то интегральная сумма запишется следующим образом $\sum\limits_{k=1}^{n} P(x(\tau_k), y(\tau_k), z(\tau_k)) \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} x'(t)\,dt$. В силу гладкости кривой Γ существует интеграл Римана

$$\int\limits_\alpha^\beta P(x(t), y(t), z(t))\, x'(t)\,dt\,.$$

Так как функция $x'(t)$ непрерывна, а значит и равномерно непрерывна на отрезке $[\alpha, \beta]$, то для всякого $\varepsilon > 0$ можно выбрать $\delta > 0$ так, что $|x'(t) - x'(\tau)| < \varepsilon$, если $|t - \tau| < \delta$. Тогда модуль разности интегральных сумм для интеграла по кривой и для интеграла Римана не превосходит

$$\left|\sum_{k=1}^{n} P(x(\tau_k), y(\tau_k), z(\tau_k)) \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} x'(t)\,dt - \right.$$
$$\left. - \sum_{k=1}^{n} P(x(\tau_k), y(\tau_k), z(\tau_k)) x'(\tau_k)\Delta t_k\right| \le$$
$$\le \sum_{k=1}^{n} \left| P(x(\tau_k), y(\tau_k), z(\tau_k)) \left(\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} x'(t)\,dt - x'(\tau_k)\Delta t_k \right) \right| \le$$
$$\le \max_{p\in\Gamma} |P(p)| \varepsilon \sum_{k=1}^{n} |\Delta t_k| < C\varepsilon\,,$$

если $|t_k - t_{k-1}| < \delta$. Отсюда следует существование криволинейного интеграла второго рода и его равенство интегралу Римана $\int\limits_{\Gamma} P(p)\,dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} P\left(x(t), y(t), z(t)\right) x'(t)\,dt$.

Заметим, что если функция $x'(t)$ существует и непрерывна только на интервале (α, β), но ограничена на нем, то доказательство тоже проходит. Пусть теперь функции x, y, z имеют кусочно-непрерывные производные на $[\alpha, \beta]$, т. е. отрезок разбивается точками α_k на конечное число частей таких, что функции x', y', z' имеют непрерывные производные на каждом интервале (α_{k-1}, α_k), $k = 1, ..., m$, где $\alpha_0 = \alpha$, $\alpha_m = \beta$, при этом, если $t \to \alpha_k \pm 0$, то x', y', z' имеют конечные пределы. Такая кривая Γ называется *кусочно-гладкой кривой*. Покажем, что для кусочно-гладкой кривой формула тоже справедлива. Пусть дуга $\Gamma_k = \smile{A_{k-1}A_k}$ кривой Γ имеет ориентацию, согласованную с ориентацией Γ и соответствует промежутку изменения t на отрезке $[\alpha_{k-1}, \alpha_k]$. Тогда криволинейный интеграл второго рода от функции P по дуге Γ_k равен

$$\int\limits_{\Gamma_k} P(p)\,dx = \int\limits_{\alpha_{k-1}}^{\alpha_k} P\left(x(t), y(t), z(t)\right) x'(t)\,dt\,.$$

Сумма этих интегралов равна

$$\sum_{k=1}^{m} \int\limits_{\Gamma_k} P(p)\,dx = \sum_{k=1}^{m} \int\limits_{\alpha_{k-1}}^{\alpha_k} P\left(x(t), y(t), z(t)\right) x'(t)\,dt =$$

$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} P\left(x(t), y(t), z(t)\right) x'(t)\,dt\,.$$

Нетрудно показать, сравнив интегральные суммы, что сумма интегралов слева равна интегралу по всей кривой Γ. Аналогичные рассуждения применимы для общего интеграла второго рода $\int\limits_{\Gamma} P(p)\,dx + Q(p)\,dy + R(p)\,dz$. Таким образом, справедлива

Теорема (сведение криволинейного интеграла второго рода к интегралу Римана). *Пусть* $\Gamma = \smile{AB} : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$, $t \in [\alpha, \beta]$, *– кусочно-гладкая кривая, где* $(x(\alpha), y(\alpha), z(\alpha)) = A$, $(x(\beta), y(\beta), z(\beta)) = B$, *а функции* P, Q *и* R *непрерывны на* Γ. *Тогда*

$$\int\limits_{\Gamma} P(p)\,dx + Q(p)\,dy + R(p)\,dz = \int\limits_{\alpha}^{\beta} (P\left(x(t), y(t), z(t)\right) x'(t) +$$

$$+ Q\left(x(t), y(t), z(t)\right) y'(t) + R\left(x(t), y(t), z(t)\right) z'(t))\,dt\,.$$

Отметим, что в теореме не предполагается, что $\alpha < \beta$, а предполагается, что при изменении параметра от α к β, кривая Γ пробегается в положительном направлении, соответствующем ее ориентации от A к B.

Рассмотрим специальный частный случай, когда $t = l$ (l – длина дуги). Тогда x', y', z' имеют простой геометрический смысл – это направляющие косинусы вектора касательной к кривой Γ, т. е. $\overline{t} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$. Таким образом, получаем формулу, связывающую криволинейные интегралы первого и второго рода [5)]

$$\int\limits_{\Gamma} P dx + Q dy + R dz = \int\limits_{0}^{L} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\, dl =$$
$$= \int\limits_{\Gamma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\ dl\,.$$

85.4. Переход к пределу по кривым в криволинейных интегралах второго рода

Рассмотрим плоский случай. Пусть в области $D \subset E^2$ (*т. е.* D – *открытое связное множество*) задана кривая $\Gamma = \overset{\smile}{AB}$ и во всей области D заданы функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$. Пусть есть еще одна кривая $\Gamma' = \overset{\smile}{A'B'}$ в области D (см. рис. 18.5 а). Мы хотим выяснить, когда $\int\limits_{\Gamma} P dx + Q dy$ близок к $\int\limits_{\Gamma'} P\, dx + Q\, dy$. Или точнее, при каких ограничениях на кривые $\{\Gamma_n\}$, сходящиеся в некотором смысле к Γ, и при каких предположениях на функции P и Q

$$\int\limits_{\Gamma_n} P\, dx + Q\, dy \to \int\limits_{\Gamma} P dx + Q dy \quad (n \to \infty)\,.$$

Формула сведения к интегралу Римана позволяет легко ответить на этот вопрос (для простоты изложения будем продолжать рассматривать плоский случай). Зададим Γ_n : $\begin{cases} x = x_n(t) \\ y = y_n(t) \end{cases}$. Отрезок изменения параметра для простоты предположим одним и

[5)] Если обозначить векторную функцию $\bar{A} = (P, Q, R)$, то подынтегральная функция в последнем интеграле этой формулы является скалярным произведением $\bar{A}$ и $\bar{t}$ и формула связи между интегралами первого и второго рода выглядит следующим образом: $\int\limits_{\Gamma} P dx + Q\, dy + R\, dz = \int\limits_{\Gamma} (\bar{A}, \bar{t})\, dl$. Мы пришли к формуле, которая часто берется за определение криволинейного интеграла второго рода (см. сноску на с. 513). (Ред.)

тем же $[\alpha, \beta]$ для Γ и всех кривых Γ_n, а функции P и Q предположим непрерывными в области D. Тогда вопрос о сходимости $\int\limits_{\Gamma_n} P\,dx + Q\,dy \to \int\limits_{\Gamma} Pdx + Qdy \quad (n \to \infty)$ сводится к тому, когда

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta}(P\,(x_n(t), y_n(t))\,x_n'(t) + Q\,(x_n(t), y_n(t))\,y_n'(t))\,dt \to$$

$$\to \int\limits_{\alpha}^{\beta}(P\,(x(t), y(t))\,x'(t) + Q\,(x(t), y(t))\,y'(t))\,dt\,.$$

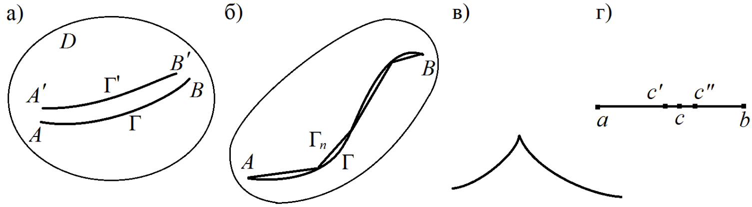


Рис. 18.5.

Т. е. нас интересует вопрос: когда при этом будет справедлив предельный переход под знаком интеграла? По теореме на с. 362 для сходимости интегралов достаточно равномерной сходимости подынтегральных функций. В интеграле Римана фигурируют производные, поэтому одной равномерной сходимости функций x_n, y_n недостаточно; достаточно будет равномерной сходимости x_n, y_n и их производных одновременно. По условию, функции P и Q непрерывны в области D, а тогда они непрерывны и в некотором открытом множестве D_1 таком, что $\Gamma \subset D_1 \subset D$, замыкание которого $K = \overline{D}_1$ содержится в области D и является компактом. Функции P и Q равномерно непрерывны на K, поэтому из равномерной сходимости x_n и y_n к функциям x и y следует равномерная сходимость на $[\alpha, \beta]$ последовательностей функций $P\,(x_n(t), y_n(t))$ и $Q\,(x_n(t), y_n(t))$ к функциям $P\,(x(t), y(t))$ и $Q\,(x(t), y(t))$, соответственно. Тогда последовательность подынтегральных функций в интегралах слева, равномерно сходится к подынтегральной функции

$$P\,(x(t), y(t))\,x'(t) + Q\,(x(t), y(t))\,y'(t)\,.$$

Значит, *если функции* $P, Q \in C(D)$, *а функции* x_n, y_n *и* x, y *имеют непрерывные производные, причем* $x_n \to x$, ..., $y_n' \to y'$ *равномерно на* $[\alpha, \beta]$, *то законен предельный переход под знаком интеграла.*

Пусть теперь кривые Γ и Γ_n – кусочно-гладкие, а функции P и Q по-прежнему непрерывны в области D. Тогда значений t, где функция $x(t)$ или $y(t)$ не имеет производной, конечное число. Обозначим их α_1, ..., α_k. Для кривых Γ_n производные функций $x_n(t)$, $y_n(t)$ доопределим в точках разрыва по непрерывности справа (для определенности). Теперь предположим, что помимо равномерной сходимости функций $x_n(t)$, $y_n(t)$ к $x(t)$, $y(t)$ на $[\alpha, \beta]$ доопределенные производные равномерно сходятся к $x'(t)$, $y'(t)$ на всяком замкнутом подмножестве отрезка $[\alpha, \beta]$, не содержащем точек α_1, ..., α_k, и эти производные ограничены в совокупности: $|x_n'(t)| \leq M$, $|y_n'(t)| \leq M$, где M – некоторая постоянная. Тогда, при этих условиях (см. следующую теорему), и аналогично случаю гладких кривых, имеем $\int\limits_{\Gamma_n} P\,dx + Q\,dy \to \int\limits_{\Gamma} Pdx + Qdy \quad (n \to \infty)$.

В частном случае, пусть $\Gamma_n = L_n$ – ломаные, вписанные в кривую Γ (рис. 18.5 б), вершины которых задают разбиения кривой Γ, такие, что при $n \to \infty$ диаметры разбиений $d(T_\Gamma) \to 0$. Пусть Γ – кривая с изломами (рис. 18.5 в). Тогда равномерной сходимости подынтегральных функций (при переходе к интегралам Римана) может не быть. Точки излома кривой Γ включим в разбиение. Такой предельный переход, когда особые точки включаются в разбиение, называется *тонким.* Если взять тонкий предел ломаных, вписанных в кусочно-гладкую кривую, то будет законен предельный переход под знаком интеграла. "На самом деле тонкости здесь не нужно, просто у нас не было доказано соответствующей теоремы". (С.Б.С.)

Пусть есть отрезок $[a, b]$. Допустим, что на любом замкнутом множестве, не содержащем точку c (см. рис. 18.5 г), сходимость $f_n(x)$ к $f(x)$ равномерная. Тогда к отрезкам $[a, c']$ и $[c'', b]$ теорема о переходе к пределу под знаком интеграла применима, а тогда нам надо только, чтобы отрезок $[c', c'']$ "не испортил дело а для этого достаточно ограниченности функций. Т. е. справедлива

Теорема. *Если имеется единственная точка c или конечное множество точек таких, что на любом замкнутом множестве $F \subset [a, b]$, $c \notin F$, $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на F ($n \to \infty$), а $|f_n(x)| \leq M$ на $[a, b]$, то тогда, если функции f_n интегрируемы, то и предельная функция f интегрируема, и законен предельный переход*

$$\int\limits_a^b f_n(x)\,dx \to \int\limits_a^b f(x)\,dx \quad (n \to \infty).$$

§ 86. Независимость криволинейного интеграла от пути интегрирования

Пусть D – пространственная область (т. е. *открытое связное* множество), в которой заданы функции $P, Q, R \in C\,(D)$. Возьмем в области две точки $A, B \in D$ и рассмотрим две кривые Γ и Γ' (рис. 18.6) такие, что $\Gamma, \Gamma' \subset D$ и они имеют общее начало – точку A и общий конец – точку B: $\Gamma = \smile{AB}$, $\Gamma' = \smile{AB}$. Если обе эти кривые кусочно-гладкие, то существуют оба интеграла $\int\limits_{\Gamma} Pdx+Qdy+Rdz$, $\int\limits_{\Gamma'} P\,dx+Q\,dy+R\,dz$. Вообще говоря, эти интегралы не будут совпадать (это показывают простейшие примеры), т. е. криволинейные интегралы 2-го рода зависят не только от функций, но и от кривых, по которым ведется интегрирование, зависят от пути интегрирования. При каких условиях на P, Q, R для любых точек $A, B \in D$ и любых кусочно-гладких кривых $\Gamma, \Gamma' \subset D$ криволинейные интегралы второго рода совпадают: $\int\limits_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz = \int\limits_{\Gamma'} P\,dx + Q\,dy + R\,dz$?

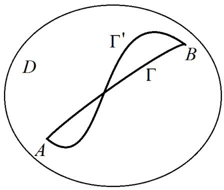


Рис. 18.6.

Этот вопрос важен потому, что он связан с вопросами теории поля и математической физики и решается с помощью теории полного дифференциала. Под знаком криволинейного интеграла второго рода стоит дифференциальная форма $Pdx + Qdy + Rdz$ (т. е. линейная форма от дифференциалов переменных). Мы знаем, что полный дифференциал – также дифференциальная форма. Если в области D есть дифференцируемая функция $U(x, y, z)$, то ее дифференциал $dU = Adx + Bdy + Cdz$, причем $A = \frac{\partial U}{\partial x}$, $B = \frac{\partial U}{\partial y}$, $C = \frac{\partial U}{\partial z}$. Не всякая дифференциальная форма относительно dx и dy (для простоты взято две переменных) есть дифференциал от некоторой функции двух переменных. Действительно, пусть $U(x, y) \in C^2(D)$. Тогда мы знаем, что $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}$. Для дифференциала это значит $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = \frac{\partial A}{\partial y}$. Отсюда вытекает, что дифференциальная форма, для которой функции A и B дифференцируемы, может быть дифференциалом некоторой функции только если $\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}$ (это одно из необходимых условий). Аналогичные условия получаются и в случае многих переменных.

Определение. Если для дифференциальной формы существует такая функция U, что ее дифференциал есть эта дифференциальная форма, то функция U называется *потенциальной* [6] для этой дифференциальной формы, а про дифференциальную форму говорят, что она имеет потенциальную функцию U.

Криволинейный интеграл второго рода есть интеграл от дифференциальной формы. Исследуем, когда он не зависит от пути интегрирования.

Теорема о независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования. *Пусть* $D \subset E^3$ – *пространственная область, в которой заданы непрерывные функции* $P, Q, R \in C(D)$. *Для того, чтобы криволинейный интеграл* $\int\limits_{\Gamma} P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ *по любой кусочно-гладкой кривой* $\Gamma \subset D$ *не зависел от пути интегрирования, необходимо и достаточно, чтобы существовала такая однозначная функция* $U(x, y, z)$ (*где* $(x, y, z) \in D$), *что во всей области* D *справедливо равенство*: [7]

$$dU = P\,dx + Q\,dy + R\,dz\,.$$

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть дифференциальная форма есть полный дифференциал. Рассмотрим $\int\limits_{\Gamma} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int\limits_{\Gamma} dU$. Воспользуемся формулой сведения интеграла к интегралу Римана. Пусть $\Gamma : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$, $t \in [\alpha, \beta]$, является кусочно-гладкой кривой. Тогда $\int\limits_{\Gamma} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \{P\,x'(t) + Q\,y'(t) + R\,z'(t)\}\,dt$. Так как наша дифференциальная форма есть полный дифференциал, то $P = \frac{\partial U}{\partial x}$, $Q = \frac{\partial U}{\partial y}$, $R = \frac{\partial U}{\partial z}$. Тогда в фигурных скобках под знаком интеграла стоит выражение

$$\frac{\partial U}{\partial x}\,x'(t) + \frac{\partial U}{\partial y}\,y'(t) + \frac{\partial U}{\partial z}\,z'(t) = \frac{d}{dt} U\left(x(t), y(t), z(t)\right)$$

для всех $t \in [\alpha, \beta]$, за исключением, быть может, конечного числа

---

[6] Эта функция называется также *первообразной* для дифференциальной формы $Pdx + Qdy + Rdz$. См., например, [28] т. 3 п.п. 557 – 559. (Ред.)

[7] Можно сказать иначе: для того, чтобы криволинейный интеграл не зависел от пути интегрирования необходимо и достаточно, чтобы в области D дифференциальная форма $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ имела однозначную потенциальную (первообразную) функцию $U(x, y, z)$, т.е. $dU = P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ во всей области. (Ред.)

значений t. Значит, функция $U(x(t),y(t),z(t))$ является первообразной функции $\frac{\partial U}{\partial t}$ и мы можем расписать наш интеграл как

$$\int\limits_{\Gamma} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \tfrac{d}{dt} U\left(x(t),y(t),z(t)\right)\,dt =$$
$$= U\left(x(\beta),y(\beta),z(\beta)\right) - U\left(x(\alpha),y(\alpha),z(\alpha)\right) = U(B) - U(A)\,.$$

Эта формула и показывает, что интеграл не зависит от пути интегрирования, а есть просто приращение потенциальной функции U от точки A до точки B:

$$\int\limits_{\breve{AB}} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int\limits_{\breve{AB}} dU = U(M)|_A^B = U(B) - U(A)\,.$$

Н е о б х о д и м о с т ь. Что значит, что криволинейный интеграл $\int\limits_{\Gamma} P\,dx+Q\,dy+R\,dz = \int\limits_{\breve{AB}} P\,dx+Q\,dy+R\,dz$ не зависит от пути интегрирования? Зафиксируем точку A, а точка B пусть "бегает" по D. Обозначим $\int\limits_{\breve{AB}} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = U(B)$ (так как множество D связно, кривые, соединяющие точку A с точкой B, существуют).

Докажем, что U – дифференцируемая функция и ее дифференциал представляет собой исходную дифференциальную форму. Для этого достаточно доказать, что построенная функция U имеет непрерывные частные производные, совпадающие с P, Q и R, т.е. осталось показать, что $\frac{\partial U}{\partial x} = P$, $\frac{\partial U}{\partial y} = Q$, $\frac{\partial U}{\partial z} = R$, так как функции P, Q и R по условию непрерывны. Так как во всех трех случаях доказательство аналогично, докажем только, что $\frac{\partial U}{\partial x} = P$. Если h достаточно мало, то вместе с точкой (x,y,z) шар радиуса h с центром в этой точке содержится в D (так как D – открытое множество). Имеем

$$\Delta_{x,h}U = U(x+h,y,z) - U(x,y,z) = \int\limits_{(x,y,z)\breve{(x+h,y,z)}} P\,dx + Q\,dy + R\,dz\,.$$

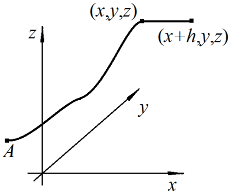


Рис. 18.7.

Так как интеграл не зависит от пути интегрирования, то интегрирование можно вести по прямолинейному отрезку (рис. 18.7), соединяющему точки (x,y,z) и $(x+h,y,z)$. При этом y и z не меняются и по замечанию, сделанному в конце прошлой лекции, соответствующие интегралы от $Q\,dy$ и от $R\,dz$ равны нулю, следовательно, $\Delta_{x,h}U = \int\limits_{\smile\atop (x,y,z)(x+h,y,z)} P\,dx = \int\limits_x^{x+h} P(\xi,y,z)\,d\xi$. Разделив $\Delta_{x,h}U$ на h и устремив h к нулю, убеждаемся, что действительно $\frac{\partial U}{\partial x} = P\,(x,y,z)$. ▶

Пользоваться этой теоремой надо с осторожностью. Часто для дифференциальной формы можно построить потенциальную функцию, но иногда оказывается, что это функция многозначная. Поэтому при применении этой теоремы надо проверять, что полученная функция U однозначна. Иначе теорема не применима.

4 семестр
Лекция 13
(26.03.69)

Теорема переносится на n-мерный случай:

Теорема о независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования. *Пусть в пространственной области* $D \subset E^n$ *заданы функции* $P_i \in C(D)$ ($i = 1,...,n$). *Для того, чтобы криволинейный интеграл* $\int\limits_\Gamma P_1\,dx_1 + P_2\,dx_2 + ... + P_n\,dx_n$, *где* Γ – *кусочно-гладкая кривая, не зависел от пути интегрирования, необходимо и достаточно, чтобы существовала такая однозначная функция* $U(x_1,...,x_n)$ ($(x_1,...,x_n) \in D$), *что во всей области* D *справедливо равенство*

$$dU = P_1\,dx_1 + P_2\,dx_2 + ... + P_n\,dx_n\,.$$

"Почему сие важно?" (С. Б. С.) Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$P\,(x,y)\;dx + Q\,(x,y)\;dy = 0\,.$$

Если функции P и Q таковы, что уравнение удовлетворяет теореме существования решения дифференциального уравнения, то у него существует *интегрирующий множитель* $\mu\,(x,y)$ ([5] п. 4.13 с. 49). Это такая дифференцируемая функция $\mu\,(x,y) \neq 0$, что

$$\mu\,(x,y)\,\{P\,(x,y)\;dx + Q\,(x,y)\;dy\} = dU\,(x,y)$$

– полный дифференциал. Тогда существует интеграл этого уравнения $U\,(x,y) = C$, где

$$U\,(x,y) - \underbrace{U\,(x_0,y_0)}_{const} = \int\limits_{\smile\atop M_0M} \mu P\,dx + \mu Q\,dy\,,$$

$M_0 = (x_0,y_0)$, $M = (x,y)$. Таким образом, решение этого дифференциального уравнения находится по формуле

$$\int\limits_{\smile{M_0 M}} \mu P\,dx + \mu Q\,dy = C\,.$$

Замечания относительно условий теоремы о независимости интеграла от пути интегрирования. 1. D – область (открытое связное множество). Открытость этого множества была использована при доказательстве дифференцируемости функции U. Где использовалась связность? При построении функции $U(x,y)$ как криволинейного интеграла $\int\limits_{\Gamma} P\,dx + Q\,dy = U - U_0$ вдоль пути, связывающего фиксированную точку M_0 и произвольную точку $M = (x,y)$ множества D. Для несвязного множества эта конструкция не проходит: нельзя определить U на всей области D. Вообще, если множество D несвязно, то нельзя произвольные точки A и B из множества D соединить кривой. Таким образом, условие связности необходимо (и достаточно тоже).

2. Необходимость проверки однозначности функции U. [8] Если, например, область D имеет вид кольца или "области с дырками" (рис. 18.8 а), то могут быть такие случаи, когда криволинейный интеграл зависит от того, сколько раз путь обегает отверстие:

$$\int\limits_{\Gamma} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{\Gamma_0} P\,dx + Q\,dy + n\omega\,,$$

где ω не зависит от выбора контура. Или, как во втором случае на рис. 18.8 а), интеграл может зависеть от того, сколько раз и в каком направлении кривая обегает отверстия; первому отверстию отвечает значение ω_1, второму ω_2; при обходе контура в положительном направлении вокруг соответствующих отверстий соответствующие значения прибавляются, в отрицательном на-

---

[8] Как правило, мы имели дело с однозначными функциями. Но определяя первообразную функцию U формулой $\int\limits_{\smile{AB}} P\,dx + Q\,dy = U(B)$, мы, оказывается, можем получить многозначную функцию. Рассмотрим $\int\limits_{\smile{AB}} \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2} = U(B)$, например, в кольце (рис. 18.8 а), где начало координат является центром концентрических окружностей – границ кольца. Проведя интегрирование по дуге или записав подынтегральное выражение в полярных координатах, можем найти функцию U для него. Она имеет значение полярного угла θ, которое будучи заданным в некоторой точке, при возвращении в нее после n оборотов вокруг начала координат, получит приращение $\pm 2\pi n$. Таким образом, в данном случае существует функция $U = \theta \pm 2\pi n$, дифференциал от каждой ветви которой равен подынтегральному выражению, но она многозначная. (См. [28] т. 3 п. 562.) (Ред.)

правлении – вычитаются столько раз, сколько раз обходим вокруг отверстия.

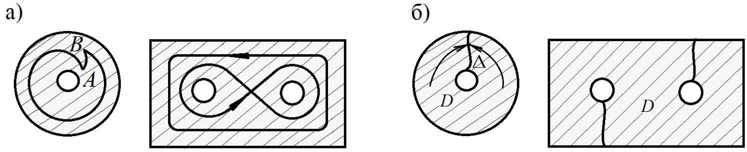


Рис. 18.8.

3. Если область D такова, что интеграл зависит не от пути, а от числа обходов отверстия, то надо "запретить" контуру обходить отверстие. Для этого надо сделать в области разрез по кривой Δ (рис. 18.8 б) такой, что в $D' = D\backslash\Delta$ мы не могли бы обходить вокруг "дырки" (вокруг "телеграфного столба"). Функция $U \in C(D')$, хотя во всей области D функция U перестает быть непрерывной.

В условиях теоремы о независимости интеграла от пути интегрирования (см. с. 521) имеет место следующая теорема.

Теорема (о равенстве нулю интеграла по замкнутому контуру). *Криволинейный интеграл* $\int\limits_{\Gamma=\overset{\smile}{AB}} P\,dx + Q\,dy$ *не зависит от пути интегрирования в области* D *тогда и только тогда, когда интеграл по любому замкнутому контуру равен нулю.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть криволинейный интеграл не зависит от пути интегрирования:

$$\int\limits_{\Gamma=\overset{\smile}{AB}} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{\Gamma_1=\overset{\smile}{AB}} P\,dx + Q\,dy$$

для любых путей из точки A в точку B. Пусть есть замкнутый контур Δ (рис. 18.9 а). Разобьем этот контур на две кривые Γ_1 и Γ_2 точками A и B. Тогда

$$\oint\limits_{\Delta} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{\Gamma} P\,dx + Q\,dy + \int\limits_{\Gamma_1} P\,dx + Q\,dy =$$
$$= \int\limits_{\Gamma} P\,dx + Q\,dy - \int\limits_{\Gamma'=-\Gamma_1} P\,dx + Q\,dy = 0\,.$$

Обратно, пусть $\oint\limits_{\Delta} P\,dx + Q\,dy = 0$. Покажем, что интеграл не зависит от пути. Контур может иметь беконечное число пересечений и его будет неудобно разбивать на части. Можно построить такие две, сколь угодно гладкие кривые, которые соединяют точки A и B, и пересекаются друг с другом бесконечное число раз (рис. 18.9 б). Поэтому воспользуемся теоремами о переходе к пределу по кривым.

Мы знаем, что

$$\int\limits_{\Gamma} Pdx + Qdy = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\Gamma_n} P\,dx + Q\,dy\,,$$

$$\int\limits_{\Gamma'} Pdx + Qdy = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\Gamma'_n} P\,dx + Q\,dy\,,$$

где кривые Γ_n аппроксимируют Γ, а Γ'_n аппроксимируют Γ'. В качестве аппроксимирующих кривых возьмем вписанные в Γ и Γ' ломаные, состоящие из конечного числа отрезков – звеньев. Поэтому достаточно доказать, что $\int\limits_{\Gamma_n} P\,dx+Q\,dy = \int\limits_{\Gamma'_n} P\,dx+Q\,dy$.

При пересечении двух ломаных (рис. 18.9 в) можно разбить их на конечное число кусочков, на которых можно применить формулу для интеграла по замкнутому контуру. Таким образом,

$$\int\limits_{\Gamma_n} P\,dx + Q\,dy - \int\limits_{\Gamma'_n} P\,dx+Q\,dy = \sum_{k=1}^{m} \oint\limits_{\Delta_k} P\,dx+Q\,dy = 0. \quad \blacktriangleright$$

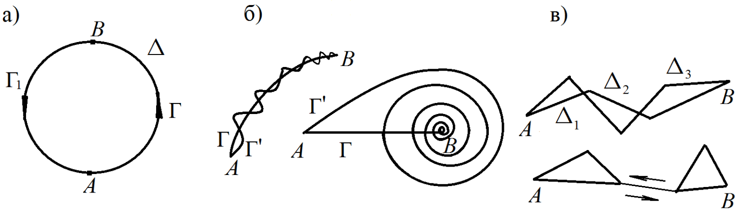


Рис. 18.9.

Самая удобная формулировка теоремы о независимости интеграла от пути следующая:

Условие полного дифференциала. *Дифференциальная форма есть полный дифференциал некоторой однозначной функции тогда и только тогда, когда для любого простого, замкнутого, кусочно-гладкого контура криволинейный интеграл обращается в нуль.*

Но вообще-то это условие неэффективно (в силу присутствия квантора $\forall$). Хотелось бы узнавать независимость от пути по функциям P, Q. Как мы знаем, условие $\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$ необходимо для того, чтобы форма $Pdx + Qdy$ была полным дифференциалом. Но это условие локально, т.е. если $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ всюду в области D, то можно утверждать, что в окрестности каждой точки области существует функция U такая, что $dU = Pdx + Qdy$ в этой окрестности. Но можно ли определить функцию U, для которой $dU = Pdx + Qdy$ во всей области D, зависит от области. Поэтому данное условие не может быть достаточным. (Глобально возможно возникновение периодов ω при обходе контура)[9]. Определим теперь области, в которых условие $\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$ является не только необходимым, но и достаточным для того, чтобы форма $Pdx + Qdy$ была полным дифференциалом.

Как мы знаем, простой замкнутый контур делит плоскость на две части, общей границей которых он является: ограниченную и неограниченную. Ограниченная часть называется *внутренней частью* или *внутренностью* контура, и неограниченная – *внешней частью* или *внешностью* контура.

Определение. Плоская область называется *односвязной*, если внутренность любого простого замкнутого контура, принадлежащего области, тоже лежит в области.

Грубо говоря, односвязная область – это область "без дырок". Можно дать другое определение односвязной области: любой контур в этой области можно стянуть в точку, не выходя за пределы области. Пусть $\Gamma_0 = M_0$ – произвольная точка в области, а $\Gamma_1 = \Gamma$ – произвольная кривая, лежащая в области и содержащая в своей внутренности M_0. Тогда можно построить однопараметрическое семейство контуров $\Gamma_t \subset D$, где $0 \le t \le 1$, непрерывно зависящее от t.

Пусть D – область, K – ее граница. Как сформулировать условие односвязности области D через границу? Какой должна быть граница области D, чтобы область была односвязной?

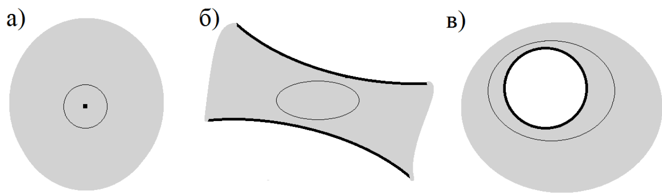


Рис. 18.10.

Рассмотрим

[9] Это видно и из примера на с. 532. (Ред.)

Примеры. 1 (рис. 18.10 а). D – плоскость с одной выколотой точкой (граница есть точка); не является односвязной.
2 (рис. 18.10 б). Область односвязная, а граница несвязная.
3 (рис. 18.10 в). D – плоскость с выброшенной внутренностью круга. Здесь граница области состоит из одной кривой, а область не является односвязной.

Область на плоскости односвязна, если ее граница есть простой замкнутый контур, и область представляет собой внутренность этого замкнутого контура. Из того, что граница области есть простой замкнутый контур, еще не следует, что область односвязна.

Открытое множество может быть односвязно, но не связно, и, наоборот, связно, но не односвязно. Идея разреза состоит в том, чтобы $D' = D \backslash \Delta$ стало односвязной областью (рис. 18.11 а).

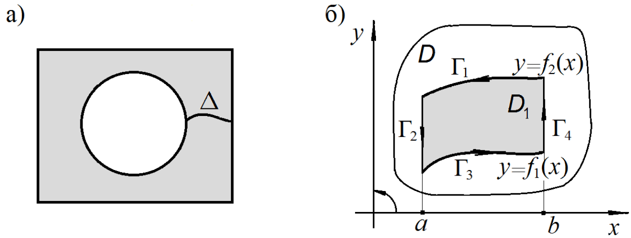


Рис. 18.11.

§ 87. Формула Грина

Пусть ориентация контура согласована с ориентацией плоскости. Это означает следующее. Если мы рассматриваем правую систему координат xOy, то положительным считается поворот от первой оси Ox ко второй Oy (на наименьший угол), который совершается против часовой стрелки. Соответственно обход простого контура на этой плоскости считается положительным, если он совершается против часовой стрелки. При таком обходе контура ближайшая к наблюдателю часть области находится слева от наблюдателя. Для левой системы координат положительный обход контура совершается по часовой стрелке. В формулах для интегралов второго рода по замкнутому контуру $\oint\limits_{\Gamma} P\,dx$ будем считать, что ориентация контура и плоскости согласованы, т.е. что

берется положительное направление обхода контура.
Первый частный случай. *Пусть* $\Gamma \subset D \subset E^2$, D *– область,* Γ *– простой замкнутый контур, ограничивающий криволинейную трапецию* $D_1 = \{(x,y) : a \le x \le b,\ f_1(x) \le y \le f_2(x)\} \subset D$. *Пусть* $P(x,y)$ *– непрерывная функция в* D, $\frac{\partial P}{\partial y} \in C(D)$. *Тогда справедлива формула* $\iint\limits_{D_1} \frac{\partial P}{\partial y}\, dxdy = -\oint\limits_{\Gamma} P\, dx$.

Обозначим $\Gamma = \bigcup\limits_{i=1}^{4} \Gamma_i$, где Γ_1, Γ_3 – верхняя и нижняя, Γ_2, Γ_4 – левая и правая границы области D_1 (см. рис. 18.11 б). Вычислим интеграл в левой части формулы:

$$\iint\limits_{D_1} \frac{\partial P}{\partial y}\, dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{f_1(x)}^{f_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy = \int\limits_a^b \{P(x, f_2(x)) - P(x, f_1(x))\}\ dx =$$

$$= -\int\limits_{\Gamma_1} P(x,y)\ dx - \int\limits_{\Gamma_3} P(x,y)\ dx - \int\limits_{\Gamma_2} P(x,y)\ dx - \int\limits_{\Gamma_4} P(x,y)\ dx =$$

$$= -\oint\limits_{\Gamma} P(x,y)\ dx\,,$$

так как $\int\limits_{\Gamma_2} P(x,y)\ dx = 0$, $\int\limits_{\Gamma_4} P(x,y)\ dx = 0$.
Аналогично доказывается [10)]
Второй частный случай. *Пусть* $\Gamma \subset D \subset E^2$, D *– область,* Γ *– простой замкнутый контур, ограничивающий криволинейную трапецию* $D_2 = \{(x,y) : c \le x \le d,\ f_1(y) \le x \le f_2(y)\} \subset D$. *Пусть* $Q(x,y)$ *– непрерывная функция в* D, $\frac{\partial Q}{\partial x} \in C(D)$. *Тогда справедлива формула* $\iint\limits_{D_2} \frac{\partial Q}{\partial x}\, dxdy = \oint\limits_{\Gamma} Q\, dy$.

Таким образом, формула Грина

$$\oint\limits_{\Gamma} P\, dx + Q\, dy = \iint\limits_{D_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\, dxdy$$

справедлива для областей $D_1 \subset D$, удовлетворяющих одновременно и первому и второму случаю. В частности, D_1 может быть треугольником (замкнутым).

Теперь можно доказать формулу Грина для любой односвязной области, ограниченной простой гладкой кривой.
Теорема Грина (формула Грина). *Пусть* $D \subset E^2$, $\Gamma \subset D$, Γ *– простой замкнутый кусочно-гладкий контур, ограничива-*

[10)] Если мы второй случай попытаемся свести к первому, то у нас будет все то же, но в левой системе координат yOx. Поэтому обход контура станет отрицательным, и, значит, формула будет отличаться знаком, т.е. вместо минуса в правой части будет плюс. (Ред.)

ющий область $D_1 \subset D$, D_1 односвязна. Пусть в D заданы непрерывные функции P и Q, такие, что $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x} \in C(D)$. Тогда справедлива формула Грина

$$\oint\limits_{\Gamma} P\,dx + Q\,dy = \iint\limits_{D_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy\,.$$

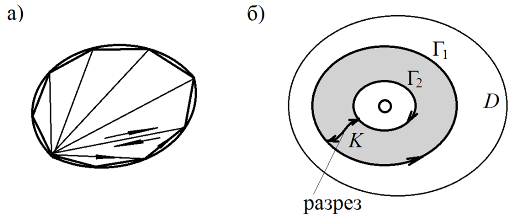


Рис. 18.12.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Аппроксимируем контур Γ простой замкнутой ломаной Γ_n (рис. 18.12 а), ограничивающей многоугольник D_n, $D_n \subset D$. Разобьем многоугольник D_n на треугольники Δ_k: $D_n = \bigcup\limits_{k=1}^{n} \Delta_k$. К каждому треугольнику Δ_k применим формулу Грина. Затем формулы сложим. Добавочные стороны треугольников, которые не входят в Γ_n, проходятся в двух противоположных направлениях, и поэтому интеграл по ним равен нулю. Таким образом,

$$\oint\limits_{\Gamma_n} P\,dx + Q\,dy = \iint\limits_{D_n} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy\,.$$

Теперь устремим $n \to \infty$. ▶

4 семестр
Лекция 14
(28.03.69)

При доказательстве формулы Грина было несколько ограничительных предположений.

1. Область $D_1 \subset D$ предполагалась односвязной. Пусть теперь D_1 неодносвязная.

Для того, чтобы теорема Грина была применима, мы должны предположить, что $D_1 \subset D$ и ее граница Γ состоит из конечного числа кусочно-гладких контуров, т. е. $\Gamma = \bigcup\limits_{k=1}^{n} \Gamma_k$ (на рисунке 18.12 б) есть два таких контура). Но слева, естественно, будет стоять уже интеграл по сложному контуру, причем для согласования надо, чтобы при обходе каждого из контуров область интегрирования оставалась слева. Для доказательства надо сделать такое количество разрезов K_i, чтобы область D_2, получившаяся из D_1 за вычетом этих разрезов $K = \bigcup\limits_{i=1} K_i$, стала односвязной (на рисунке 18.12 б) один разрез K). Тогда по формуле Грина $\iint\limits_{D_2} = \int\limits_{\Gamma \bigcup K} = \int\limits_{\Gamma} + \int\limits_{K} = \int\limits_{\Gamma}$. Интегрирование по разрезу проводится дважды, любой разрез проходится и с "левого берега" и с "правого берега так что интегралы по разрезам взаимно уничтожаются.

Значит, формулу Грина можно обобщить на случай $D_1 \subset D$, где D_1 ограничивается конечным числом кусочно-гладких контуров.

2. Предположим, что область D ограничена и ее граница Γ состоит из конечного числа кусочно-гладких кривых. Предположим также, что функции P, Q, $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ непрерывны не только в области D, но и в ее замыкании $\overline{D}$. Обозначим $K = D \bigcup \Gamma$. Повторяя доказательство формулы Грина, можно ее доказать для односвязной области D с границей Γ. Иначе это можно доказать, аппроксимируя область D изнутри областями $\{D_n\}$, ограниченными кусочно-гладкими контурами $\{\Gamma_n\}$, гладко сходящимися к Γ. Для неодносвязной области, ограниченной конечным числом кусочно-гладких кривых, доказательство выполняется как в п.1. Значит, имеет место следующее

Обобщение формулы Грина. *Пусть область* $D \subset E^2$ *ограничена контуром* Γ, *являющимся объединением конечного числа кусочно-гладких кривых. Пусть функции* P, Q, $\frac{\partial P}{\partial y}$ *и* $\frac{\partial Q}{\partial x}$ *определены и непрерывны в* $K = D \bigcup \Gamma$ – *замыкании области* D. *Тогда*

$$\oint\limits_{\Gamma} P\,dx + Q\,dy = \iint\limits_{K} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

(*для положительного обхода контура*).

Рассмотрим некоторые приложения формулы Грина.

1. Вычисление площади. Пусть функции P и Q таковы, что $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$ для любой точки $M \in D$ и все остальные условия теоремы выполнены. Применяя формулу Грина, получаем в этом случае площадь области: $\oint\limits_{\Gamma} P\,dx + Q\,dy = \iint\limits_{D_1} dxdy = S(D_1)$.

Значит, формула Грина позволяет найти площадь плоской области. Чтобы это сделать, надо выбрать P и Q соответствующим образом; вот некоторые примеры такого выбора:

а) $Q(x,y) = x$, $P(x,y) \equiv 0$;

б) $P(x,y) = -y$, $Q(x,y) \equiv 0$;

в) $P(x,y) = -\frac{1}{2}y$, $Q(x,y) = \frac{1}{2}x$.

Например, в случае в) имеем: $S(D_1) = \frac{1}{2}\oint\limits_{\Gamma} x\,dy - y\,dx$.

2. Приложение к теории полного дифференциала. Пусть $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$ для любой точки $M \in D$. В этом случае по формуле Грина получим $\oint\limits_{\Gamma} P\,dx + Q\,dy = 0$ по любой кусочно-гладкой кривой Γ , ограничивающей односвязную область $D_1 \subset D$. По условию полного дифференциала (с. 526) получаем $P\,dx + Q\,dy = dU$, т. е. условие $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$ является достаточными для того, чтобы дифференциальная форма $P\,dx + Q\,dy$ была полным дифференциалом некоторой однозначной функции U . С помощью формулы Грина также легко доказать необходимость. Действительно, если в некоторой точке M_0 выражение $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \neq 0$, пусть, для определенности, $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} > 0$, то это условие, в силу непрерывности, выполняется и в некоторой окрестности точки M_0 . Возьмем круг с центром в этой точке, в котором $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} > 0$. Интеграл по кругу положителен, следовательно, по формуле Грина и интеграл по ограничивающей окружности положителен. Но это противоречит условию полного дифференциала. Следовательно, $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ всюду в области D .

Таким образом мы получаем

Критерий полного дифференциала. *Пусть P и Q определены и непрерывны в односвязной области $D \subset E^2$ и имеют в D непрерывные частные производные $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$. Тогда для того, чтобы дифференциальная форма $Pdx + Qdy$ была полным дифференциалом, необходимо и достаточно, чтобы* $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$.

Из этого критерия и теоремы о независимости интеграла от пути следует, что в односвязной области условие $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ необходимо и достаточно для независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования.

Приведем пример, показывающий, что односвязность здесь по существу.

Пример. Возьмем функции $P = -\frac{y}{x^2+y^2}$, $Q = \frac{x}{x^2+y^2}$.[11] В об-

[11] Эти функции уже рассматривались в сноске на с. 524, где приводился

ласти $D = E^2 \setminus (0,0)$ эти функции непрерывны и имеют частные производные. Непосредственное вычисление показывает, что $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ всюду в D. Значит, везде в D выполнены условия теоремы Грина. Если возьмем любой контур, не содержащий точку $(0,0)$ внутри себя (рис. 18.13 а), то получим по теореме Грина $\oint\limits_{\Gamma} \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2} = 0$. Если возьмем в качестве контура единичную окружность с центром в начале координат (рис. 18.13 б), то полагая $x = \cos\varphi$, $y = \sin\varphi$, получим $\int\limits_{x^2+y^2=1} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi$. Для произвольного замкнутого контура, содержащего во внутренности начало координат и проходимого в положительном направлении, получим с помощью этой формулы и формулы Грина, что интеграл по такому контуру тоже равен 2π.

Мы рассматриваем интегралы по таким контурам, вдоль которых функции и их соответствующие производные непрерывны, и этот вопрос полностью рассмотрен. Но в данном случае можно указать значение интеграла и по некоторым контурам, проходящим через начало координат.[12] Например, интеграл по контуру полукруга с центром в начале координат равен π, по контуру трети этого круга равен $\frac{2\pi}{3}$. Здесь и дальше рассматривается положительный обход контуров. Если для контура точка $(0,0)$ является угловой (рис. 18.13 в), и угол между односторонними касательными к контуру в этой точке равен α, то и интеграл вдоль этого контура равен α. Но это уже будут несобственные интегралы.

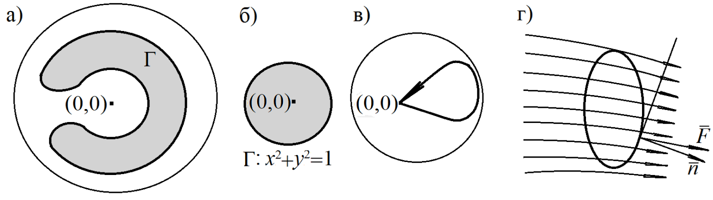


Рис. 18.13.

3. Механические приложения. Задание функций P, Q в об-

пример многозначной функции $\int\limits_{\smile AB} P\,dx + Q\,dy = U(B)$. (Ред.)

[12] См. интеграл Гаусса в [28] т. 3 п. 563 с. 64. (Ред.)

ласти D на плоскости или функций P, Q, R в области D в пространстве можно рассматривать как задание вектор-функции $\overline{A} = (P, Q)$ или $\overline{A} = (P, Q, R)$ в области D. Говорят также, что в области D задано *векторное поле* $\overline{A}$. Поэтому интеграл $\int\limits_{\Gamma} P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ можно интерпретировать как характеристику векторного поля.

Пусть $\overline{A}$ – силовое поле. Тогда работа векторного поля $\overline{A}$ по перемещению материальной точки из положения M_0 в M_1 вдоль кривой Γ выразится интегралом $a = \int\limits_{\Gamma} P\,dx + Q\,dy$, где элементарная работа $da = \left(\overline{A}, \overline{t}\right) = P\,dx + Q\,dy$, а $\overline{t}$ – вектор касательной к контуру. Аналогично находится работа вдоль пространственного контура. В случае замкнутого контура Δ эта работа будет $a = \oint\limits_{\Delta} P\,dx + Q\,dy$.

Интеграл $\gamma(\Delta) = \oint\limits_{\Delta} P\,dx + Q\,dy = \oint\limits_{\Delta} \left(\overline{A}, \overline{t}\right) dl$ называется *циркуляцией* векторного поля $\overline{A}$ вдоль замкнутой кривой Δ.

Если $P\,dx + Q\,dy = dU$ – полный дифференциал, то векторное поле $\overline{A} = (P, Q)$ называется *потенциальным.* В этом случае $P = \frac{\partial U}{\partial x}$ и $Q = \frac{\partial U}{\partial y}$. Тогда работа по любому контуру не зависит от пути, а зависит от начальной и конечной точки этого пути, а циркуляция по замкнутому контуру равна нулю (для односвязной области D).

Пример. Пусть есть плоский поток жидкости с направлением движения $\overline{F}$ (рис. 18.13 г). Мы хотим узнать, какое количество жидкости протекает через контур Δ в определенную сторону [13]. Пусть $\overline{n}$ – нормаль к контуру Δ, составляющая угол $\frac{\pi}{2}$ с направлением касательной контура, соответствующей выбранному на контуре направлению. Тогда баланс жидкости, протекающей через контур, будет $\int\limits_{\Delta} \left(\overline{F}, \overline{n}\right) ds$.

[13] См. в [28] т. 3 п. 554 с. 41 – 43 задачу о плоском установившемся течении несжимаемой жидкости. (Ред.)

§ 88. Поверхностные интегралы второго рода

88.1. Кусочно-гладкая ориентированная поверхность

Мы уже встречались с понятиями поверхности и ее площади (§ 83). Дадим некоторое упрощение понятия кусочно-гладкой ориентированной поверхности "наивными словами, если кто хочет более серьезно почитать, как эти слова надо произносить правильно, есть книжка Спивака "Математический анализ на многообразиях" [22]". (С. Б. С.) Определим понятие *простого куска*

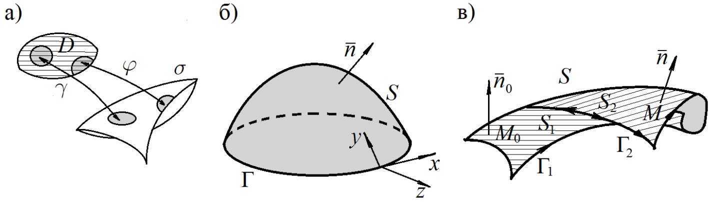


Рис. 18.14.

гладкой поверхности. Пусть на плоскости параметров (u, v) есть множество D, представляющее собой область на плоскости, ограниченную кусочно-гладким контуром γ. Мы рассматриваем взаимно однозначное, взаимно непрерывное и в обе стороны дифференцируемое отображение φ из D в E^3, $\varphi: (u, v) \overset{\varphi}{\leftrightarrow} \sigma \subset E^3$. Образ σ этого отображения в E^3 и есть *простой кусок гладкой поверхности* (рис. 18.14 а).

Точки на простом куске поверхности бывают двух видов:

1) точки, имеющие окрестность, подобную кругу. Т. е. имеющие окрестность, являющуюся образом круга, содержащегося в D, при отображении φ. Говорят, что такая окрестность диффеоморфна кругу;

2) точки, имеющие окрестности, подобные полукругу. Они являются образами точек границы области D.

Точки второго вида образуют край простого куска поверхности.

Определение кусочно-гладкой поверхности S. Множество S называется *кусочно-гладкой поверхностью*, если для него выполняются следующие свойства:

1. На S все точки имеют окрестности подобные (диффеоморфные) кружкам или окрестности подобные полукружкам.

2. S можно представить в виде объединения конечного числа простых кусков, ограниченных кусочно-гладкими кривыми и пересекающихся только по краям.

Это определение эквивалентно определению *компактных дифференцируемых многообразий с краем.*

Лист Мебиуса входит в число простых поверхностей.

Простые гладкие поверхности могут быть ориентируемые и неориентируемые.

Согласование ориентации поверхности с ориентацией ее контура зависит от ориентации пространства. Мы рассматриваем все уже в ориентированном пространстве E^3 (т. е. в пространстве, в котором выбрана левая или правая система координат).

"Какие от этого радости?" В ориентированном пространстве можно ввести векторное произведение $c = a \times b$. Это первая "польза". Вторая "польза" состоит в том, что в ориентированном пространстве можно согласовать ориентацию контура с ориентацией поверхности: края Γ с поверхностью S (Γ есть *край*, а не граница поверхности S). Будем согласовывать направление нормали с направлением обхода таким образом: направим ось Ox по касательной к Γ в направлении движения по Γ; Oy в касательной плоскости к поверхности по направлению к S, тогда ось Oz покажет направление нормали к поверхности. Если есть направление в одной точке поверхности, мы можем перенести его в любую другую точку поверхности (рис. 18.14 б).

4 семестр
Лекция 15
(02.04.69)

Свойство непрерывности нормали существенно используется в определении ориентации гладкой поверхности, т. е. в выборе стороны поверхности. Если бы на поверхности были такие линии, в которых нормаль терпит разрыв, то выбор направления нормали был бы бессодержателен (т. е. определить направление нормали в точках разрыва невозможно, в том числе в том определении по непрерывности, которое было дано).

В определении криволинейного интеграла нам мало было понятия гладкой кривой. Нам надо было ввести понятие кусочно-гладкой кривой. Аналогично, понятие гладкой поверхности мы расширяем в двух направлениях:

1. Чтобы край был не гладкий, а кусочно-гладкий.

2. Чтобы нормаль была непрерывна не всюду, а за исключением конечного числа кусочно-гладких кривых.

Таким образом, кусочно-гладкая поверхность (рис. 18.14 в) склеена из кусков образов квадратов и по ребру склейки нормаль может терпеть разрывы.

Определение ориентации для кусочно-гладкой поверхности. Для *ориентации кусочно-гладкой поверхности*, состоящей из простых кусков гладкой поверхности S_k ($k = 1, 2, ..., n$) прежде всего мы зададим нормаль в некоторой точке одного из кусков, например, куска S_1. Направление этой нормали определяет направление обхода контура куска (так как мы находимся в ориентированном пространстве E^3_+). Направление обхода (ориентация) на контуре не требует, чтобы он был гладким, он может быть и кусочно-гладким. Рассмотрим тот кусок контура, который отделяет кусок S_1 от соседнего куска S_2. Введем ориентацию на S_2 следующим образом. На общей части контуров Γ_1 и Γ_2 на Γ_2 примем ориентацию противоположную ориентации на Γ_1. Тогда на Γ_2 возникает ориентация, и теперь уже можно определить направление нормали в S_2, соответствующее данной ориентации Γ_2. Таким образом мы можем определить нормаль на всей поверхности S, за исключением ребер склейки кусков S_k. Если при этом, на всех общих частях контуров кусков S_k поверхности, направление обхода можно выбрать противоположным, то кусочно-гладкая поверхность S называется *ориентируемой*.

Если такого сделать нельзя, то поверхность называется *неориентируемой или односторонней*. Пример такой поверхности дает лист Мебиуса. Ориентируемая поверхность называется также двусторонней, т.к. можно выбрать и противоположное направление нормалей, т.е. другую сторону поверхности.

Теперь мы можем рассмотреть кусочно-гладкую поверхность в пространстве.

88.2. Определение поверхностного интеграла второго рода

Класс поверхностей, для которых определяется поверхностный интеграл второго рода – класс кусочно-гладких ориентированных поверхностей.

Пусть S – простой кусок гладкой поверхности, который определяется через параметры $(u, v) \in D$. Тогда площадь этой поверхности $\sigma(S) = \iint\limits_D \sqrt{A^2+B^2+C^2}\,dudv$ (см. § 83 с. 501).

Пусть S – кусочно-гладкая ориентированная поверхность, которая состоит из простых гладких кусков $S_1, ..., S_k$, каждый из которых определен в соответствующей области изменения параметров $D_1, ..., D_k$. Тогда площадь поверхности $\sigma(S)$ есть сумма площадей этих кусков. Интегрирование ведется по области изменения параметров каждого куска отдельно (рис. 18.15 а).

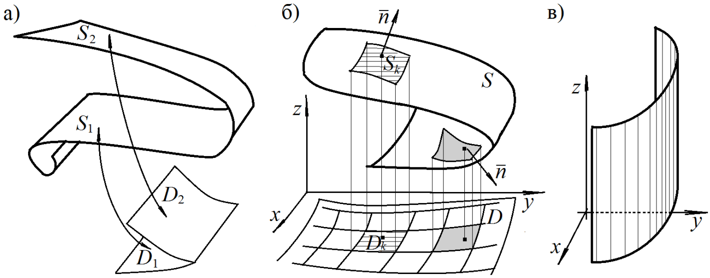


Рис. 18.15.

Пусть гладкая поверхность S задана явным образом с помощью функции $z = f(x,y)$, $(x,y) \in D$, и на поверхности задана функция $F(x,y,z)$, $(x,y,z) \in S$. Выберем для определенности верхнюю сторону поверхности и соответствующее ей направление нормалей $\overline{n} = (\cos\lambda, \cos\mu, \cos\nu)$ (рис. 18.15 б). Рассмотрим разбиение T_S поверхности S кусочно-гладкими кривыми на кусочки S_k. Обозначим D_k проекцию кусочка S_k на плоскость xOy. Разбиение поверхности T_S порождает, таким образом, разбиение T_D области D на части D_k. Мера D_k равна $\sigma(S_k)\cos\widetilde{\nu}_k$, где $\sigma(S_k)$ – площадь кусочка S_k, а $\widetilde{\nu}_k$ – угол между осью Oz и направлением нормали в некоторой точке поверхности S_k. Выберем в каждой части S_k точку $M_k(x_k, y_k, z_k)$ и составим интегральную сумму следующим образом:

$$\sum_{k=1}^{n} F(x_k, y_k, z_k)\,\sigma(S_k)\cos\nu_k\,.$$

Здесь $F(x_k, y_k, z_k)$ – значение функции F в точке M_k кусочка S_k, а ν_k – угол между осью Oz и направлением нормали в точке M_k поверхности S_k. При этом величины $mD_k = \sigma(S_k)\cos\widetilde{\nu}_k$ и $\sigma(S_k)\cos\nu_k$ равномерно близки, если диаметр разбиения T_S мал. Предел интегральных сумм при диаметре разбиения $d(T_S) \to 0$

(если этот предел существует и не зависит от выбора точек M_k) называется *поверхностным интегралом второго рода от функции F по поверхности S*:

$$\lim_{d(T_S)\to 0}\sum_{k=1}^{n} F\left(x_k, y_k, z_k\right)\sigma\left(S_k\right)\cos\nu_k = \iint_S F\left(x, y, z\right)\,dxdy\,.$$

Но, как мы знаем, предел слева есть поверхностный интеграл первого рода от функции $F\cos\nu$ по поверхности S. Таким образом получается следующая формула связи между поверхностными интегралами первого и второго рода

$$\iint_S F\left(x, y, z\right)\cos\nu\,dS = \iint_S F\left(x, y, z\right)\,dxdy\,.$$

В обозначении интеграла второго рода не видно, по какой стороне поверхности он берется и это надо указывать дополнительно, а в обозначении интеграла слева сторону поверхности показывает направляющий косинус нормали. Зато мера в интеграле второго рода обычная двумерная мера, а не dS. Вопрос существования поверхностного интеграла второго рода сводится к вопросу существования равного ему интеграла первого рода. Для ограниченной функции F пределы интегральных сумм $\sum_{k=1}^{n} F\left(x_k, y_k, z_k\right)\sigma\left(S_k\right)\cos\nu_k$ и $\sum_{k=1}^{n} F\left(x_k, y_k, z_k\right) mD_k$ совпадают и, когда взята верхняя сторона поверхности, то

$$\iint_S F\left(x, y, z\right)\,dxdy = \lim_{d(T_S)\to 0}\sum_{k=1}^{n} F\left(x_k, y_k, z_k\right)\sigma\left(S_k\right)\cos\nu_k =$$

$$= \lim_{d(T_D)\to 0}\sum_{k=1}^{n} F\left(x_k, y_k, z_k\right) mD_k = \iint_D F\left(x, y, z(x,y)\right)\,dxdy\,.$$

В случае нижней стороны поверхности во второй строчке, перед последними интегральной суммой и интегралом, будет знак минус.

Если у нас есть более общая поверхность S, то мы можем поступить так же: мы проектируем ее на плоскость (x, y) и составляем интегральную сумму. При этом кусочки, нормали в которых направлены вверх, будут иметь положительные проекции на плоскость (x, y), а кусочки, нормали в которых направлены вниз – отрицательные.

Так же как и в случае криволинейного интеграла поверхностный интеграл можно распространить на замкнутые поверхности и тогда он обозначается $\oiint_S F\left(x, y, z\right)\,dxdy$. Когда интегрирование ведется по замкнутой поверхности, например по сфере, сторона поверхности, по которой ведется интегрирование, должна быть оговорена (определена) заранее.

Если $\cos\nu = 0$ на поверхности S, т. е. нормаль перпендикулярна оси Oz (рис. 18.15 в), то $\iint\limits_S F\,dxdy = 0$.

Наряду с интегралом по $dxdy$ можно ввести интегралы по $dydz$ и $dzdx$, делая круговую подстановку координат. Общий поверхностный интеграл второго рода будет иметь вид

$$\iint\limits_S Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iint\limits_S (P\cos\lambda+Q\cos\mu+R\cos\nu)\,dS\,.$$

Если поверхность задана параметрически, то мы можем выразить направляющие косинусы нормали через параметры (см. § 83 с. 501)

$$\cos\lambda=\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\ \cos\mu=\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\ \cos\nu=\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Выбрав определенную сторону поверхности мы установим на ней определенную ориентацию. Для определенности положим, что при прохождении границы области D в положительном направлении контур, ограничивающий поверхность S, тоже проходится в положительном направлении. В этом случае перед квадратным корнем в выражениях для направляющих косинусов выбирается знак " + " и, так как элемент площади $dS = \sqrt{A^2 + B^2+ C^2}dudv$, мы получим

$$\iint\limits_S P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy = \iint\limits_D (AP + BQ + CR)\;dudv\,.$$

88.3. Формула Стокса

Формула Стокса и по существу и формально является обобщением формулы Грина $\oint\limits_\Gamma P\,dx + Q\,dy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$ для трехмерного случая.

Теорема Стокса. *Пусть в 3-х мерном ориентированном пространстве E^3 имеется область $V \subset E^3$ и в этой области заданы три функции $P,\ Q,\ R \in C^1(V)$. Допустим, что в области V задана ориентированная кусочно-гладкая поверхность $S \subset V$, $S \in C^2(D)$, с краем Γ, являющимся кусочно-гладкой кривой, при этом ориентации контура Γ и поверхности согласованы. Тогда имеет место формула Стокса*

$$\oint\limits_\Gamma Pdx + Qdy + Rdz =$$

$$= \iint\limits_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dzdx$$

(формула получена циклической перестановкой букв P, Q, R и x, y, z в формуле Грина).

Доказательство. Достаточно доказать формулу отдельно для каждой из функций P, Q, R. Соберем все части формулы, которые имеют отношение к функции P:

$$\oint\limits_\Gamma P\,dx = \iint\limits_S \left(\frac{\partial P}{\partial z}\,dzdx - \frac{\partial P}{\partial y}dxdy\right),$$

и докажем эту элементарную формулу Стокса.

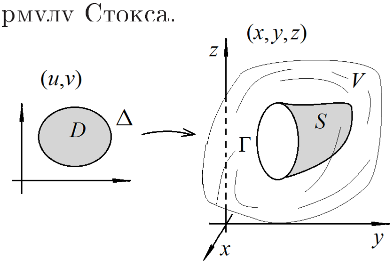


Рис. 18.16.

Поверхность S может быть разбита на конечное число простых кусков. Поэтому достаточно доказать формулу для случая, когда S – простой кусок поверхности. Пусть S задается с помощью параметров $(u,v) \in D$, где D – область, ограниченная кусочно-гладким контуром Δ, и пусть ориентации контура Γ и поверхности S согласованы. Для определенности будем считать, что положительное направление на Δ соответствует положительному направлению на Γ.

Чтобы от криволинейного интеграла второго рода по кривой Γ прийти к поверхностному интегралу второго рода по поверхности S, мы сделаем ряд последовательных преобразований: $\int\limits_\Gamma \to \int\limits_\alpha^\beta \to \int\limits_\Delta \to \iint\limits_D \to \iint\limits_S$, от интеграла по Γ к обычному определенному интегралу, от него к интегралу по плоскому контуру Δ, затем к двойному интегралу по области D, и наконец, к поверхностному интегралу по S. Поверхность S определяется уравнениями S: $\left.\begin{array}{c} x = x\,(u,v) \\ y = y\,(u,v) \\ z = z\,(u,v) \end{array}\right\}$, $\quad (u,v) \in D$.

Граница Δ области D может быть задана параметрически: $u = u(t)$, $v = v(t)$, $\alpha \le t \le \beta$. Тогда уравнение контура Γ будет $\left\{\begin{array}{l} x = x\,(u(t),v(t)) \\ y = y\,(u(t),v(t)) \\ z = z\,(u(t),v(t)) \end{array}\right.$. Вычислим теперь криволинейный интеграл $\oint\limits_\Gamma Pdx$. По правилу сведения криволинейного интеграла от функции $P = P(x,y,z)$ к интегралу по параметру

$$\oint\limits_\Gamma P\,dx = \int\limits_\alpha^\beta P\tfrac{dx}{dt}\,dt = \int\limits_\alpha^\beta P\left(\tfrac{\partial x}{\partial u}\tfrac{du}{dt} + \tfrac{\partial x}{\partial v}\tfrac{dv}{dt}\right)dt\,,$$

где $P = P\,(x,y,z)$. Последний интеграл можно рассмотреть как криволинейный интеграл по границе Δ области D

$$\int\limits_\alpha^\beta P\left(\tfrac{\partial x}{\partial u}\tfrac{du}{dt} + \tfrac{\partial x}{\partial v}\tfrac{dv}{dt}\right)Pdt = \int\limits_\Delta \left(P\tfrac{\partial x}{\partial u}\,du + P\tfrac{\partial x}{\partial v}\,dv\right).$$

К получившемуся криволинейному интегралу по плоской кривой уже можно применить формулу Грина:

$$\int\limits_\Delta P\tfrac{\partial x}{\partial u}\,du + P\tfrac{\partial x}{\partial v}\,dv = \iint\limits_D \left\{\tfrac{\partial}{\partial u}\left(P\tfrac{\partial x}{\partial v}\right) - \tfrac{\partial}{\partial v}\left(P\tfrac{\partial x}{\partial u}\right)\right\}dudv\,.$$

4 семестр
Лекция 16
(09.04.69)

Итак, мы получили равенство

$$\oint\limits_\Gamma P\,dx = \iint\limits_D \left\{\tfrac{\partial}{\partial u}\left(P\tfrac{\partial x}{\partial v}\right) - \tfrac{\partial}{\partial v}\left(P\tfrac{\partial x}{\partial u}\right)\right\}dudv\,.$$

Теперь, по формулам дифференцирования сложной функции получим

$$\tfrac{\partial}{\partial u}\left(P\tfrac{\partial x}{\partial v}\right) - \tfrac{\partial}{\partial v}\left(P\tfrac{\partial x}{\partial u}\right) = \left(\tfrac{\partial P}{\partial x}\tfrac{\partial x}{\partial u} + \tfrac{\partial P}{\partial y}\tfrac{\partial y}{\partial u} + \tfrac{\partial P}{\partial z}\tfrac{\partial z}{\partial u}\right)\tfrac{\partial x}{\partial v} +$$
$$+P\tfrac{\partial^2 x}{\partial u\partial v} - \left(\tfrac{\partial P}{\partial x}\tfrac{\partial x}{\partial v} + \tfrac{\partial P}{\partial y}\tfrac{\partial y}{\partial v} + \tfrac{\partial P}{\partial z}\tfrac{\partial z}{\partial v}\right)\tfrac{\partial x}{\partial u} - P\tfrac{\partial^2 x}{\partial v\partial u} =$$

(и далее, сокращая подобные члены и учитывая, что $\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v} = \frac{\partial^2 x}{\partial v\partial u}$, так как $x(u,v) \in C^2(D)$)

$$= \tfrac{\partial P}{\partial y}\left\{\tfrac{\partial x}{\partial v}\tfrac{\partial y}{\partial u} - \tfrac{\partial x}{\partial u}\tfrac{\partial y}{\partial v}\right\} + \tfrac{\partial P}{\partial z}\left\{\tfrac{\partial x}{\partial v}\tfrac{\partial z}{\partial u} - \tfrac{\partial x}{\partial u}\tfrac{\partial z}{\partial v}\right\}.$$

Отсюда следует, что

$$\oint\limits_\Gamma P\,dx = \iint\limits_D \left\{\tfrac{\partial P}{\partial z}\underbrace{\left(\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}\right)}_{B} - \tfrac{\partial P}{\partial y}\underbrace{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right)}_{C}\right\}dudv\,,$$

или

$$\oint\limits_\Gamma P\,dx = \iint\limits_D \left\{\tfrac{\partial P}{\partial z}B - \tfrac{\partial P}{\partial y}C\right\}dudv\,.$$

Переписывая последний интеграл как поверхностный второго рода, получим в наших условиях

$$\oint\limits_{\Gamma} P\,dx = \iint\limits_{S}\left(\frac{\partial P}{\partial z}\,dzdx - \frac{\partial P}{\partial y}\,dxdy\right).$$

Простейшая формула Стокса доказана. Соединяя формулы для P, Q, R, окончательно получаем формулу Стокса. ►

Замечания. 1. Условие $S \in C^2(D)$ понадобилось в промежуточных выкладках, в окончательном равенстве нет вторых производных. Это является характерным признаком того, что на самом деле теорема верна при более общих условиях. Действительно, можно показать, что теорема Стокса справедлива при условии $x, y, z \in C^1(D)$. Для доказательства надо гладко аппроксимировать S дважды дифференцируемой поверхностью.

2. Мы записали формулу Стокса в виде поверхностного интеграла второго рода. Можно переписать этот поверхностный интеграл в виде поверхностного интеграла первого рода, и формула Стокса примет вид

$$\oint\limits_{\Gamma} P\,dx + Q\,dy + R\,dz =$$
$$= \iint\limits_{S}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx =$$
$$= \iint\limits_{S}\left\{\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\lambda + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\mu + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\nu\right\}ds,$$

где $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ – направляющие косинусы вектора нормали $\overline{n}$ к выбранной стороне поверхности S.

Приложения формулы Стокса. Подобно формуле Грина в плоском случае, формула Стокса позволяет исследовать вопрос об обращении в нуль криволинейного интеграла по замкнутой пространственной кривой. Для того, чтобы применить формулу Стокса к пространственной замкнутой кривой $\Gamma \subset V$, мы должны построить двустороннюю гладкую или кусочно-гладкую поверхность $S \subset V$ такую, что S имеет своим краем кривую Γ. Есть теорема Франкля – Понтрягина, которая утверждает, что на любую замкнутую кусочно-гладкую кривую Γ в пространстве можно натянуть кусочно-гладкую двустороннюю поверхность без самопересечений. [14] Под термином "натянуть" надо понимать –

[14] С. Б. С. имеет в виду работу Ф. Франкля и Л. Понтрягина [29]. Впоследствии такая теорема была доказана Зейфертом [3] (см. [18] с. 22) для конечного объединения гладких или кусочно-гладких кривых с утвеждением, что

построить поверхность с краем Γ. Таким образом, если $V = E^3$, то теорема Стокса всегда применима. Не всегда можно натянуть "шапку но всегда можно натянуть поверхность "с ручками" (см. диаграмму кривой и фотографию модели поверхности на рис. 18.17 а) и б)).

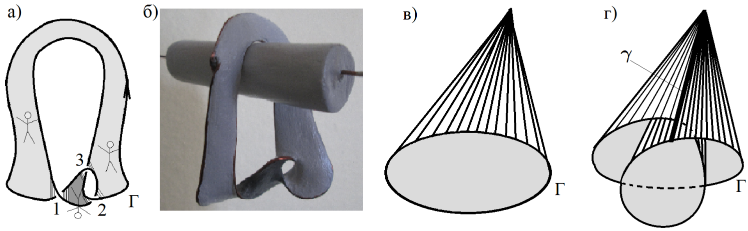


Рис. 18.17.

На замкнутую кривую можно натянуть поверхность в виде конуса с вершиной в произвольной фиксированной точке, направляющей конуса служит заданная кривая. [15] При этом поверхность может получиться с самопересечениями (как на рис. 18.17 г). В этом случае вводим дополнительные разрезы, по которым интегралы уничтожаются, так как при интегрировании разрезы проходятся дважды в противоположных направлениях. Так на рисунке 18.17 г) при дополнительном разрезе γ поверхность распадается на две конические поверхности с разрезами по образующей γ.

Мы видим, в силу формулы Стокса, что интеграл по замкнутому контуру обращается в нуль, если выполнены условия

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=0\,, \quad \frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}=0\,, \quad \frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}=0, \quad (x,y,z)\in V=E^3\,.$$

Значит, если $V = E^3$, то эти условия достаточны, чтобы криволинейный интеграл обращался в нуль, т.е. в этом случае криволинейный интеграл не зависит от пути интегрирования (см. с. 526). Необходимость этих условий мы тоже рассматривали (см. с. 523). Заметим еще, что если подынтегральная форма $Pdx+Qdy+Rdz$ является полным дифференциалом, то эти условия выражают попарные равенства шести смешанных производных. Значит, мы приходим к следующей теореме.

натянутая поверхность будет гладкой и без самопересечений. (Ред.)
[15] См., например, [8] т. 2 п. 52.6. (Ред.)

Теорема (независимость криволинейного интеграла от пути). *Пусть* $P, Q, R \in C^1\left(E^3\right)$. *Для того, чтобы криволинейный интеграл не зависел от пути интегрирования необходимо и достаточно, чтобы в* E^3 *выполнялись условия*

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0\,, \quad \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = 0\,, \quad \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = 0\,.$$

Пусть теперь функции заданы не в E^3, а в некоторой пространственной области $V \subset E^3$. Тогда может быть два подхода к решению рассмотренных здесь вопросов.

1. Простой локальный подход: пусть $M \in V$ и $O(M)$ – окрестность точки M. Спрашивается, для каких $\Gamma \subset O(M)$ криволинейный интеграл не зависит от пути? В локальном смысле никаких новых затруднений не возникает.

2. В глобальном смысле мы должны накладывать дополнительные условия, при которых выполняются условия теоремы Стокса. В связи с этим введем

Определение. Область V называется *поверхностно односвязной областью*, если на любой замкнутый кусочно-гладкий контур $\Gamma \subset V$ можно натянуть гладкую (или кусочно-гладкую) двустороннюю поверхность S, целиком лежащую в этой области.

Примеры. Шар с пузырьком внутри – поверхностно односвязная область (рис. 18.18 а). Тор не будет поверхностно односвязной областью: на "шнурок" внутри тора нельзя натянуть "пленку целиком лежащую в торе (рис. 18.18 б).

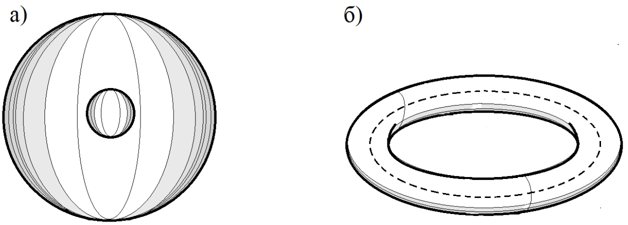


Рис. 18.18.

Появляется существенное различие между задачами локальной и глобальной. В локальном случае задача не отличается от случая $V = E^3$, в глобальном случае все хорошо, если можно применить теорему Стокса, а это можно сделать, если область поверхностно односвязна. Значит, для поверхностно односвязной области верна теорема о независимости криволинейного интеграла от пути.

88.4. Формула Остроградского

"В некоторых учебниках она, естественно, называется формулой Гаусса". (С. Б. С.)

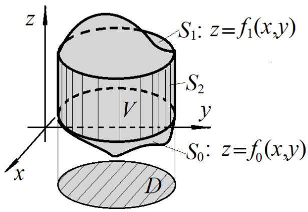


Рис. 18.19.

Речь идет о сведении интеграла по замкнутой поверхности к интегралу по объему, который ограничивается этой поверхностью. Мы уже знакомы с формулами, которые позволяют интеграл по области свести к интегралу по ее границе. Самая первая – это основная формула интегрального исчисления – формула Ньютона – Лейбница, сводящая интеграл по отрезку к разности значений первообразной в концах отрезка; затем формулы Грина и Стокса, связывающие интегралы по плоской области и по поверхности с интегралами по границе области и по краю поверхности.

Пусть поверхность S ограничивает пространственную замкнутую область V; W – открытая область, $S \subset V \subset W \subset E^3$ (W вводится, чтобы не говорить об обобщенных производных).

Теорема (формула Остроградского). *Пусть заданы функции* $P,\ Q,\ R \in C^1(W)$ *и пусть* S *– кусочно-гладкая поверхность, ограничивающая область* $V \subset W$. *Тогда справедлива формула*

$$\mathop{{\subset\!\supset}\!\!\!\!\!\!\iint}_S P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz\,,$$

где поверхностный интеграл берется по внешней стороне поверхности.

Доказательство. Начнем с рассмотрения случая, когда V – область простейшего вида, т. е. цилиндрическая по отношению к одной из осей координат. Пусть, для определенности, область V ограничена снизу поверхностью $S_0:\ z = f_0(x,y)$, $(x,y) \in D$, сверху поверхностью $S_1:\ z = f_1(x,y)$, $(x,y) \in D$, а S_2 – боковая цилиндрическая поверхность области V с образующими, параллельными оси Oz (рис. 18.19). Рассмотрим интеграл

$$\iiint\limits_V \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \iint\limits_D dxdy \int\limits_{f_0(x,y)}^{f_1(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz = \iint\limits_D \{R(x,y,f_1) - R(x,y,f_0)\}\, dxdy\,.$$

Мы получили разность двойных интегралов, к которым сводятся поверхностные интегралы второго рода. При этом первое слагаемое – интеграл от функции R по верхней стороне поверхности $S_1\ :\ \ z = f_1\,(x,y)$, а второй (со знаком минус) – интеграл от функции R по нижней стороне поверхности $S_0\ :\ z = f_0\,(x,y)$. Выбирая внешнюю сторону поверхности S, ограничивающей тело V, и учитывая, что интеграл по цилиндрической поверхности $\iint\limits_{S_2} Rdxdy = 0$, получим

$$\iiint\limits_V \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \iint\limits_{S_1} Rdxdy + \iint\limits_{S_0} Rdxdy + \underbrace{\iint\limits_{S_2} Rdxdy}_{=0} = \iint\limits_S Rdxdy\,.$$

Для функций Q и R аналогичные формулы справедливы, если взять соответствующие цилиндрические области. В частности, все три формулы справедливы, если в качестве V взять тетраэдры или многогранники (воспользоваться их разбиением на тетраэдры). Складывая три таких равенства для функций P, Q и R, получаем формулу Остроградского для областей, являющихся многогранниками. Аппроксимируя гладко область V многогранниками, можно видеть, что формула Остроградского применима для любых областей V, ограниченных кусочно-гладкими поверхностями. ►

4 семестр
Лекция 17
(11.04.69)

Замечание к формуле Стокса. Для дифференциальной формы $Pdx + Qdy$, где $P = P\,(x,y)$, $Q = Q\,(x,y)$, $(x,y) \in D \subset E^2$, существует *интегрирующий множитель* $\mu\,(x,y)$, т. е. такая дифференцируемая функция не равная нулю, что $\mu Pdx + \mu Qdy$ будет полным дифференциалом $\mu Pdx + \mu Qdy = dU$ некоторой функции U (см. с. 523). Интегрирующий множитель является решением уравнения $\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}$. В случае пространства для дифференциальной формы $Pdx+Qdy+Rdz$, где функции P, Q, R зависят от $(x,y,z) \in D \subset E^3$, не обязательно существует интегрирующий множитель. Формула Стокса дает необходимые и достаточные условия для того, чтобы выражение $\mu(Pdx+Qdy+Rdz)$ было полным дифференциалом. Если интегрирующий множитель μ существует, то он является решением системы уравнений $\frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}=\frac{\partial(\mu P)}{\partial y}$, $\frac{\partial(\mu P)}{\partial z}=\frac{\partial(\mu R)}{\partial x}$, $\frac{\partial(\mu R)}{\partial y}=\frac{\partial(\mu Q)}{\partial z}$.

Замечание к формуле Остроградского

$$\oiint\limits_S P dydz+Qdzdx+Rdxdy=\iiint\limits_V\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz\,.$$

Переходя к поверхностным интегралам первого рода, получим

$$\oiint\limits_S\{P\cos\lambda+Q\cos\mu+R\cos\nu\}\,d\sigma=\iiint\limits_V\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz\,,$$

где $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ – направляющие косинусы внешней нормали к поверхности S.

Рассмотрим некоторые приложения формулы Остроградского.

1. Выберем $P=x$, $Q=y$, $R=z$. Тогда объем $\mathcal{V}(V)$ области $V\subset E^3$

$$\mathcal{V}(V)=\frac{1}{3}\iiint\limits_V 3dxdydz=\frac{1}{3}\oiint\limits_S xdydz+ydzdx+zdxdy=$$
$$=\frac{1}{3}\oiint\limits_S(x\cos\lambda+y\cos\mu+z\cos\nu)\;d\sigma=\frac{1}{3}\oiint\limits_S r_n\,d\sigma\,,$$

где r_n – проекция радиус-вектора $\overline{r}$ поверхности S на внешнюю нормаль $\overline{n}$.

2. Пусть есть контур Γ, на него можно натянуть много "шапок т. е. поверхностей S, $S_1,\ldots$. Найдем условие того, что поверхностный интеграл не зависит от поверхности, а зависит только от края поверхности. Это эквивалентно вопросу об обращении в нуль интеграла по любой замкнутой поверхности. Для того чтобы локально интеграл по любой замкнутой поверхности обращался в нуль, необходимо и достаточно, чтобы обращалось в нуль подынтегральное выражение в формуле Остроградского, $\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=0$, где $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial y}$, $\frac{\partial R}{\partial z}\in C(D)$. А глобально придется накладывать условия на P, Q, R и на область D: $S\subset D\Rightarrow V\subset D$.

Определение. Трехмерная область D называется *пространственно односвязной*, если внутренность любой замкнутой поверхности, содержащейся в области, содержится в этой области.

Примеры. Шар с пузырьком внутри не является пространственно односвязной областью, а тор – пространственно односвязная область (рис. 18.18)[16].

С помощью формулы Остроградского доказывается

Утверждение. *Если область D пространственно односвязная, то для того, чтобы поверхностный интеграл по любой замкнутой поверхности S обращался в нуль:*

$$\oiint\limits_S \{P\cos\lambda + Q\cos\mu + R\cos\nu\}\, d\sigma = 0\,,$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \equiv 0\,,$$

при надлежащей гладкости S и функций P, Q, R.

Достаточность очевидна, а необходимость доказывается как в локальном случае, от противного. Пусть есть точка, в которой $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \neq 0$. Тогда по непрерывности найдется и окрестность, в которой $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \neq 0$ и сохраняет знак. Тогда для любой поверхности S из этой окрестности

$$\oiint\limits_S \{P\cos\lambda + Q\cos\mu + R\cos\nu\}\, d\sigma \neq 0$$

– противоречие. ▶

§ 89. Основные понятия теории поля

Скалярное поле. Мы говорим, что в области $D \subset E^3$ задано *скалярное поле*, если в области D задана скалярная функция точки $U = U(x,y,z)$, $(x,y,z) \in D$. *Поверхность уровня* S_C – это геометрическое место точек, для которых $U(x,y,z) = C$.

Очевидно, S_C и $S_{C'}$ не пересекаются, если $C \neq C'$, и все поверхности уровня исчерпывают область D. Поверхности уровня не зависят от системы координат.

Пусть точка $M_0 = (x_0, y_0, z_0) \in D$ и l – прямая, проходящая через точку M_0, а $\overline{l} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ – единичный направляющий вектор этой прямой.

---

[16] Эти же примеры показывают, что пространственно односвязная область может не быть поверхностно односвязной (тор) (см. определение на с. 545). И наоборот, поверхностно односвязная область может не быть пространственно односвязной (шар с пузырьком внутри). (Ред.)

Определение. *Производной* $\frac{\partial U}{\partial l}(M_0)$ *функции* $U(M)$ *по направлению* $\overline{l}$ в точке M_0 называется[17] предел

$$\lim_{\substack{M\to M_0\\ M\in l}} \frac{U(M)-U(M_0)}{\rho(M,M_0)} = \frac{\partial U}{\partial l}\,,$$

где точка M, близкая к M_0 берется в направлении вектора $\overline{l}$. Координаты точки $M(x,y,z)$, находящейся на прямой l на расстоянии $\rho(M,M_0) = t$ от точки M_0 в направлении $\overline{l}$, равны $\left.\begin{array}{l} x = x_0 + t\cos\alpha \\ y = y_0 + t\cos\beta \\ z = z_0 + t\cos\gamma \end{array}\right\}$. В предположении, что $U \in C^1$, получим

$$\frac{\partial U}{\partial l} = \left.\frac{\partial U}{\partial t}\right|_{t=0} = \frac{\partial U}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial U}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial U}{\partial z}\cos\gamma = \\ = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{dz}{ds} = \left(\overline{g},\overline{l}\right) = g_l\,,$$

где $\overline{g} = \left\{\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}\right\}$, g_l – проекция $\overline{g}$ на l, а ds – расстояние между точками (x_0,y_0,z_0) и (x_0+dx, y_0+dy, z_0+dz).

Таким образом, гладкое скалярное поле U порождает *векторное поле* $\overline{g} = \left\{\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}\right\}$. Это векторное поле называется *полем градиента скалярного поля* U и обозначается $\overline{g} = \operatorname{grad} U$.

Так как производная по направлению $\frac{\partial U}{\partial l} = \left(\overline{g},\overline{l}\right) = g_l$, то она принимает наибольшее значение в точке M_0, когда направление l совпадает с направлением $\overline{g}$, т.е. когда $\overline{l} = \frac{\overline{g}}{|\overline{g}|}$. Таким образом, вектор градиента – вектор наискорейшего изменения скалярного поля. Отсюда следует, что вектор $\overline{g} = \operatorname{grad} U$ есть величина геометрическая, так как $\frac{\partial U}{\partial l}$ и $\max\frac{\partial U}{\partial l}$ не зависят от выбора системы координат. Вектор $\overline{g}$ имеет направление нормали $\overline{n}$ к поверхности $U(x,y,z) = C$ и направлен в сторону возрастания функции U; $|\overline{g}| = \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2}$.

Символический вектор $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$[18] называется *оператором Гамильтона* и его применение к скалярному полю U

[17] Здесь производная по направлению определяется как правая производная по t функции $U(M_0 + t\overline{l})$ в точке M_0. Нередко производная по направлению определяется как $\lim\limits_{\substack{M\to M_0\\ M\in l}} \frac{U(M)-U(M_0)}{M_0M} = \frac{\partial U}{\partial l}$, где M_0M – величина направленного отрезка от M_0 до M (см., например, [28] т. 1 п. 184). (Ред.)

[18] С.Б.С. представил на лекции этот вектор (букву) следующим образом: "Это "набла набловатая, набловатая." (Ред.)

дает градиент

$$\overline{g} = \operatorname{grad} U = \nabla U\,.$$

Векторное поле. Пусть в области $D \subset E^3$ задано векторное поле $\overline{A} = (P, Q, R)$. Векторное поле можно рассматривать как совокупность трех скалярных полей. Кривая, направление касательной в каждой точке которой совпадает с направлением векторного поля $\overline{A}$ в этой точке, называется *линией тока* или *векторной линией* поля $\overline{A}$. Линии тока имеют уравнения

$$\tfrac{dx}{P} = \tfrac{dy}{Q} = \tfrac{dz}{R}\,.$$

Предположим, что дифференциальная форма $Pdx + Qdy + Rdz$ имеет интегрирующий множитель μ и $\mu(Pdx+Qdy+Rdz) = dU$. Тогда уравнения

$$\tfrac{dx}{\mu P} = \tfrac{dy}{\mu Q} = \tfrac{dz}{\mu R}\,,$$

равносильные уравнениям линии тока, показывают, что направление линий тока совпадает с направлением нормалей к поверхностям уровня функции U. Можно сказать, что существование интегрирующего множителя μ соответствует тому, что для линий тока существует семейство поверхностей, им ортогональных.

4 семестр
Лекция 18
(16.04.69)

Векторному полю $\overline{A} = (P, Q, R)$, определенному в области $D \subset E^3$, такому, что $\overline{A} \in C^1(D)$, поставим в соответствие выражение $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \operatorname{div} \overline{A}$, которое называется *расходимостью* или *дивергенцией* поля $\overline{A}$. Расходимость есть скалярное поле, которое определяется векторным полем $\overline{A}$. Формально выражение для дивергенции связано с системой координат, но как будет показано, в действительности дивергенция не зависит от выбора осей координат, т. е. является характеристикой собственно поля. Отметим, что $\operatorname{div} \overline{A} = \nabla \overline{A}$, где справа стоит формальное скалярное произведение символического вектора ∇ и вектора $\overline{A}$. Так как

$$\oiint\limits_S \{P\cos\lambda + Q\cos\mu + R\cos\nu\}\, d\sigma = \oiint\limits_S \big(\overline{A}\cdot\overline{n}\big)\, d\sigma = \oiint\limits_S A_n\, d\sigma\,,$$

то формулу Остроградского можно записать в следующей векторной форме

$$\oiint\limits_S A_n\, d\sigma = \iiint\limits_V \operatorname{div} \overline{A}\, dv\,.$$

Левая часть формулы не зависит от выбора осей координат. Будем считать, что область D пространственно односвязна. Зафиксируем точку $(x, y, z) \in D$ и в качестве V будем брать шары V_ε радиуса ε с центром в этой точке, ограниченные сферами S_ε. Тогда

$$\iiint\limits_{V_\varepsilon} \operatorname{div} A\, dv = \oiint\limits_{S_\varepsilon} A_n\, d\sigma, \quad (x, y, z) \in V_\varepsilon\,,$$

и по теореме о среднем, получим

$$m\,(V_\varepsilon) \cdot \operatorname{div}\overline{A}\,(\xi, \eta, \zeta) = \oiint\limits_{S_\varepsilon} A_n\, d\sigma\,,$$

где $m(V_\varepsilon) = \mathcal{V}(V_\varepsilon)$ – объем V_ε, $(\xi, \eta, \zeta) \in V_\varepsilon$. Отсюда, устремляя ε к нулю, имеем

$$\operatorname{div} A\,(x, y, z) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\oiint\limits_{S_\varepsilon} A_n\, d\sigma}{\mathcal{V}(V_\varepsilon)}\,.$$

Мы получили инвариантное геометрическое определение дивергенции в точке, не зависящее от выбора системы координат.

Уже отмечалось, что из формулы Остроградского вытекает утверждение: для того чтобы интеграл $\oiint\limits_S A_n\, d\sigma$ по любой замкнутой поверхности S обращался в нуль, необходимо и достаточно, чтобы $\operatorname{div}\overline{A} = 0$. Поле, обладающее этим свойством, называется *соленоидальным полем.* Интеграл $\oiint\limits_S A_n\, d\sigma$ называется *потоком векторного поля* $\overline{A}$ через поверхность S. Название связано с физическим смыслом этого интеграла. В случае, если рассматривается движение жидкости в пространстве, то количество жидкости, протекающей через определенную сторону поверхности S, отнесенное к единице времени, выразится интегралом $\oiint\limits_S A_n\, d\sigma$, где $\overline{A} = \rho\overline{v}$, ϱ – плотность, а $\overline{v}$ – скорость движения жидкости.

Для соленоидального поля рассмотрим *векторную трубку* – поверхность, образованную векторными линиями, проходящими через некоторую замкнутую кривую. Так как через боковую поверхность векторной трубки поток поля равен нулю, то мы получаем, что поток соленоидального поля через любое сечение векторной трубки постоянен: сколько втекает с одного конца трубки, столько вытекает с другого (рис. 18.20 а).

Геометрический смысл формулы Стокса.

Определение. Вектор $\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \nabla \times \overline{A} = \mathrm{rot}\overline{A}$ называется *вихрем* или *ротором поля* $\overline{A}$. Формулу Стокса можно переписать следующим образом

$$\oint_{\Gamma} \left(\overline{A} \cdot \overline{t}\right) \, dl = \iint_{S} \left(\overline{n}, \nabla, \overline{A}\right) \, d\sigma = \iint_{S} \left(\mathrm{rot}\,\overline{A}\right)_n \, d\sigma \, .$$

Следовательно, циркуляция $\oint\limits_{\Gamma} \left(\overline{A} \cdot \overline{t}\right) \, dl$ векторного поля $\overline{A}$ вдоль контура Γ равна потоку вихря $\mathrm{rot}\overline{A}$ через поверхность S с краем Γ (когда ориентация контура и поверхности согласованы).

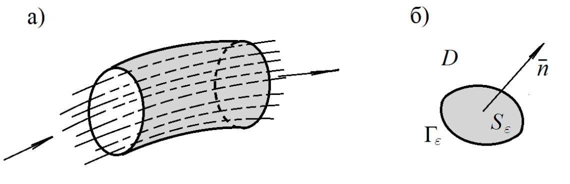


Рис. 18.20.

Покажем, что $\mathrm{rot}\overline{A}$ является геометрической характеристикой поля. Достаточно геометрически определить его проекцию на любое заданное направление. Пусть точка (x, y, z) и направление $\overline{n}$ заданы. На плоскости, ортогональной $\overline{n}$ и проходящей через точку (x, y, z) возьмем круг S_ε радиуса ε с центром в этой точке и с границей Γ_ε (рис. 18.20 б). Тогда получим $\iint\limits_{S_\varepsilon} \left(\mathrm{rot}\,\overline{A}\right)_n \, d\sigma = $

$$= \mathcal{S}(S_\varepsilon) \, \left(\mathrm{rot}\,\overline{A}\right)_n \Big|_{(\xi,\eta,\zeta)} \, . \text{ Отсюда } \left(\mathrm{rot}\,\overline{A}\right)_n = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\oint_{\Gamma_\varepsilon} \left(\overline{A} \cdot \overline{t}\right) dl}{\mathcal{S}(S_\varepsilon)} \, .$$

Мы получили геометрическое определение проекции вихря (ротора) поля на любое направление.

Глава 19

Дифференциальная геометрия поверхностей

Содержание главы.
Параметрическое представление поверхности и криволинейные координаты на поверхности. Первая квадратичная форма поверхности. Измерение длин, углов и площадей на поверхности. Внутренняя геометрия поверхности. Вторая квадратичная форма поверхности. Теорема Менье. Нормальная кривизна. Главные кривизны. Средняя и полная (гауссова) кривизны. Геодезическая кривизна. Геодезические линии.
Рекомендованная литература.
Погорелов [17] часть II, гл. IV §§1,2,3; гл. V §§1,3; гл. VI кроме §4; гл. VII до теоремы Гаусса; гл. IX §§1,2 (§§3,4 если успеем).
Розендорн [20] с. 14 – 25 – основные факты дифференциальной геометрии, кроме сферических отображений и формул и теоремы Гаусса.
Норден [16] – геодезические линии (геодезическая кривизна в [20] п. 18).

4 семестр
Лекция 19
(18.04.69)

§ 90. Первая квадратичная форма поверхности

Рассмотрим простую поверхность $S \subset E^3$ (см. определение в п. 85.1 с. 512). Пусть окрестность точки $M \in S$ является взаимно однозначным и взаимно непрерывным образом некоторой окрестности $O = O(u_0, v_0)$ точки (u_0, v_0) на плоскости (u, v) (см. рис. 19.1) при отображении $\left.\begin{array}{l} x=x(u,v)\\ y=y(u,v)\\ z=z(u,v)\end{array}\right\}$, $(u,v)\in O(u_0,v_0)$. В векторной форме эти параметрические уравнения части поверхности записываются уравнением $\overline{R} = \overline{R}(u, v)$, а параметры u, v называются *внутренними координатами* точек поверхности. Будем обозначать $R = \overline{R}$. Таким образом, мы предполагаем, что поверхность S в окрестности точки M задается параметрически. Если при этом функции $x, y, z \in C^1(O)$, то поверхность S будем называть *гладкой*.[1] Точку M мы будем называть *регулярной* точкой, если в этой точке $R_u \times R_v \neq 0$. В этом случае в точке M существует единственная нормаль к поверхности $\overline{n} = \frac{R_u \times R_v}{|R_u \times R_v|}$ (см. § 83 с. 501).

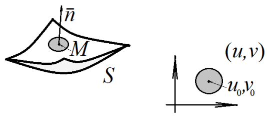


Рис. 19.1.

В силу непрерывности рассматриваемых функций неравенство $R_u \times R_v \neq 0$ сохраняется в некоторой окрестности точки M, и поэтому эта окрестность вся состоит из регулярных точек. Поверхность, состоящую из регулярных точек, будем называть *регулярной*. Если функции, участвующие в параметрическом задании регулярной поверхности, имеют гладкость порядка n, т. е. принадлежат классу C^n, $n \geq 1$, то поверхность называется *регулярной поверхностью порядка* n.

[1] С.Б.Стечкин придерживался в этом вопросе терминологии А. В. Погорелова ([17] гл. IV § 2 с. 75), у которого поверхность называется регулярной, если x, y, z – k раз непрерывно дифференцируемые функции. При $k = 1$ в [17] гл. IV § 2 с. 76 поверхность называется гладкой. (Ред.)

Условие $R_u \times R_v \neq 0$ означает, что ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix}$$

равен 2. Это в свою очередь означает, что какой-нибудь минор второго порядка этой матрицы отличен от нуля. Пусть, для определенности, это будет определитель $\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} \neq 0$. На основании теоремы о неявной функции (п. 57.2) мы заключаем, что первые два уравнения в окрестности нашей точки могут быть разрешены относительно u и v: $\begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases}$. Тогда уравнение поверхности запишется в виде $z = z(x,y)$.

Таким образом, если есть гладкая поверхность и на ней регулярная точка, то в окрестности этой точки уравнения поверхности могут быть разрешены относительно одной из пар координат: (x,y), (x,z) или (y,z).

Будем изучать свойства поверхности S в окрестности точки M.

90.1. Определение и основные свойства

Пусть S – гладкая поверхность, которая в окрестности регулярной точки $M \in S$ задается векторным уравнением $R = \overline{R}(u,v)$.

Определение первой квадратичной формы поверхности. *Первой квадратичной формой поверхности* называется квадратичная форма

$$I = dR^2 = (dR)^2 ,$$

где $dR = R_u du + R_v dv$. Следовательно,

$$I = dR^2 = R_u R_u du^2 + 2R_u R_v du dv + R_v R_v dv^2 = \\ = E du^2 + 2F du dv + G dv^2 ,$$

т. е. это квадратичная форма относительно du и dv; мы обозначили $E = R_u^2$, $F = R_u R_v$, $G = R_v^2$.

Заметим, что первая квадратичная форма I зависит как от поверхности, так и от способа ее параметризации. Как будет показано дальше, I выражает некоторые важные геометрические свойства самой поверхности.

Основное свойство первой квадратичной формы. *Первая квадратичная форма гладкой поверхности в регулярной точке является положительно определенной.*
Действительно, из определения $I = dR^2$ следует, что $I \geq 0$ для любых du и dv. Остается показать, что

$$I = 0 \quad \Leftrightarrow \quad du = 0 \quad \text{и} \quad dv = 0\,.$$

Допустим, что du и dv не обращаются в 0 одновременно, а $I = 0$. Это значит, что $dR = 0$ или $R_u du + R_v dv = 0$. Умножим это равенство векторно на R_v, получим $(R_u \times R_v)\, du = 0$. Так как $I = 0$ рассматривается в регулярной точке, то $R_u \times R_v \neq 0$, откуда следует, что $du = 0$. аналогично получим $dv = 0$, что невозможно по нашему предположению. ▶

Отсюда следует, что
на любой гладкой поверхности в любой ее регулярной точке $E > 0$, $G > 0$, $EG - F^2 > 0$.

Заметим, что коэффициенты первой квадратичной формы

$$\begin{aligned} &E = R_u^2 = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2\,,\\ &F = R_u R_v = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v\,,\\ &G = R_v^2 = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2\,. \end{aligned}$$

В частном случае, когда поверхность S задана уравнением $z = f(x, y)$, мы можем считать $x = u$, $y = v$, $z = f(u, v)$. Тогда, очевидно,

$$E = 1 + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2, \quad F = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial f}{\partial v}\,, \quad G = 1 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2\,,$$

и в этом частном случае

$$I = \left\{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2\right\} du^2 + 2\frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial f}{\partial v} du dv + \left\{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2\right\} dv^2\,.$$

Рассмотрим координатную сетку на поверхности, т. е. семейство линий, которые получаются при подстановке в уравнение $R = \overline{R}(u, v)$ значений $v = \text{const}$, либо $u = \text{const}$. Вектор

$R_u = (x_u, y_u, z_u)$ – направляющий вектор касательной к линии $R = \overline{R}(u, c)$, а $R_v = (x_v, y_v, z_v)$ – направляющий вектор касательной к линии $R = \overline{R}(c, v)$. Следовательно, единичные векторы касательных к линиям координатной сетки будут $\overline{n}_1 = \frac{R_u}{\sqrt{E}}$, $\overline{n}_2 = \frac{R_v}{\sqrt{G}}$.

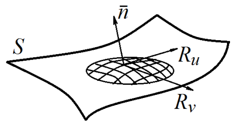


Рис. 19.2.

Геометрический смысл первой квадратичной формы. Зная первую квадратичную форму, мы можем определить дифференциал дуги произвольной гладкой кривой, расположенной на поверхности, и вычислить длину кривой. Ниже мы покажем это.

Пусть кривая задана радиус-вектором, зависящим от параметра t: $R(t) = \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$. Условие гладкости кривой состоит в том, что $x, y, z \in C^1(O)$, а условие регулярности точки на кривой состоит в том, что $x_t^2 + y_t^2 + z_t^2 \neq 0$. Это условие означает, что $R_t \neq 0$, и, следовательно, кривая в рассматриваемой точке имеет однозначно определенную касательную (см. п. 34.2).

Пусть S – регулярная поверхность, которая задается уравнениями $S:\ \left.\begin{matrix} x = f_1(u, v) \\ y = f_2(u, v) \\ z = f_3(u, v) \end{matrix}\right\}$, где $x, y, z \in C^1(O)$ и $R_u \times R_v \neq 0$. Рассмотрим регулярную кривую $\Gamma \subset S$, заданную уравнениями $\left.\begin{matrix} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{matrix}\right\} = r(t) \in C^1[t_0, t_1]$, $r' \neq 0$.

Лемма. *Если на регулярной поверхности задана регулярная кривая, то во внутренних координатах u, v ее всегда можно задать следующим образом*:

$$\left.\begin{matrix} u = u(t) \\ v = v(t) \end{matrix}\right\} \in C^1, \quad \left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 > 0\,.$$

Доказательство. Учитывая, что кривая лежит на поверхности, координаты ее точек можно представить в виде $\left.\begin{matrix} x(t) = f_1(u, v) \\ y(t) = f_2(u, v) \\ z(t) = f_3(u, v) \end{matrix}\right\}$ при некоторых значениях внутренних координат (u, v). В точке кривой, являющейся регулярной точкой поверхности, матрица $\begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix}$ имеет ранг 2, т. е. какой-то минор этой матрицы отличен от 0. Пусть, например, это будет определитель $\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} = \frac{D(f_1,f_2)}{D(u,v)} \neq 0$. Тогда по теореме о неявных функциях мы можем первые два уравнения кривой разрешить относительно u и v как функций от t. Из теоремы о неявных функциях вытекает также, что $u(t), v(t) \in C^1$. Теперь проверим условие регулярности точки на кривой: $\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 > 0$. Действительно, так как $r' \neq 0$, то какая-то компонента вектора r' отлична от нуля, пусть например, $x'_t \neq 0$. Тогда в уравнении $x(t) = f_1(u, v)$ рассмотрим u и v как функции от t, и продифференцируем по t; получим $\frac{dx}{dt} = \frac{\partial f_1}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial f_1}{\partial v}\frac{dv}{dt} \neq 0$. Но тогда одна из производных $\frac{du}{dt}$ или $\frac{dv}{dt}$ заведомо отлична от 0. ►

90.2. Длина кривой и угол между кривыми на поверхности. Площадь поверхности

Итак, мы можем считать, что регулярная кривая Γ на поверхности S задана уравнениями $\Gamma: \left.\begin{matrix} u = u(t) \\ v = v(t) \end{matrix}\right\} \in C^1$, $u'^2 + v'^2 > 0$. Длина такой кривой при изменении параметра $t \in [t_0, t_1]$, как нам известно, выражается интегралом

$$l = \int\limits_{t_0}^{t_1} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt$$

и для дифференциала дуги имеет место формула

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

(см. п.п. 45.3, 45.4; для простоты в этих пунктах был рассмотрен плоский случай). Учитывая, что x, y, z – сложные функции от t, мы можем этот интеграл переписать следующим образом

$$\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\left(\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt}\right) + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2} dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2} dt\,.$$

Таким образом, для определения длины кривой нам нужно знать только первую квадратичную форму. В этом смысле говорят, что первая квадратичная форма определяет *метрику поверхности*. Мы видим также, что первая квадратичная форма при соответствующих значениях дифференциалов du и dv, есть квадрат дифференциала дуги, лежащей на поверхности. Поэтому первая квадратичная форма называется также *линейным элементом поверхности*.

Замечание. На первую квадратичную форму можно смотреть несколько более абстрактно. По поверхности мы определили первую квадратичную форму и научились считать длины кривых. Обратно, если у нас в некоторой области D переменных u и v задана положительно определенная квадратичная форма от du и dv, то мы можем с ее помощью определить в области D метрику, так как можем с ее помощью определять и вычислять длины дуг.

Первая квадратичная форма позволяет измерять не только длины кривых, но и углы между кривыми на поверхности. Пусть на поверхности задана кривая $\Gamma : \begin{cases} u = u(t) \\ v = v(t) \end{cases}$. Если $R = R(t)$ – радиус-вектор кривой Γ на поверхности S, то $R'_t = R_u \frac{du}{dt} + R_v \frac{dv}{dt}$. Направление вектора производной на поверхности в данной точке определяется отношением производных $\left(\frac{du}{dt} : \frac{dv}{dt}\right)$ или парой дифференциалов (du, dv), поскольку эти пары пропорциональны. Поэтому можно считать, что это направление определяется отношением дифференциалов $(du : dv)$.

Пусть есть две кривые: Γ_1 с направлением $(du : dv)$ и Γ_2 с направлением $(\delta u : \delta v)$.

Определение. *Углом между кривыми* Γ_1 и Γ_2 на S в точке их пересечения будем называть угол между направлениями их касательных в этой точке.

Обозначим дифференциал радиус-вектора $dR = R_u du + R_v dv$ для кривой Γ_1 и $\delta R = R_u \delta u + R_v \delta v$ для кривой Γ_2. Для того, чтобы определить угол между кривыми Γ_1 и Γ_2, вычислим скалярное произведение $(dR, \delta R) = |dR|\,|\delta R| \cos\theta$ и получим

$$\cos\theta = \frac{(dR, \delta R)}{|dR|\,|\delta R|} = \frac{(dR, \delta R)}{\sqrt{dR^2 \delta R^2}} = \frac{Edu\delta u + F(du\delta v + dv\delta u) + Gdv\delta v}{\sqrt{I(d)I(\delta)}}.$$

Таким образом, знание первой квадратичной формы позволяет находить угол между двумя направлениями на поверхности.

Найдем угол θ между координатными линиями $u = \text{const}$ с направлением $(0 : dv)$ и $v = \text{const}$ с направлением $(\delta u : 0)$. Косинус этого угла будет равен $\cos\theta = \frac{F\delta u dv}{\sqrt{Gdv^2 E\delta u^2}} = \frac{F}{\sqrt{EG}}$. Следовательно, $\theta = \frac{\pi}{2}$, т. е. $\cos\theta = 0$ тогда и только тогда, когда $F = 0$, и мы получили

Критерий ортогональности координатных линий. *Для того, чтобы координатные линии на регулярной поверхности были ортогональны, необходимо и достаточно, чтобы первая квадратичная форма имела вид* $I = Edu^2 + Gdv^2$.

Этот критерий позволяет доказать следующую теорему.

Теорема об ортогональной параметризации. *Для любой гладкой поверхности в окрестности любой ее регулярной точки можно ввести такую параметризацию, для которой координатные линии на поверхности будут ортогональными.*

Такая параметризация называется *регулярной ортогональной параметризацией.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть у нас есть какая-то регулярная параметризация поверхности. Докажем, что для произвольно выбранного одного семейства регулярных линий можно найти такое другое семейство, что эти семейства будут ортогональны.

Будем считать, что $\varphi(u, v) = \alpha$, где $\varphi(u, v)$ – регулярная функция, т. е. функция класса C^1, удовлетворяющая условию $\varphi_u^2 + \varphi_v^2 \neq 0$. Для кривых $\varphi(u, v) = \alpha = \text{const}$ этого семейства дифференциал равен нулю, т. е. $\varphi_u du + \varphi_v dv = 0$. Значит, в окрестности точки на этой кривой определено направление $(du : dv)$. Если $\psi(u, v) = \beta$ – второе семейство кривых на поверхности с соответствующим этому семейству направлением $(\delta u : \delta v)$, то условие ортогональности кривых из первого и второго семейства можно записать как $\cos\theta = \frac{(dR,\delta R)}{\sqrt{(dR)^2(\delta R)^2}} = 0$, или, приравняв к нулю числитель, как

$$(Edu + Fdv)\,\delta u + (Fdu + Gdv)\,\delta v = 0\,.$$

Это выражение можно переписать следующим образом:

$$(E\varphi_v - F\varphi_u)\,\delta u + (F\varphi_v - G\varphi_u)\,\delta v = 0\,.$$

Мы получили дифференциальное уравнение, связывающее u , v и их дифференциалы δu и δv . Из этого дифференциального уравнения мы можем найти его общий интеграл $\psi\,(u,v) = \beta$.

Теперь надо проверить, что уравнения $\begin{cases} \varphi\,(u,v) = \alpha \\ \psi\,(u,v) = \beta \end{cases}$ определяют регулярную параметризацию, т. е. надо проверить, что

$$\frac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0\,.$$

Но для кривых семейства $\psi(u,v) = \beta$ дифференциал также равен нулю, т. е. $\psi_u\delta u + \psi_v\delta v = 0$. Значит, заменяя ψ_u , ψ_v на $-\delta v$, δu , а $\delta u, \delta v$ из последнего дифференциального уравнения на $-(F\varphi_v - G\varphi_u)$, $E\varphi_v - F\varphi_u$, получим

$$\frac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \varphi_u & \varphi_v \\ E\varphi_v - F\varphi_u & F\varphi_v - G\varphi_u \end{vmatrix} =$$
$$= -(E\varphi_v^2 - 2F\varphi_u\varphi_v + G\varphi_u^2) \neq 0\,,$$

так как в скобках получилось значение квадратичной формы с заменой $du = \varphi_v$, $dv = -\varphi_u$, от чего это значение обращаться в 0 не может в силу положительной определенности квадратичной формы. Значит, параметризация $\alpha = \alpha\,(u,v)$, $\beta = \beta\,(u,v)$, представляющая радиус-вектор поверхности в виде $R(\alpha,\beta)$, является регулярной. ►

Таким образом, если на S построена ортогональная координатная сеть, то соответствующий этой сети линейный элемент будет представлять собой просто сумму квадратов:

$$dl^2 = E\,(\alpha,\beta)\,d\alpha^2 + G\,(\alpha,\beta)\,d\beta^2\,.$$

Рассмотрим векторное произведение $(R_u \times R_v)^2 = EG - F^2$. Как нам известно (см. § 83 с. 501), площадь куска поверхности S , заданной параметрически, выражается двойным интегралом

$$S = \iint\limits_D \sqrt{EG - F^2}\,dudv = \iint\limits_D |R_u \times R_v|\,dudv\,.$$

Здесь D – компакт на плоскости (u,v). Значит, $|R_u \times R_v|\, dudv$ – элемент площади поверхности.

4 семестр
Лекция 20
(23.04.69)

Замечание. При доказательстве существования ортогональной координатной сети пришлось решать дифференциальное уравнение. Вопрос о существовании решения дифференциального уравнения уже рассматривался (см. § 86 с. 523). Отметим дополнительно, что теорема о существовании решения такого уравнения вида $Adu + Bdv = 0$ доказывается в предположении, что хотя бы один из коэффициентов A или B отличен от нуля, и оба они дифференцируемы (т. е. имеют гладкость C^1); на самом деле теорема о существовании решения дифференциального уравнения верна и без этого предположения. В нашем случае коэффициенты A и B выражаются через E, F, G, φ_u, φ_v, и для того, чтобы $A, B \in C^1$, достаточно требовать, чтобы E, F, G, φ_u, $\varphi_v \in C^1$, т. е. чтобы $S \in C^2$ и $\varphi \in C^2$. Тогда существует ортогональная параметризация поверхности такая, что координатные линии $\varphi(u,v) = \alpha$, $\psi(u,v) = \beta$ на поверхности образуют ортогональную сеть. В данном случае мы четко оговорили ту гладкость поверхности и функций, при которых справедлива теорема об ортогональной параметризации. Впредь мы этого делать не будем, а будем говорить, что поверхность и функции "достаточно гладкие". Это будет означать, что в случаях, относящихся к дифференциальным уравнениям, мы будем считать, что все функции гладкие на столько, сколько надо, чтобы теоремы о дифференциальных уравнениях могли быть применены (обычно будет считаться, что существуют производные на порядок выше, чем будет указано в условиях формулировок теорем).

90.3. Изометрия поверхностей

Пусть есть две гладкие поверхности S_1 и S_2. Эти две поверхности называются *изометричными* в окрестностях точек $M_1 \in S_1$ и $M_2 \in S_2$, если у этих точек найдутся такие окрестности, что между ними можно установить взаимно однозначное соответствие, при котором соответствующие друг другу кривые будут иметь одинаковые длины (см. рис. 19.3 а). Существование длин у кривой и образа кривой предполагается, т. е. всякая кривая, имеющая длину, переходит в кривую, также имеющую длину, и соответствующие длины равны.

При помощи первой квадратичной формы можно написать очевидное достаточное условие того, чтобы две поверхности были изометричны. Действительно, если S_1 и S_2 – гладкие поверхности, которые могут быть параметризованы одинаковыми внутренними координатами так, что в окрестностях $O_1(M_1)$ и $O_2(M_2)$ их первые квадратичные формы совпадают, то эти поверхности, очевидно, изометричны, так как длины будут выражаться через координаты первых квадратичных форм (которые по условию совпадают).

Замечание. На самом деле верно и обратное утверждение, которое будет доказано через несколько лекций.

Рассмотрим семейство поверхностей S_t, зависящих от параметра t, $0 \le t \le 1$. Пусть окрестности точек M_t могут быть поставлены в соответствие друг другу так, что все поверхности S_t изометричны, и, кроме того, поверхности зависят от t непрерывно. Тогда мы будем говорить, что у нас есть *изгибание поверхности*, т. е. непрерывная деформация, сохраняющая длины кривых. Если одна поверхность может быть получена из другой изгибанием, то, с точки зрения первой квадратичной формы, длины, углы и площади на этих поверхностях, одинаковы, т. е. их внутренние геометрии совпадают.

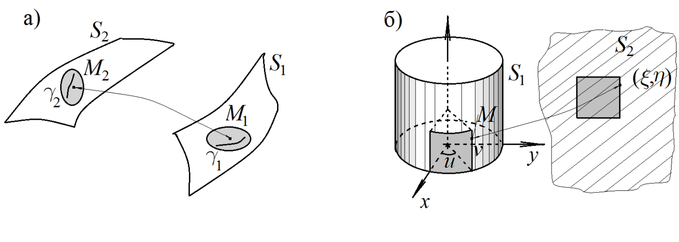


Рис. 19.3.

Покажем, что существуют такие поверхности, которые отличаются друг от друга и изометричны.

Пример. Пусть S_1 – просто плоскость с декартовыми координатами (ξ, η), так что $dl_1^2 = d\xi^2 + d\eta^2$, и S_2 – цилиндр с образующими, параллельными оси Oz, в основании которого лежит окружность радиуса 1 (см. рис. 19.3 б). Цилиндр параметризуется следующим образом: $z = v$, $x = \cos u$, $y = \sin u$. Тогда

$$dl_2^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = du^2 + dv^2 .$$

Соответствие $(\xi, \eta) \leftrightarrow (u, v)$: $\xi = u$, $\eta = v$, $0 \le u < 2\pi$, между плоской полосой $0 \le \xi < 2\pi$, $-\infty < \eta < +\infty$, и цилиндром будет взаимно однозначным соответствием, при котором первая квадратичная форма сохраняется. Достаточно малым квадратикам на плоскости будут поставлены в соответствие изогнутые квадратики на поверхности цилиндра. Значит, плоскость и цилиндр *локально* изометричны. Но если квадратики на плоскости станем увеличивать, то соответствующие кусочки цилиндра будут расти и, в конце концов, охватят весь цилиндр; в этот момент взаимная однозначность соответствия нарушится.

Пример показывает, что первая квадратичная форма не определяет вид поверхности и ее положение в пространстве. Здесь имеем почти такое же положение, как в случае кривых на плоскости и в пространстве (кривая на плоскости определяется с точностью до движения, на плоскости достаточно знать кривизну этой кривой, а для пространственной кривой кривизну знать недостаточно, надо знать еще и кручение этой кривой).

§ 91. Вторая квадратичная форма поверхности

91.1. Определение

Начиная с этого места всегда, если не оговорено противное, мы будем считать, что S – регулярная поверхность класса C^2. Значит, радиус-вектор поверхности задается вектор-функцией уже класса C^2: $R = \overline{R}(u, v) \in C^2$.

Определение. *Второй квадратичной формой поверхности* называется квадратичная форма

$$II = -dR \cdot d\overline{n} .$$

В силу регулярности в любой точке поверхности определен единичный вектор нормали, и, значит, квадратичная форма II определена в любой точке. Так как $dR = R_u du + R_v dv$ и $d\overline{n} = \overline{n}_u du +$

$+\overline{n}_v dv$, то мы можем записать в явном виде вторую квадратичную форму поверхности

$$II=-R_u\overline{n}_u du^2-(R_u\overline{n}_v+R_v\overline{n}_u)\,dudv-R_v\overline{n}_v\,dv^2\,.$$

Удобно эту квадратичную форму писать в несколько ином виде. Заметим, что $(dR\cdot\overline{n})=0$, так как эти векторы перпендикулярны. Поэтому $d\,(dR\cdot\overline{n})=0$, откуда $d^2R\cdot\overline{n}+dR\cdot d\overline{n}=0$ и $-dR\cdot d\overline{n}=d^2R\cdot\overline{n}$. Следовательно, вторую квадратичную форму можно определить также как

$$II=d^2R\cdot\overline{n}\,.$$

Так как $d^2R=R_{uu}du^2+2R_{uv}dudv+R_{vv}dv^2$, то

$$II=R_{uu}\overline{n}du^2+2R_{uv}\overline{n}dudv+R_{vv}\overline{n}dv^2=Ldu^2+2Mdudv+Ndv^2,$$

где $L=L\,(u,v)=R_{uu}\cdot\overline{n},\ M=M\,(u,v)=R_{uv}\cdot\overline{n},\ N=N\,(u,v)=R_{vv}\cdot\overline{n}$. Эти формулы для коэффициентов L , M , N второй квадратичной формы можно переписать через координаты. Пусть поверхность задана уравнениями $R\,(u,v)=\begin{cases}x=x\,(u,v)\\ y=y\,(u,v)\\ z=z\,(u,v)\end{cases}$. Тогда единичный вектор нормали будет $\overline{n}=\frac{R_u\times R_v}{|R_u\times R_v|}=\frac{R_u\times R_v}{\sqrt{EG-F^2}}$ (E,F,G – коэффициенты первой квадратичной формы). Отсюда получаем, что

$$L=\frac{(R_{uu},R_u,R_v)}{\sqrt{EG-F^2}}\,,\quad M=\frac{(R_{uv},R_u,R_v)}{\sqrt{EG-F^2}}\,,\quad N=\frac{(R_{vv},R_u,R_v)}{\sqrt{EG-F^2}}\,,$$

или $L=\dfrac{\begin{vmatrix}x_{uu}&y_{uu}&z_{uu}\\x_u&y_u&z_u\\x_v&y_v&z_v\end{vmatrix}}{\sqrt{EG-F^2}}$, $M=\dfrac{\begin{vmatrix}x_{uv}&y_{uv}&z_{uv}\\x_u&y_u&z_u\\x_v&y_v&z_v\end{vmatrix}}{\sqrt{EG-F^2}}$,

$N=\dfrac{\begin{vmatrix}x_{vv}&y_{vv}&z_{vv}\\x_u&y_u&z_u\\x_v&y_v&z_v\end{vmatrix}}{\sqrt{EG-F^2}}$.

Рассмотрим эти формулы для частного случая, когда поверхность задана явным уравнением $z=z\,(x,y)$, т. е. будем считать, что $R\,(u,v)=\begin{cases}x=u\\ y=v\\ z=z\,(u,v)\end{cases}$. В этом случае $L=\frac{z_{xx}}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}$, $M=\frac{z_{xy}}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}$, $N=\frac{z_{yy}}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}$. Мы видим, что в этом случае коэффициенты L , M , N пропорциональны вторым частным производным функции z .

91.2. Теория соприкосновения

Для плоских кривых мы знаем, что значит, что две кривые в какой-то точке имеют соприкосновение какого-то порядка. [2] Вопрос соприкосновения поверхностей будет сведен к вопросу соприкосновения поверхностей с кривыми на другой поверхности.

Пусть имеется некоторая пространственная область D и гладкая поверхность S задана уравнением $\varphi(x, y, z) = 0$, где функция $\varphi(x, y, z) \in C^1(D)$ и $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2 \neq 0$, т.е. $\mathrm{grad}\varphi \neq 0$ в области D. Пусть в области D имеется точка $P \in D$, не лежащая на поверхности S.

Задача состоит в том, чтобы определить расстояние от точки P до поверхности S (см. § 77 с. 456). Обозначим это расстояние $h = \rho(P, S)$. Пусть точка P имеет координаты $P(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$, а точка M_1 на поверхности имеет координаты $M_1(x_1, y_1, z_1)$. Рассмотрим отношение $\frac{\varphi(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})}{\rho(P,S)}$ при приближении точки P к точке M_1, лежащей на поверхности. Это отношение – функция точки $P(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$, определенная во всей области D.

Лемма о порядке расстояния точки до поверхности.

$$\frac{\varphi(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})}{\rho(P, S)} \to a \quad (P(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) \to M_1),$$

где $0 < |a| < \infty$.

"Таким образом, порядок расстояния точки от поверхности получается просто, надо лишь координаты этой точки подставить в уравнение поверхности." (С.Б.С.)

Доказательство леммы. Возьмем $\varepsilon > 0$ и рассмотрим в пространстве окрестность $O(M_1)$ точки M_1 такую, что все точки этой окрестности удалены от M_1 меньше, чем на ε. Возьмем в пространстве точку $P(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) \notin S$ такую, что $\rho(P, M_1) < \frac{\varepsilon}{2}$. Для любой точки $Q \in S$, не принадлежащей выбранной окрестности, $0 < \varepsilon < \rho(Q, M_1) \leq \rho(Q, P) + \rho(P, M_1) \leq \rho(Q, P) + \frac{\varepsilon}{2}$, откуда получаем, что $\rho(Q, P) > \frac{\varepsilon}{2}$ (см. рис. 19.4). Поэтому расстояние $\rho(P, S)$ от точки P, достаточно близкой к поверхности, достигается в некоторой точке $M_0(x_0, y_0, z_0) \in O(M_1)$:

[2] С понятием соприкосновения кривых мы встречались в п. 34.6. Определение и необходимые и достаточные условия соприкосновения кривых см. [17] гл. II § 4. (Ред.)

$\rho\,(P,S)=\rho\,(P,M_0)$.

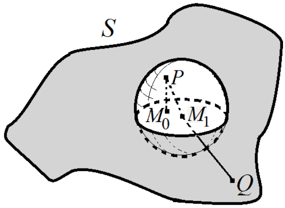


Рис. 19.4.

Пусть $R=R(u,v)$ – какая-нибудь гладкая параметризация поверхности в окрестности точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$. Обозначим через p вектор $\overline{M_0P}$. В точке M_0 достигается $\min\limits_{(u,v)}(R-p)^2$ и, следовательно, выполняются необходимые условия $\left.\begin{array}{l}(R-p)\,R_u=0\\(R-p)\,R_v=0\end{array}\right\}$ экстремума функции. Отсюда следует, что $(R-p)\perp R_u$, $(R-p)\perp R_v$, т.е. отрезок M_0P направлен по нормали к поверхности в точке M_0 . Значит, для нахождения расстояния от точки P до поверхности, надо "в точках поверхности построить нормали и посмотреть, какая из них проходит через точку P ".

Пусть $\overline{n}$ в точке M_0 сонаправлен с p , имеет направляющие косинусы $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ и h – расстояние между точками M_0 и P . Тогда координаты точки P $\left\{\begin{array}{l}\overline{x}=x_0+h\cos\alpha\\ \overline{y}=y_0+h\cos\beta\\ \overline{z}=z_0+h\cos\gamma\end{array}\right.$ (мы должны из точки $M_0\,(x_0,y_0,z_0)$ "передвинуться" в направлении единичной нормали на расстояние h). Тогда, так как $\varphi(x_0,y_0,z_0)=$ $=0$, то $\varphi\,(\overline{x}-h\cos\alpha,\overline{y}-h\cos\beta,\overline{z}-h\cos\gamma)=0$, откуда

$$\varphi\,(\overline{x},\overline{y},\overline{z})-\varphi\,(\overline{x}-h\cos\alpha,\overline{y}-h\cos\beta,\overline{z}-h\cos\gamma)=h\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial n}+\varepsilon_h\right\},$$

где $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ – производная по направлению нормали в точке M_1 . Значит,

$$\frac{\varphi(\overline{x},\overline{y},\overline{z})}{h}\to\left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_{M_1}\quad(P\to M_1\in S)\,.\ \blacktriangleright$$

4 семестр
Лекция 21
(25.04.69)

Мы подсчитали расстояние $h=\rho\,(P,S)$ от точки $P\,(\overline{x},\overline{y},\overline{z})$ до поверхности S (при достаточной близости P к S). Оказалось, что, как и в простейшем случае, когда S – плоскость, расстояние точки P до поверхности достигается в некоторой точке $M_0\in S$, причем PM_0 – нормаль к поверхности S, и это свойство выполняется для любых достаточно близких к поверхности точек P .

Именно, мы доказали, что $\frac{|\varphi(\overline{x},\overline{y},\overline{z})|}{h} \to \left|\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|\Big|_{M_1} = |\mathrm{grad}\varphi|_{M_1}$ при $P(\overline{x},\overline{y},\overline{z}) \to M_1 \in S$. Так как по условию S – гладкая поверхность и в точках поверхности $\mathrm{grad}\varphi \neq 0$, то и $|\mathrm{grad}\varphi| \neq 0$, и мы получаем асимптотическую формулу $h \approx \frac{|\varphi(\overline{x},\overline{y},\overline{z})|}{|\mathrm{grad}\varphi|_{M_1}}$ при $P \to M_1$ (определение асимптотического равенства см. в § 14 с. 60). Если мы рассмотрим эту формулу со знаком $\frac{\varphi(\overline{x},\overline{y},\overline{z})}{|\mathrm{grad}\varphi|_{M_1}}$, то можем сказать, с какой какой стороны точка приближается к поверхности, так как поверхность S локально делит область D на две части:

$$\begin{cases} D_+ = \{P(\overline{x},\overline{y},\overline{z}) \in D : \quad \varphi(\overline{x},\overline{y},\overline{z}) > 0\}\ ; \\ D_- = \{P(\overline{x},\overline{y},\overline{z}) \in D : \quad \varphi(\overline{x},\overline{y},\overline{z}) < 0\}\ . \end{cases}$$

Соприкосновение кривой и поверхности. Пусть поверхность $S \subset D$ задается уравнением $\varphi(x,y,z) = 0$, где $\varphi \in C^n(D)$, точка $M_1 \in S$ и через M_1 проходит кривая Γ: $r(t) = \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$, $a \leq t \leq b$. Тогда точка M_1 на кривой Γ имеет координаты $x_1 = x(t_1)$, $y_1 = y(t_1)$, $z_1 = z(t_1)$. Определим в точке M_1 соприкосновение кривой Γ с поверхностью S. Для этого возьмем на кривой Γ переменную точку P. Если P достаточно близка к M_1, $M_1 \neq P$, то для нее определены две величины:

$$\begin{aligned} d =& \rho(P, M_1) > 0\,, \\ h =& \rho(P, S) \geq 0\,. \end{aligned}$$

Пусть $d \to 0$. Тогда, очевидно, и $h \to 0$ (так как всегда $d \geq h$). Понятие соприкосновения кривой и поверхности характеризуется соотношением между d и h.

Определение. Говорят, что *в точке M_1 кривая Γ с поверхностью S имеет соприкосновение порядка выше α* ($\alpha \geq 0$), если выполнено условие $\frac{h}{d^\alpha} \to 0$ ($d \to 0$) (см. рис. 19.5).

Таким образом, например, всякая непрерывная кривая, проходящая через точку на поверхности, имеет в этой точке соприкосновение порядка выше нуля. Касательная плоскость к поверхности характеризуется тем, что любая кривая, лежащая в этой плоскости и проходящая через точку касания, имеет в этой точке соприкосновение с поверхностью порядка выше первого.

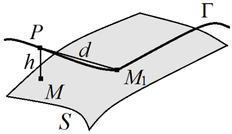


Рис. 19.5.

Нас интересует, при каких условиях кривая Γ имеет с поверхностью S в точке M_1 соприкосновение порядка выше n (т. е. при каких условиях $\frac{h}{d^n} \to 0$ ($d \to 0$)).

На кривую Γ и ее радиус-вектор мы наложим дополнительные ограничения:

1) параметризация кривой Γ регулярна, т. е. производная по параметру $r' \neq 0$;

2) $r \in C^n$.

Теорема о порядке соприкосновения кривой с поверхностью. *Пусть регулярная кривая* Γ *и поверхность* S *имеют общую точку* M_1. *При этом регулярная параметризация кривой* Γ : $r = r(t) = \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$, $a \le t \le b$, $r' \neq 0$, $r \in C^n$, *а поверхность* S *в окрестности точки* M_1 *задается уравнением* $\varphi(x, y, z) = 0$, $\varphi \in C^n$. *Для того, чтобы кривая* Γ *имела в точке* M_1 *с поверхностью* S *соприкосновение порядка выше* n, *необходимо и достаточно, чтобы функция* $F(t) = \varphi(x(t), y(t), z(t))$ *удовлетворяла условиям:*

$$F(t_1) = 0, \quad F'(t_1) = 0, \quad \ldots, \quad F^{(n)}(t_1) = 0$$

(*здесь* t_1 – *значение параметра, соответствующее точке* M_1).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть P – точка на кривой, соответствующая параметру t. Тогда, согласно лемме (см. с. 567), расстояние $h = \rho(P, S)$ от точки P до поверхности S имеет порядок $|F(t)|$. Получим столь же простую оценку для расстояния $d = \rho(P, M_1) = |r(t) - r(t_1)|$ между точками P и M_1 кривой Γ. Так как кривая Γ по условию регулярна, то $|r'(t_1)| = \lim\limits_{t \to t_1} \left|\frac{\Delta r(t_1)}{t - t_1}\right| \neq 0$, следовательно, $d = |r(t) - r(t_1)| = |\Delta r(t_1)| \asymp |t - t_1|$. Таким образом, условие $\frac{h}{d^n} \to 0$ ($d \to 0$) эквивалентно условию $\left|\frac{F(t)}{(t - t_1)^n}\right| \to 0$ ($t \to t_1$). Это есть необходимое и достаточное условие соприкосновения кривой с поверхностью порядка n без предположения гладкости функции F. При наших предположениях функция $F(t) \in C^n(a, b)$. Раскладывая функцию F по локальной формуле Тейлора (п. 27.2 с. 112), получим, что

$$\left|\frac{F(t)}{(t - t_1)^n}\right| \to 0 \, (t \to t_1) \;\Leftrightarrow\; F(t_1) = 0,\ F'(t_1) = 0,\ \ldots,\ F^{(n)}(t_1) = 0. \;\blacktriangleright$$

Замечание. Если поверхность φ и кривая Γ имеют меньшую степень гладкости, чем n, то в качестве необходимого и достаточного условия соприкосновения порядка выше n кривой с поверхностью мы получили условие $\left|\frac{F(t)}{(t-t_1)^n}\right| \to 0 \quad (t \to t_1)$. Не следует считать, что это условие и условие существования производной порядка n эквивалентны. Если $n = 0$, то условие $\left|\frac{F(t)}{(t-t_1)^n}\right| \to 0$ $(t \to t_1)$ и условие $F(t_1) = 0$ эквивалентны. Если $n = 1$, то условия $\left|\frac{F(t)}{(t-t_1)^n}\right| \to 0 \quad (t \to t_1)$ и $F'(t_1) = 0$ эквивалентны (при $n = 0$ и $n = 1$, мы предполагаем, что функция F, по крайней мере, непрерывна). Если же $n > 1$, то начиная с некоторого номера, производные $F''(t_1)$,..., $F^{(n)}(t_1)$ могут не существовать.

Соприкосновение поверхностей. Пусть S и S_1 – две поверхности, проходящие через точку M_1 (см. рис. 19.6). Введем понятие соприкосновения поверхностей в их общей точке. Для этого на поверхности S_1 возьмем точку $Q \in S_1$ и измерим $\rho(Q, M_1) = d$ – расстояние от точки Q до M_1 и $h = \rho(Q, S)$ – расстояние от точки Q до поверхности S (надо опустить из Q перпендикуляр на S). Пусть теперь $d \to 0$.

Определение. Если $\frac{h}{d^n} \to 0$ ($d \to 0$), то мы будем говорить, что *поверхность* S_1 *в точке* M_1 *имеет с заданной поверхностью* S *соприкосновение порядка выше* n.

Отметим, что понятие соприкосновения поверхностей не симметрично относительно поверхностей.

Из определения следует, например, что просто совпадение поверхностей в одной точке – это соприкосновение порядка выше нулевого, а касательная плоскость к поверхности S – поверхность, имеющая с S соприкосновение порядка выше первого.

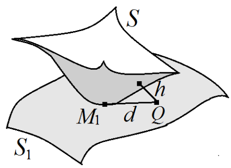


Рис. 19.6.

Построим такую поверхность, которая с заданной поверхностью S имеет соприкосновение порядка выше второго. Существует стандартный выбор таких поверхностей, это параболоиды.

Определение соприкасающегося параболоида. *Соприкасающимся параболоидом к поверхности* S в заданной точке M_1 называется такой параболоид Π, который имеет вершину в точке M_1 и имеет с поверхностью S соприкосновение порядка выше второго (см. рис. 19.7).

Пусть M_1 – регулярная точка поверхности. Тогда поверхность в окрестности этой точки может быть задана уравнением

$z = z(x,y)$ (см. п. 90 с. 556). При изучении свойств соприкасающегося параболоида Π удобно в качестве системы координат взять начало в точке $O = M_1$; оси Ox и Oy взять в касательной плоскости; ось Oz направить по нормали к поверхности. Тогда параболоид с вершиной в точке $M_1(0,0,0)$ имеет уравнение $z_\Pi = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$. В зависимости от того, какова квадратичная форма $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$, мы можем получить эллиптический параболоид (если квадратичная форма знакоопределенная), гиперболический параболоид (если квадратичная форма знакопеременная), или параболический цилиндр. В последнем случае дискриминант $B^2 - AC = 0$. К последнему случаю относится и дважды вырожденный случай – когда все коэффициенты квадратичной формы равны нулю; тогда $z_\Pi = 0$ и параболоид вырождается в плоскость xOy.

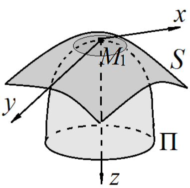


Рис. 19.7.

Выясним, когда параболоид Π будет иметь с поверхностью S в точке M_1 соприкосновение порядка выше второго. Так как оси Ox и Oy лежат в касательной плоскости, то $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_0 = \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_0 = 0$.

Будем считать, что функция $z = z(x,y) \in C^2$ в точке $(0,0)$. Тогда по формуле Тейлора при (x,y) из некоторой окрестности этой точки

$$z_S = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_0 x^2 + 2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)_0 xy + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_0 y^2\right\} + o\left(x^2+y^2\right)$$

при $x^2 + y^2 \to 0$. Если обозначим $r = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_0$, $s = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)_0$, $t = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_0$, то $z_S = \frac{1}{2}\left\{rx^2 + 2sxy + ty^2\right\} + o\left(x^2+y^2\right)$ $(x^2+y^2 \to 0)$. Обозначим π_0 касательную плоскость к поверхности в нулевой точке, т. е. плоскость $z = 0$ в нашем случае. Тогда можно записать $\rho\left(M(x,y,z), \pi_0\right) = \frac{1}{2} II(x,y) + o\left(x^2+y^2\right)$ $(x^2 + y^2 \to 0)$. Значит, вторая квадратичная форма характеризует расстояние от точки на поверхности, близкой к точке касания, до касательной плоскости, т. е. характеризует уклонение поверхности от касательной плоскости.

Теорема о существовании и единственности соприкасающегося параболоида. *Пусть поверхность S задана уравнением $z = z(x,y)$, где $z(x,y) \in C^2$ в точке $(0,0)$, $z(0,0) = 0$ и $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_0 = \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_0 = 0$ (т. е. поверхность отнесена к касательной* *плоскости* $z = 0$). *Тогда в начале координат существует соприкасающийся параболоид, и притом, единственный.*

Отметим, что из условий теоремы следует, что точка $(0, 0, 0)$ – регулярная точка поверхности.

Доказательство. Существование. Рассмотрим параболоид $z_\Pi = \frac{1}{2}\left\{rx^2 + 2sxy + ty^2\right\}$, определяющийся вторым дифференциалом функции $z = z(x, y)$. Найдем порядок величины $d = \sqrt{x^2 + y^2 + z_\Pi^2}$ (расстояние от начала координат до точки с координатами (x, y, z_Π) на параболоиде). Но $z_\Pi^2 \leq \Omega\left(x^2 + y^2\right)$, где Ω – некоторое положительное число. Значит, $d \asymp \sqrt{x^2 + y^2}$, даже $d \approx \sqrt{x^2 + y^2}$. Также для h – расстояния от точки на параболоиде до поверхности S имеем $h \asymp |z_S - z_\Pi| = o\left(x^2 + y^2\right)$, откуда $\frac{h}{d^2} \to 0$ ($d \to 0$). Таким образом, параболоид, имеющий уравнение $z_\Pi = \frac{1}{2}\left(rx^2 + 2sxy + ty^2\right)$ и определяющийся вторым дифференциалом функции $z = z(x, y)$, действительно является соприкасающимся параболоидом.

Единственность. Пусть $\Pi\colon z = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$ – соприкасающийся параболоид к поверхности S. Тогда всякая кривая на поверхности параболоида будет иметь с поверхностью S соприкосновение порядка выше второго. Запишем уравнение поверхности в виде $\varphi(x, y, z) = z - z(x, y) = 0$. Положим сначала $y = 0$ и возьмем x в качестве параметра на получившейся на параболоиде кривой. Тогда на Π получим кривую $\begin{cases} x = x \\ y = 0 \\ z = Ax^2 \end{cases}$, которая должна иметь с S соприкосновение выше второго порядка. По теореме о соприкосновении кривых с поверхностью (см. с. 570) функция $F(x) = \varphi(x, 0, Ax^2) = Ax^2 - z(x, 0)$ должна иметь $F''(0) = 0$, т. е. $2A - r = 0$, откуда получаем $A = \frac{r}{2}$. Аналогично, положив $x = 0$ получим $C = \frac{t}{2}$, и положив $x = y$ получим $B = \frac{s}{2}$. Значит, соприкасающийся параболоид единственный. ▶

Существование и единственность соприкасающегося параболоида позволяют классифицировать точки поверхности. Точка на поверхности называется *эллиптической*, *гиперболической* или *параболической*, если соприкасающийся параболоид является соответственно эллиптическим параболоидом, гиперболическим параболоидом или параболическим цилиндром (см., например, далее рис. 19.10 в, точки 1, 2 и 3 соответственно). Если все коэффициенты A, B, C соприкасающегося параболоида равны нулю, то точка называется *точкой уплощения* (рис. 19.10 в, точка 4), в этом случае соприкасающийся параболоид вырождается в плоскость.

4 семестр
Лекция 22
(29.04.69)

91.3. Геометрический смысл второй квадратичной формы

Пусть $S \in C^2$ – регулярная поверхность, $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$, $z = z(u,v)$ – ее параметрические уравнения, $M(u,v) \in S$ – точка на поверхности и $R = R(u,v)$ ее радиус-вектор. Рассмотрим приращение радиус-вектора поверхности в точке M. По формуле Тейлора

$$\Delta R = R(u+du, v+dv) - R(u,v) = dR + \tfrac{1}{2}d^2R + \alpha\,,$$

где α – бесконечно малый вектор, $|\alpha| = o\left(dR^2\right)$. Вектор dR расположен в касательной плоскости к поверхности S, а как расположен d^2R – нам пока не ясно. Рассмотрим скалярное произведение $(\Delta R, \overline{n})$. Это есть проекция $(\Delta R, \overline{n}) = \text{Пр}_{\overline{n}}\Delta R$ на нормаль $\overline{n}$ к поверхности. Имеем

$$(\Delta R, \overline{n}) = (dR, \overline{n}) + \tfrac{1}{2}\left(d^2R, \overline{n}\right) + (\alpha, \overline{n}) = \tfrac{1}{2}II + o\left(dR^2\right)$$

(здесь $(dR, \overline{n}) = 0$, так как $dR \perp \overline{n}$). Значит, вторая квадратичная форма дает величину уклонения вектора ΔR от касательной плоскости π в точке поверхности $M(u,v) \in S$, когда точка по поверхности переместилась на (du, dv). В частности, отсюда следует, что вторая квадратичная форма II не обязана быть положительной. Она будет знакоопределенной в эллиптических точках поверхности; она является полуопределенной в параболических точках и является знакопеременной в гиперболических точках, так как главная часть уклонения совпадает с уклонением соприкасающегося параболоида (так он и был определен). Значит, и II и соприкасающийся параболоид характеризуют уклонение поверхности от ее касательной плоскости. Следовательно, вторая квадратичная форма II определяет внешние свойства поверхности (ее расположение в пространстве). Аналогично в одномерном случае плоских кривых Кривизна кривой характеризуется ее уклонением от касательной прямой.

Теперь понятно, что вторая квадратичная форма, показывающая величину уклонения вектора ΔR от касательной плоскости, должна характеризовать кривизну поверхности. Покажем это.

Замечание. Не надо думать, что для поверхностей в пространстве первую и вторую квадратичную форму можно задавать произвольно, лишь бы первая была положительно определена. Не всякая пара форм, из которых первая положительно определена, а вторая произвольна, определяют поверхность (вторая квадратичная форма в некотором смысле зависит от первой). Это видно уже из уравнения соприкасающегося параболоида $z = \frac{1}{2}(rx^2 + 2sxy + ty^2)$. Здесь коэффициенты r, s, t не произвольны, а являются вторыми производными от одной функции, задающей поверхность (и так как между вторыми частными производными существует некоторое соотношение, то должно быть определенное соотношение и для коэффициентов II).

91.4. Кривизна кривых на поверхности

Пусть есть пространственная кривая $r(s)$, отнесенная к *нормальной параметризации* [3] (п. 34.4 с. 144). Тогда $r'(s) = \overline{t}$ – единичный вектор касательной к кривой, а $r''(s)$ – вектор, который лежит в соприкасающейся плоскости к кривой. Кривизна k кривой (см. п. 34.5 с. 144) определяется из формулы $r''(s) = k\overline{\nu}$ ($\overline{\nu}$ – вектор главной нормали, который перпендикулярен $\overline{t}$ и лежит в соприкасающейся плоскости; $r''(s) \perp \overline{t}$).

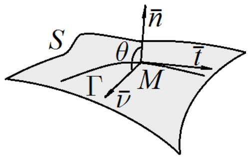


Рис. 19.8.

Пусть на поверхности $R = R(u, v)$, проходящей через точку $M(u, v)$, лежит кривая Γ : $u = u(s)$, $v = v(s)$. Обозначим $\overline{n}$ – нормаль к поверхности (см. рис. 19.8) и угол $\widehat{\overline{n}\overline{\nu}} = \theta$. Направление кривой определяется отношением $(du : dv)$. Таким образом, кроме характеристик, относящихся собственно к кривой и никак не связанных с поверхностью, появились еще характеристики, определяющие ее положение на поверхности: θ и $(du : dv)$ (θ не есть абсолютная геометрическая характеристика, так как нормаль к поверхности может иметь два противоположных направления, так что θ зависит от выбора системы координат). Значит, у нас есть три типа характеристик:

[3] Т. е. $|r'(s)| = 1$; такую параметризацию называют еще "натуральной" или "естественной". (Ред.)

$\overline{t}$, $\overline{\nu}$ – характеристики Γ, как пространственной кривой;

I, II – характеристики поверхности S;

θ, $(du : dv)$ – характеристики, связывающие положение кривой и поверхности.

Оказывается, что для того, чтобы узнать кривизну кривой, лежащей на поверхности, "надо знать много о поверхности, и почти ничего о кривой". Надо знать лишь угол θ и направление $(du : dv)$.

Найдем $r''(s)$:

$r'(s) = R_u u' + R_v v'$,

$r''(s) = R_{uu}\,(u')^2 + 2R_{uv}u'v' + R_{vv}\,(v')^2 + R_u u'' + R_v v''$.

Умножим $r''(s)$ на $\overline{n}$. Так как $R_u \perp \overline{n}$, $R_v \perp \overline{n}$ (оба этих вектора лежат в касательной плоскости), то

$$(r'', \overline{n}) = R_{uu}\overline{n}\left(\tfrac{du}{ds}\right)^2 + 2R_{uv}\overline{n}\tfrac{du}{ds}\tfrac{dv}{ds} + R_{vv}\overline{n}\left(\tfrac{dv}{ds}\right)^2.$$

Так как $r'' = k\overline{\nu}$, то слева стоит

$$(r'', \overline{n}) = k\cos\widehat{\overline{\nu}\,\overline{n}} = k\cos\theta,$$

и тогда (см. с. 566)

$$k\cos\theta = \frac{Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2}{ds^2} = \frac{Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2}{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2} = \frac{II}{I}.$$

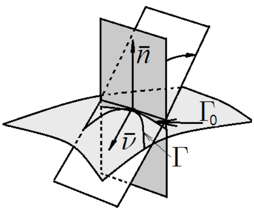


Рис. 19.9.

Если направление $(du : dv)$ фиксировано, то

$$k\cos\theta = \tfrac{II}{I} = k_0 = \text{const}.$$

Величина k_0 называется *нормальной кривизной* поверхности в данном направлении $(du : dv)$. С точностью до знака k_0 она равна кривизне кривой Γ_0, имеющей то же направление $(du : dv)$ и для которой угол между главной нормалью $\overline{\nu}$ и нормалью $\overline{n}$ к поверхности обращается в нуль. Это осуществляется в случае, когда Γ_0 – плоская кривая, в плоскости которой лежит нормаль к поверхности (см. рис. 19.9).

Итак, можно написать

$$\frac{II}{I} = k_0 = k\cos\theta.$$

Доказанная формула устанавливает, что для данного направления $\left|\frac{II}{I}\right| = |k_0|$ ($|k_0|$ – кривизна Γ_0). Таким образом, нормальной кривизне приписывают знак, т. е. под нормальной кривизной понимают не просто кривизну нормального сечения, но эту кривизну со знаком, так что $k_0 = \frac{II}{I}$.

Нами получена

Теорема Менье. *Кривизна произвольной кривой, лежащей на поверхности, определяется через нормальную кривизну поверхности в направлении данной кривой и угол* $\theta = \widehat{\overline{\nu}\,\overline{n}}$ *по формуле*

$$k_0 = \frac{II}{I} = k\cos\theta\,.$$

Эта формула утверждает, в частности, что кривизна плоского сечения определяется нормальной кривизной поверхности в направлении сечения и углом между плоскостью этого сечения и плоскостью соответствующего нормального сечения. Если перейти в формуле $k_0 = k\cos\theta$ от кривизны к соответствующему радиусу кривизны (см. круг кривизны и радиус круга кривизны в п. 34.6), то получим

$$R_0|\cos\theta| = R\,,$$

где R_0 – радиус кривизны нормального сечения, а R – радиус кривизны наклонного сечения. Можно показать, что геометрическое место центров кривизны наклонных сечений будет окружность. Эта окружность называется *окружностью Менье.* Чем ближе плоскость сечения к касательной плоскости, тем больше кривизна кривой, получающейся в сечении.

Мы видим также, что кривизна нормального сечения поверхности совпадает с кривизной соприкасающегося параболоида, так как если возьмем начало координат в точке соприкосновения параболоида и поверхности, то квадратичные формы II и I у параболоида и поверхности будут в этой точке совпадать.

Будем теперь поворачивать плоскость, проходящую через $\overline{n}$. Посмотрим, как зависят нормальные кривизны поверхности от направления $(du:dv)$. Для этого через точку M на поверхности проведем касательную плоскость π и за координатные векторы в этой плоскости выберем векторы R_u и R_v . В любом направлении $(du:dv)$, определяемом этими векторами, значит, и вектором dR , отложим на этой касательной плоскости от точки M отрезок длины $\sqrt{\frac{1}{|k|}}$ (k – кривизна нормального сечения в этой точке во взятом направлении). Тогда в касательной плоскости мы получим кривую (см. рис. 19.10), называемую *индикатрисой кривизны поверхности в точке* M , или *индикатрисой Дюпена.* Пусть x и y – координаты точки индикатрисы, взятой в направлении $(du:dv)$. Тогда, уравнение индикатрисы Дюпена

$$R_u x + R_v y = \frac{1}{\sqrt{k}}\frac{R_u du + R_v dv}{|R_u du + R_v dv|}.$$

Преобразуем это уравнение. Возведем равенство скалярно в квадрат:

$$Ex^2 + 2Fxy + Gy^2 = \tfrac{1}{|k|}.$$

Но $|k| = \frac{|II|}{|I|}$. Тогда

$$Ex^2 + 2Fxy + Gy^2 = \frac{Ex^2 + 2Fxy + Gy^2}{|Lx^2 + 2Mxy + Ny^2|}$$

или

$$\left|Lx^2 + 2Mxy + Ny^2\right| = 1$$

– преобразованное уравнение индикатрисы Дюпена.

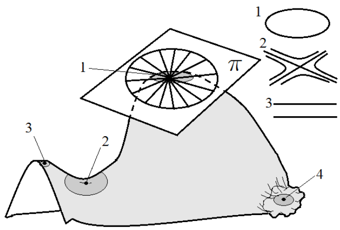


Рис. 19.10.

Мы видим, что если вторая квадратичная форма знакоопределенная, то индикатриса кривизны – эллипс; если знакопеременная, то – пара сопряженных гипербол; в параболическом случае – пара прямых (см. рис. 19.10, случаи 1, 2, 3 соответственно). Таким образом, индикатриса Дюпена определена во всех случаях, когда II не равна тождественно нулю. Если $II \equiv 0$, то точка есть точка уплощения (см. рис. 19.10, точка 4), соприкасающийся параболоид вырождается в плоскость $z_\Pi = 0$ и кривизна любого нормального сечения равна нулю. Можно считать в этом случае, что индикатриса Дюпена есть одна бесконечно удаленная точка.

4 семестр
Лекция 23
(30.04.69)

"При выводе индикатрисы кривизны не было полного понимания." (С. Б. С)

Геометрический смысл индикатрисы Дюпена. Рассмотрим случай, когда поверхность задана уравнением $z = f(x,y)$, где

$f \in C^2$. Кроме того, предположим, что xOy – касательная плоскость к поверхности в точке $(0,0)$, т. е. $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 = 0$. В этом случае вторая квадратичная форма поверхности записывается как

$$II = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0 dx^2 + 2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_0 dxdy + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_0 dy^2 = rdx^2 + 2sdxdy + tdy^2 .$$

Рассмотрим следующую задачу. Касательную плоскость $z = 0$ к поверхности сдвинем параллельно самой себе по вертикали на малую величину α (см. рис. 19.11 а), случай окрестности эллиптической точки). Линия пересечения такой плоскости $z = \alpha$ с поверхностью будет некоторая кривая. Очевидно, что если мы устремим $\alpha \to 0$, то эта линия пересечения будет стремиться к точке касания $(0,0)$. В окрестности гиперболической точки секущие плоскости надо перемещать и вверх и вниз (рис. 19.11 б).

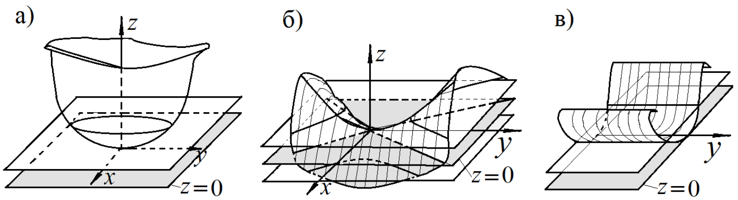


Рис. 19.11.

Раскладывая уравнение поверхности по формуле Тейлора, получим $\alpha = \left|\frac{1}{2}\left(rx^2 + 2sxy + ty^2\right) + \left(x^2 + y^2\right)\varepsilon\left(x,y\right)\right|$, где $\varepsilon(x,y) \to 0$ при $\alpha \to 0$. Мы учли, что $f \in C^2$ и частные производные функции в точке $(0,0)$ обращаются в нуль. Заменим $x = \xi\sqrt{2\alpha}$, $y = \eta\sqrt{2\alpha}$, тогда в новых координатах получим

$$\alpha = \left|\frac{1}{2}(r\xi^2 2\alpha + 2s\xi\eta 2\alpha + t\eta^2 2\alpha) + 2\alpha\left(\xi^2 + \eta^2\right)\varepsilon\left(\xi\sqrt{2\alpha}, \eta\sqrt{2\alpha}\right)\right| ,$$

или, разделив на α ,

$$1 = \left|r\xi^2 + 2s\xi\eta + t\eta^2 + \left(\xi^2 + \eta^2\right)\varepsilon\left(\xi\sqrt{2\alpha}, \eta\sqrt{2\alpha}\right)\right| .$$

Значит, предельное уравнение при $\alpha \to 0$ будет

$$1 = \left|r\xi^2 + 2s\xi\eta + t\eta^2\right| ,$$

т. е. получилось уравнение индикатрисы Дюпена.

Таким образом, индикатриса Дюпена имеет следующий геометрический смысл: плоскости, параллельные касательной плоскости к поверхности, пересекают поверхность по кривым, которые при указанных выше коэффициентах подобия будут сходится к индикатрисе Дюпена.

91.5. Замечательные направления на поверхности

Какие замечательные направления мы можем наблюдать на индикатрисе Дюпена? В гиперболическом случае, например, это, прежде всего, асимптоты.

Определение. Направление $(du : dv)$ на регулярной поверхности называется *асимптотическим*, если нормальная кривизна поверхности в этом направлении равна нулю.

Нормальная кривизна в точке определяется отношением $\frac{II}{I}$. Значит, асимптотическое направление есть такое направление, для которого $II = 0$, т. е.

$$Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2 = 0\,.$$

Относительно неизвестного нам асимптотического направления $(du : dv)$ это есть квадратное уравнение, которое не имеет действительных корней, если точка эллиптическая; будет иметь один корень, если точка параболическая (это соответствует одному асимптотическому направлению); будет иметь два корня, если точка гиперболическая (это соответствует двум асимптотическим направлениям). Точки, в которых всякое направление является асимптотическим, точки уплощения, характеризуются тем, что $II \equiv 0$, это эквивалентно тому, что $L = 0$, $M = 0$, $N = 0$.

Можно рассмотреть другую задачу: будут ли проходящие через точку на поверхности координатные линии иметь асимптотические направления? Подставляя в уравнение для асимптотических направлений последовательно $(du : 0)$ и $(0 : dv)$, получим что $N = 0$ и $L = 0$. Значит, если в какой-то точке координатные линии имеют асимптотические направления, то в этой точке $II = 2Mdudv$.

Существует еще одна постановка: найти на поверхности такую кривую, которая в любой точке имеет асимптотическое направление. Такая кривая на поверхности называется *асимптотической линией*. Равенство $Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2 = 0$, рассматриваемое как дифференциальное уравнение, и есть уравнение асимптотической линии.

Геометрические свойства асимптотических линий. В любой точке асимптотической линии выполняется равенство $Ldu^2+2Mdudv+Ndv^2=0$, т. е. $II=0$, и из определения второй квадратичной формы следует, что в любой точке асимптотической линии $\left(d^2R,\overline{n}\right)=0$. Мы знаем, что для любой кривой на поверхности вектор dR идет вдоль касательной, откуда следует, что $(dR,\overline{n})=0$. Значит, вдоль асимптотической линии $dR\perp\overline{n}$ и $d^2R\perp\overline{n}$. Плоскость, в которой лежат dR и d^2R, является соприкасающейся плоскостью кривой Γ (см. п. 34.3). Следовательно, асимптотическая линия на поверхности Γ обладает тем свойством, что для нее соприкасающаяся плоскость в любой точке перпендикулярна нормали, т. е. соприкасающаяся плоскость совпадает с касательной плоскостью. Обратно, если соприкасающаяся плоскость в любой точке кривой является касательной к поверхности в этой точке, то $d^2R\perp\overline{n}$, т. е. в любой точке этой кривой выполнено условие $\left(d^2R,\overline{n}\right)=0$, что и означает, что в любой точке кривая имеет асимптотическое направление.

Очевидно, что если какая-то прямая принадлежит поверхности, то эта прямая является асимптотической линией, так как нормальное сечение в направлении этой прямой совпадает с самой прямой и, следовательно, имеет нулевую кривизну. Отметим, что этот случай можно считать включенным в предыдущее утверждение, так как любая плоскость, содержащая эту прямую, в том числе касательная плоскость, является соприкасающейся плоскостью.

Теперь мы можем выяснить, когда координатная сеть состоит из асимптотических линий. В этом случае для координатных линий должно выполняться тождественно в некоторой области условие $II=2Mdudv$. Из теории дифференциальных уравнений в этом случае следует, что *если $S\in C^3$, то в окрестности любой гиперболической точки могут быть введена такая параметризация, что координатная сетка состоит из асимптотических линий.* [4)]

Определение. *Сопряженными направлениями в точке P на поверхности* называются направления $(du:dv)$ и $(\delta u:\delta v)$, для которых в этой точке выполняется равенство

$$Ldu\delta u+M\left(du\delta v+\delta udv\right)+Ndv\delta v=0\,.$$

[4)] Соответствующая теорема доказана в [17] гл. VII § 2. (Ред.)

Заметим, что условие сопряженности симметрично относительно нумерации направлений.

Непосредственной проверкой можно убедиться, что условие сопряженности направлений $(du : dv)$ и $(\delta u : \delta v)$ допускает компактную геометрическую запись $(dR, \delta\overline{n}) = dR \cdot \delta\overline{n} = 0$ или $(\delta R, d\overline{n}) = \delta R \cdot d\overline{n} = 0$.

Если сопряженные направления совпадают, то они называются *самосопряженными*. Самосопряженные направления удовлетворяют уравнению $II = 0$ асимптотических направлений. Следовательно, асимптотические направления являются самосопряженными.

Определение. Направления на поверхности $(du : dv)$ и $(\delta u : \delta v)$ называются *главными*, если они ортогональные и сопряженные.

Известно, что введенные понятия также связаны с направлениями на индикатрисе Дюпена: сопряженные направления являются направлениями сопряженных диаметров [5] индикатрисы Дюпена. Главные направления являются направлениями, на которых нормальная кривизна поверхности достигает экстремальных значений, они совпадают с направлениями осей индикатрисы Дюпена.

Итак, главные направления удовлетворяют системе уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} dR \cdot \delta R = 0 \\ dR \cdot \delta\overline{n} = 0 \end{array} \right., \tag{*}$$

или в координатной форме

$$\left\{ \begin{array}{l} Edu\delta u + F\,(du\delta v + dv\delta u) + Gdv\delta v = 0 \quad \text{(условие их ортогональности)}, \\ Ldu\delta u + M\,(du\delta v + dv\delta u) + Ndv\delta v = 0 \quad \text{(условие их сопряженности)}. \end{array} \right.$$

Это есть система двух уравнений относительно отношений $(du : dv)$ и $(\delta u : \delta v)$. Перепишем эту систему как систему линейных однородных уравнений относительно δu, δv:

$$\left\{ \begin{array}{l} (Edu + Fdv)\,\delta u + (Fdu + Gdv)\,\delta v = 0 \\ (Ldu + Mdv)\,\delta u + (Mdu + ndv)\,\delta v = 0 \end{array} \right. .$$

[5] Диаметр линии второго порядка – прямая, проходящая через середины параллельных хорд. Диаметр называется сопряженным относительно хорд (а также направлений хорд), которые он делит пополам. Диаметры центральных линий второго порядка пересекаются в центре линии, у нецентральных линий второго порядка диаметры параллельны или совпадают. Диаметры эллипса и гиперболы – прямые, проходящие через их центр, диаметры параболы – ось параболы и прямые параллельные оси. (См. [14] т. 2 с. 181.) (Ред.)

Условие существования нетривиальных решений этой системы

$$\begin{vmatrix} Edu + Fdv & Fdu + Gdv \\ Ldu + Mdv & Mdu + Ndv \end{vmatrix} = 0\,,$$

его можно переписать как

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -dudv & du^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0\,.$$

Так как I есть положительно определенная квадратичная форма, то вторая строка в определителе в нуль обращаться не может. Если третья строка пропорциональна второй, то $II = \lambda I$, и нормальная кривизна в любом направлении одинакова. В этом случае любое направление является главным направлением. Такие точки называются *шаровыми* или *омбилическими*; в частности, омбилическими точками являются точки уплощения.

Определение. *Линиями кривизны поверхности* называются такие линии на поверхности, которые в любой своей точке имеют главное направление.

Уравнение для главных направлений

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -dudv & du^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0\,,$$

рассматриваемое как дифференциальное уравнение относительно du и dv, дает нам линии кривизны. Значит, линии кривизны пересекаются под некоторым вполне определенным углом (за исключением омбилических точек), и для поверхности класса C^3 можно в качестве координатных линий принять линии кривизны. Если при этом выполняется условие ортогональности, то $F = 0$ и $I = Edu^2 + Gdv^2$.

Пусть направления $(du:0)$ и $(0:\delta v)$ – сопряженные. Из уравнения для определения сопряженных направлений получаем $M = 0$. Следовательно, в каждой точке, где координатные линии сопряженные $II = Ldu^2 + Ndv^2$.

Замечание. Если мы отнесем поверхность к таким криволинейным координатам, которые в регулярной точке касаются главных направлений, то и I и II приводятся к сумме квадратов, так как $F = 0$ в виду ортогональности координатной сети, а $M = 0$ в виду сопряженности. Таким образом, задача нахождения главных направлений есть задача об одновременном приведении двух квадратичных форм к сумме квадратов.

4 семестр
Лекция 24
(07.05.69)

Теорема Родрига. *Для того, чтобы направление* $(d) = (du : dv)$ *на поверхности было главным, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$d\overline{n} = \lambda dr\ .$$

Вообще говоря, dr и $d\overline{n}$ не коллинеарны; но те направления, в которых они коллинеарны – главные направления.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Н е о б х о д и м о с т ь. Допустим, что (d) – главное направление в точке M на поверхности. Рассмотрим в этой же точке направление на поверхности (δ), перпендикулярное (d). Как известно, пара направлений есть пара главных направлений, если они ортогональны и сопряжены. Значит, направление δ тоже главное. Так как $d\overline{n}$ лежит в касательной плоскости, то $d\overline{n} = \lambda dr + \mu \delta r$. Умножим это равенство скалярно на δr: $d\overline{n} \cdot \delta r = \mu \delta r^2$. В силу сопряженности направлений (*): $d\overline{n} \cdot \delta r = 0$. Следовательно, $\mu = 0$ и $d\overline{n} = \lambda dr$.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть в точке M поверхности выполняется равенство $d\overline{n} = \lambda dr$. Докажем, что тогда направление dr является главным. Для этого надо доказать, что перпендикулярное к нему направление δr с ним сопряжено. Умножим равенство $d\overline{n} = \lambda dr$ на δr, получим $d\overline{n} \cdot \delta r = \lambda dr \delta r = 0$, т.е. в силу (*) направления dr и δr сопряженные. Следовательно, направления dr и δr главные. ►

Замечание. Если в точке M поверхности выполняется равенство $d\overline{n} = \lambda dr$, то λ – нормальная кривизна, соответствующая направлению (d) в точке M. Действительно, умножим равенство $d\overline{n} = \lambda dr$ на dr, тогда $d\overline{n} \cdot dr = \lambda dr^2$, $-II = \lambda I$, т.е. $\lambda = -\frac{II}{I} = -k\,(d)$. Как мы уже отмечали, значение этой нормальной кривизны является экстремальным.

91.6. Главные кривизны

Главные кривизны – это кривизны k_1 и k_2, соответствующие главным направлениям, и значит, они являются эстремальными значениями нормальных кривизн поверхности. Возникают следующие вопросы.

1) Как связаны кривизны в любом направлении с главными кривизнами?

2) Как, зная поверхность S, т. е. зная формы I и II, вычислить главные кривизны?

В первой задаче надо выразить k – кривизну произвольного нормального сечения – через k_1 и k_2. Пусть π – касательная плоскость и dr_1 соответствует меньшей главной кривизне k_1 ($k_1 \leq k_2$); dr_2 соответствует большей главной кривизне k_2, а нормальная кривизна $k = k(d)$ поверхности соответствует произвольному направлению dr. Тогда, если мы знаем угол θ между dr_1 и dr, то можем найти k. Имеет место

Теорема Эйлера. *Пусть k_1 и k_2 – главные кривизны поверхности S в точке P, $k_1 \leq k_2$, θ – угол между направлением dr_1, соответствующим кривизне k_1, и направлением dr. Тогда значение k нормальной кривизны, соответствующей направлению dr в точке P, равно*

$$k = k_1 \cos^2\theta + k_2 \sin^2\theta\,.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Введем специальную систему координат: начало координат O поместим в точку P, ось Oz направим по нормали к поверхности, оси Ox и Oy возьмем в касательной плоскости и направим их по главным направлениям dr_1 и dr_2, соответственно. Если $z = z(x,y)$ – уравнение поверхности S в такой системе координат, то первые частные производные функции $z = z(x,y)$ в точке P обращаются в 0 и $I = dr^2 = dx^2 + dy^2$. Учитывая, что направления осей координат Ox и Oy сопряжены, получим что $II = rdx^2 + tdy^2$. Значит, нормальная кривизна поверхности, соответствующая направлению dr, будет

$$k\,(d) = \frac{II}{I} = \frac{rdx^2 + tdy^2}{dx^2 + dy^2}\,.$$

Отметим, что направление $(dx : 0)$ дает нам $r = k_1$, а направление $(0 : dy)$ дает $t = k_2$. Поэтому, нормальную кривизну поверхности, соответствующую направлению dr, мы можем записать как $k\,(d) = k_1 \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + k_2 \left(\frac{dy}{ds}\right)^2$, где $ds^2 = dx^2 + dy^2$. Но $\frac{dx}{ds}$ и $\frac{dy}{ds}$ – направляющие косинусы направления dr, следовательно, $k\,(d) = k_1 \cos^2\theta + k_2 \sin^2\theta$, или $k\,(\theta) = k_1 \cos^2\theta + k_2 \sin^2\theta$. ▶

Пример. Нормальные кривизны в некоторой точке поверхности в зависимости от направления представлены кривой на на рис. 19.12[6] . Здесь взяты $k_1 < 0$, $k_2 > 0$. "Тип этой точки не очевиден. Дюпен, вместо того, чтобы откладывать на радиус-векторе величину кривизны k , откладывал $\frac{1}{\sqrt{|k|}}$, тогда вместо "розетки" получается просто пара сопряженных гипербол." (С. Б. С.)

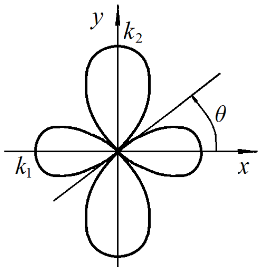


Рис. 19.12.

Дадим эквивалентное **определение** главных направлений, характеризующее их основное свойство. Главным направлением называется направление, в котором нормальная кривизна поверхности принимает экстремальное значение.

Это определение годится как для невырожденных, так и для вырожденных точек. В невырожденной точке существует два главных направления и они ортогональны. Это доказывается. Будем называть парой главных направлений те направления, которые главные и ортогональные. Можно доказать, что два направления являются парой главных направлений тогда и только тогда, когда эти направления ортогональны и сопряжены. Это утверждение показывает, что прежнее и новое определения пары главных направлений эквивалентны.

Задача вычисления главных кривизн в сущности нами уже решена, так как вычисление главных кривизн сводится к уже рассмотренным задачам. Мы знаем, во первых, как считать нормальные кривизны: $k\,(d) = \frac{II}{I}$; во-вторых, для нахождения главных направлений dr у нас составлено квадратное уравнение. Поэтому, решив это уравнение и подставив решение в выражение для k , найдем главные кривизны. Обычно главные кривизны находят как экстремальные значения функции $k(d)$. Пусть $d = (\xi : \eta)$. Тогда

$$k\,(\xi : \eta) = \frac{L\xi^2 + 2M\xi\eta + N\eta^2}{E\xi^2 + 2F\xi\eta + G\eta^2} \le k_2 \quad (\forall\, \xi,\ \eta)\,.$$

Так как $k_1 \le k \le k_2$, то неравенство обращается в равенство в том и только том случае, если $(\xi : \eta)$ соответствует направлению наибольшей кривизны. Значит, всегда

$$II\,(\xi : \eta) - k_2 I\,(\xi : \eta) \le 0\,,$$

[6] Этот рисунок является изображением в обобщенной полярной системе координат кривой $k(\theta) = k_1 \cos^2\theta + k_2 \sin^2\theta$. При $k_1 = k_2 > 0$ получаем окружность. (Ред.)

причем равенство отвечает только направлению наибольшей кривизны. Для этого направления

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \xi}\left(II\left(\xi:\eta\right)-k_2 I\left(\xi:\eta\right)\right)=0 \\ \frac{\partial}{\partial \eta}\left(II\left(\xi:\eta\right)-k_2 I\left(\xi:\eta\right)\right)=0 \end{cases},$$

т. е.

$$\begin{cases} L\xi+M\eta-k_2\left(E\xi+F\eta\right)=0 \\ M\xi+N\eta-k_2\left(F\xi+G\eta\right)=0 \end{cases}.$$

Эта система функций должна иметь ненулевое решение (ξ,η), соответствующее главному направлению, отвечающему кривизне k_2, значит, определитель этой системы обращается в 0:

$$\begin{vmatrix} L-k_2E & M-k_2F \\ M-k_2F & N-k_2G \end{vmatrix}=0\,.$$

Проведя аналогичные рассуждения для k_1, получим это же уравнение. Таким образом, обе главные кривизны удовлетворяют уравнению

$$\begin{vmatrix} L-kE & M-kF \\ M-kF & N-kG \end{vmatrix}=0\,.$$

Это невырожденное квадратное уравнение, имеющее два действительных корня, различных или совпадающих. Напишем это уравнение в развернутом виде:

$$\left(EG-F^2\right)k^2-\left(EN-2FM+GL\right)k+\left(LN-M^2\right)=0\,.$$

Произведение и полусумма корней этого уравнения

$$K=k_1k_2=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}\,,$$

$$H=\frac{1}{2}\left(k_1+k_1\right)=\frac{1}{2}\frac{EN-2FM+GL}{EG-F^2}$$

называются, соответственно, *полной* (или *гауссовой*) *кривизной поверхности* и *средней кривизной* поверхности. Мы видим, что полная (или гауссова) кривизна отрицательна в гиперболических точках, обращается в 0 в параболических точках и в точках уплощения, и положительна в эллиптических точках.

Поверхности, в которых $H\equiv 0$, называются *минимальными поверхностями*.

Итак, полная и средняя кривизны выражаются через I и II. Далее будет показано, что полную кривизну можно выразить через коэффициенты одной первой квадратичной формы. Следовательно, полная (гауссова) кривизна есть инвариант при любых изгибаниях поверхностей. Но средняя кривизна не есть инвариант при изгибаниях поверхностей.

Понятие средней кривизны поверхности введено Софи Жермен.

Понятия главных кривизн k_1 и k_2 имеют не вполне геометрический смысл, так как только с точностью до знака совпадают с кривизнами нормальных сечений. Гауссова кривизна более "геометрична".

4 семестр
Лекция 25
(13.05.69)

91.7. Теорема Гаусса о сферическом отображении

Пусть S – регулярная поверхность; $R = R(u,v)$ – радиус-вектор точки поверхности; $\overline{n}$ – единичная нормаль к поверхности, $\overline{n} = \frac{R_u \times R_v}{|R_u \times R_v|}$.

Определение. *Третьей квадратичной формой поверхности* называется квадратичная форма $d\overline{n}^2$.

Пусть σ – сфера радиуса 1. Для любой точки $M \in S$ с радиус-вектором $R(u,v)$ отложим вектор $\overline{n}(u,v)$ из центра сферы σ. Это отображение поверхности $S \to \sigma$ или $(u,v) \to \overline{n}(u,v)$ называется *сферическим* (*гауссовым*) отображением (см. рис. 19.13 а).

Как зависят свойства сферического отображения от каждой из трех квадратичных форм? Сферическое отображение не является зависящим только от внутренних свойств поверхности S, а зависит и от расположения поверхности в пространстве.

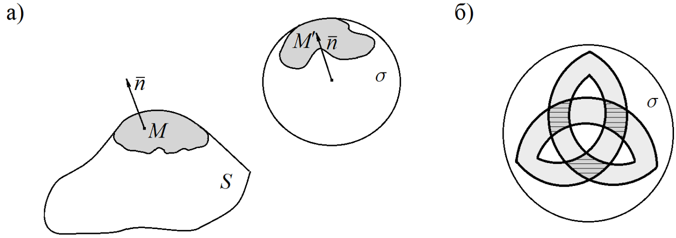


Рис. 19.13.

Пример. Пусть S – плоскость. Образ сферического отображения S есть одна точка на сфере. Но такую же внутреннюю локальную геометрию, как плоскость, имеет цилиндр. Первые квадратичные формы у плоскости и цилиндра совпадают. Однако, образ сферического отображения цилиндра есть дуга.

Сферические отображения можно рассматривать и для поверхностей $S \in C^1$, для которых понятие второй квадратичной формы не имеет смысла.

Теорема Гаусса о сферическом отображении позволит дать определение кривизны поверхности и для не очень регулярных поверхностей.

Пусть область D на поверхности S переходит в Δ на сфере при сферическом отображении. Пусть D ограничена конечным числом достаточно гладких кривых. Определим площади $\text{Пл}\,(D)$ и $\text{Пл}\,(\Delta)$ областей D и Δ. Существует связь между площадью поверхности, площадью ее сферического отображения и полной (гауссовой) кривизной поверхности.

Теорема Гаусса о сферическом отображении. *Пусть* $S \in C^2$. *Тогда при стягивании* D *в точку*: $D \to M: \quad M \in D, \;\; d(D) \to 0$,

$$\lim_{D\to M} \frac{\text{Пл}\,(\Delta)}{\text{Пл}\,(D)} = |K_M| \; .$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если нет взаимной однозначности D и Δ, то образ Δ будет самопересекающимся (как, например, на рис. 19.13 б). Под площадью будем понимать в этом случае не геометрическую площадь, а площадь с учетом самоналожений. Итак,

$$\text{Пл}\,(D) = \iint\limits_D |R_u \times R_v|\, dudv\,, \quad \text{Пл}\,(\Delta) = \iint\limits_D |\overline{n}_u \times \overline{n}_v|\, dudv\,.$$

Пусть координатным линиям $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ на поверхности S соответствуют линии кривизны. Тогда справедлива теорема Родрига $\overline{n}_u = -k_1 R_u$, $\overline{n}_v = -k_2 R_v$. Следовательно,

$$\lim_{D\to M} \frac{\text{Пл}\,(\Delta)}{\text{Пл}\,(D)} = \frac{|\overline{n}_u \times \overline{n}_v|}{|R_u \times R_v|} = \frac{|(-k_1 R_u) \times (-k_2 R_v)|}{|R_u \times R_v|} = |k_1 k_2| = |K_M|\,. \;\; \blacktriangleright$$

Теперь, если для поверхности класса $S \in C^1$ существует предел $\lim\limits_{D\to M} \frac{\text{Пл}(\Delta)}{\text{Пл}(D)}$, то этот предел может быть принят как определение гауссовой кривизны для поверхности S .

Сферические отображения дают метод изучения поверхностей с малой регулярностью.

§ 92. Деривационные формулы

Пусть $S \in C^2$. Тогда $R = R(u,v) \in C^2$ и $\overline{n}(u,v) \in C^1$. Мы знаем, что полная или гауссова кривизна $K = k_1 k_2 = \frac{LN-M^2}{EG-F^2}$. Покажем, что полную кривизну можно выразить через коэффициенты одной только первой квадратичной формы. *Деривационными формулами* называются формулы, выражающие производные векторов R_u, R_v, $\overline{n}$ через эти векторы и коэффициенты первой и второй квадратичных форм поверхностей.

Разложим векторы R_{uu}, R_{uv}, R_{vv} по некомпланарным векторам R_u, R_v, $\overline{n}$:

$$\begin{aligned} R_{uu} &= \Gamma^1_{11} R_u + \Gamma^2_{11} R_v + \lambda_{11} \overline{n}\,, \\ R_{uv} &= \Gamma^1_{12} R_u + \Gamma^2_{12} R_v + \lambda_{12} \overline{n}\,, \\ R_{vv} &= \Gamma^1_{22} R_u + \Gamma^2_{22} R_v + \lambda_{22} \overline{n}\,. \end{aligned}$$

Эти разложения составляют первую группу деривационных формул. Коэффициенты Γ^j_{ik} в этих разложениях называются *символами Кристоффеля.* Далее, имеем вторую группу деривационных формул

$$\begin{aligned} \overline{n}_u &= \alpha_{11} R_u + \alpha_{12} R_v\,, \\ \overline{n}_v &= \alpha_{21} R_u + \alpha_{22} R_v\,. \end{aligned}$$

В этих разложениях нет членов с $\overline{n}$, так как $\overline{n}_u \perp \overline{n}$ и $\overline{n}_v \perp \overline{n}$. Умножив скалярно $\overline{n}_u$ последовательно на R_u, а затем на R_v, получим

$$\begin{aligned} -L &= \alpha_{11} E + \alpha_{12} F\,, \\ -M &= \alpha_{11} F + \alpha_{12} G\,. \end{aligned}$$

Отсюда можно найти α_{11} и α_{12}:

$$\alpha_{11} = \frac{-LG + MF}{EG - F^2}\,, \quad \alpha_{12} = \frac{LF - ME}{EG - F^2}\,.$$

Аналогично получим коэффициенты α_{21} и α_{22}:

$$\alpha_{21} = \frac{NF - MG}{EG - F^2}\,, \quad \alpha_{22} = \frac{-NE + MF}{EG - F^2}\,.$$

Для определения оставшихся коэффициентов будем использовать разложение векторов R_{uu} , R_{uv} , R_{vv} по базису R_u , R_v , $\overline{n}$. Умножив вторые производные R на вектор $\overline{n}$ скалярно, получим

$$L = \lambda_{11} \,, \quad M = \lambda_{12} \,, \quad N = \lambda_{22} \,.$$

Осталось найти Γ_{ik}^{j} . Заметим, что для скалярных произведений второй и первой частных производных вектор функции $R(u,v)$ справедливы формулы $(R_{uu}, R_u) = \frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial u}\,(R_u, R_u)$, $\frac{\partial}{\partial u}\,(R_u, R_v) = (R_{uu}, R_v) + (R_u, R_{uv})$, $\frac{\partial}{\partial v}\,(R_u, R_u) = 2\,(R_{uv}, R_u)$. Умножив R_{uu} на R_u скалярно, получим $(R_{uu}, R_u) = \Gamma_{11}^1 (R_u, R_u) + \Gamma_{11}^2 (R_v, R_u)$. Учитывая формулы для производных и для коэффициентов первой квадратичной формы (п. 90.1 с. 556), получим отсюда, что $\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u} = \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F$. А после умножения R_{uu} на R_v скалярно, получим $\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v} = \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G$. Это первые два уравнения для определения Γ_{ik}^{j} . Дальше, умножая скалярно R_{uv} и R_{vv} на R_u , а затем на R_v , получим еще четыре уравнения и придем к следующей системе из шести уравнений

$$\begin{array}{ll}
\Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F = \frac{1}{2} E_u \,, & \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G = F_u - \frac{1}{2} E_v \,, \\
\Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F = \frac{1}{2} E_v \,, & \Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G = \frac{1}{2} G_u \,, \\
\Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{22}^2 F = F_v - \frac{1}{2} G_u \,, & \Gamma_{22}^1 F + \Gamma_{22}^2 G = \frac{1}{2} G_v \,,
\end{array}$$

откуда можно найти все символы Кристоффеля.

Замечание. Мы видим, что Γ_{ik}^{j} зависят только от коэффициентов первой квадратичной формы и их частных производных.

Рассмотрим случай, когда $E \equiv 1$, $F \equiv 0$ и $I = du^2 + G dv^2$. В этом случае

$$\begin{array}{ll}
\Gamma_{11}^1 = 0 \,, & \Gamma_{11}^2 = 0 \,, \\
\Gamma_{12}^1 = 0 \,, & \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2}\frac{G_u}{G} \,, \\
\Gamma_{22}^1 = -\frac{1}{2} G_u \,, & \Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2}\frac{G_v}{G} \,.
\end{array}$$

Теорема Гаусса. *Пусть $S \in C^3$. Тогда гауссова кривизна K поверхности выражается только через коэффициенты первой квадратичной формы и их производные.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Продифференцируем R_{uu} и R_{uv} по v и u, соответственно. Из условия теоремы следует, что

$$\omega = (R_{uu})_v - (R_{uv})_u = 0 \,.$$

Разложив ω по R_u , R_v , $\overline{n}$, получим

$$\omega = A R_u + B R_v + C \overline{n}$$

и, следовательно, $A=0$, $B=0$, $C=0$. Рассмотрим, например, равенство $B=0$. Подставим в формулу для ω деривационные формулы для R_{uu} и для R_{uv}. Затем продифференцируем эти формулы по u и по v, соответственно, и снова подставим в полученные выражения деривационные формулы. Получим

$$\omega=\left(\Gamma^1_{11}R_u+\Gamma^2_{11}R_v+L\overline{n}\right)_v-\left(\Gamma^1_{12}R_u+\Gamma^2_{12}R_v+M\overline{n}\right)_u=$$
$$=R_v\{\left(\Gamma^2_{11}\right)_v+\Gamma^1_{11}\Gamma^2_{12}+\Gamma^2_{11}\Gamma^2_{22}+$$
$$+L\alpha_{22}-\left(\Gamma^2_{12}\right)_u-\Gamma^1_{12}\Gamma^2_{11}-\Gamma^2_{12}\Gamma^2_{12}-M\alpha_{12}\}+\ldots=$$
$$=R_v\{\left(\Gamma^2_{11}\right)_v+\Gamma^1_{11}\Gamma^2_{12}+\Gamma^2_{11}\Gamma^2_{22}-\left(\Gamma^2_{12}\right)_u-$$
$$-\Gamma^1_{12}\Gamma^2_{11}-\Gamma^2_{12}\Gamma^2_{12}-E\tfrac{LN-M^2}{EG-F^2}\}+\ldots=0\,.$$

Мы отобрали коэффициенты при R_v. Воспользовавшись условием $B=0$, т. е. приравняв коэффициент при R_v к нулю, получим формулу Гаусса

$$\tfrac{LN-M^2}{EG-F^2}=\tfrac{1}{E}\{\left(\Gamma^2_{11}\right)_v+\Gamma^1_{11}\Gamma^2_{12}+$$
$$+\Gamma^2_{11}\Gamma^2_{22}-\left(\Gamma^2_{12}\right)_u-\Gamma^1_{12}\Gamma^2_{11}-\Gamma^2_{12}\Gamma^2_{12}\}\,.\ \blacktriangleright$$

4 семестр
Лекция 26
(14.05.69)

§ 93. Геодезическая кривизна

"Мы не чувствуем, что вместе с Землей загибаемся." (С. Б. С.)

Пусть S – поверхность, γ – кривая на поверхности S, M – точка на кривой. Обозначим через π касательную плоскость к поверхности S в точке M и через $\overline{\gamma}$ ортогональную проекцию кривой γ на плоскость π.

Определение. *Геодезической кривизной* k_g *кривой* γ на поверхности S в точке M называется величина, равная с точностью до знака[7] кривизне в этой точке кривой $\overline{\gamma}$.

Пусть $\overline{n}$ – нормальный вектор плоскости π. Проведем через кривую γ цилиндрическую поверхность Q с образующими, ортогональными плоскости π. Кривая $\overline{\gamma}$ лежит в нормальном сечении поверхности Q, в точке M, совпадающем с плоскостью π

---

[7] Геодезическая кривизна в точке M считается положительной или отрицательной в зависимости от того, образует ли вращение касательной кривой $\overline{\gamma}$ при прохождении точки M с направлением нормали к поверхности правый или левый винт (см. [17] гл. IX § 1 с. 162). (Ред.)

(см. рис. 19.14). Следовательно, кривизна k кривой γ и кривизна $\overline{\gamma}$ связаны в силу теоремы Менье формулой: $k\cos\theta = k_g$, где θ – угол между единичными векторами главных нормалей $\overline{\mu}$ и $\overline{\nu}$ этих кривых.

Рассмотрим еще нормальное сечение поверхности S в точке M, проходящее через вектор касательной к кривой γ. Получим кривую γ_n, кривизна которой равна модулю нормальной кривизны k_n поверхности S в точке M. Применим теперь теорему Менье к кривым γ и γ_n на поверхности S. Так как их главные нормали $\overline{\mu}$ и $\overline{n}$, то $k\sin\theta = |k_n|$. Отсюда следует, что $k_g^2 + k_n^2 = k^2$. Таким образом, знание нормальной кривизны поверхности и знание геодезической кривизны позволяет определить кривизну кривой γ в точке.

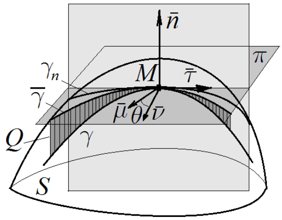


Рис. 19.14.

Пусть кривая $\gamma \in C^2$ на поверхности задана в нормальной параметризации $r(s)$ ее радиус-вектора, тогда $r'' = k\overline{\nu}$. Рассмотрим цилиндрическую поверхность Q, которая нормально проектирует γ на касательную плоскость. Введем вектор $\overline{\mu} = \overline{n}\times\overline{\tau}$, угол между $\overline{\mu}$ и $\overline{\nu}$ равен θ, а $\overline{\tau} = r'_s$ – единичный вектор касательной к γ. Тогда $k_g = k\cos\theta = (r'', r', \overline{n})$.

Пусть теперь $r = r(t)$. Тогда

$$r' = r'_s = r'_t\, t'_s = \frac{r'_t}{|r'_t|}, \quad r'' = r''_{ss} = \frac{r''_{tt}}{|r'_t|^2} + r'_t\left(\frac{1}{|r'_t|}\right)'_s.$$

Подставив в формулу $k_g = (r'', r', \overline{n})$, получим $k_g = \dfrac{(r''_{tt}, r'_t, \overline{n})}{|r'_t|^3}$.

Покажем, что геодезическая кривизна поверхности определяется первой квадратичной формой поверхности.

Пусть $R = R(u,v)$ – какая-нибудь регулярная параметризация поверхности в окрестности точки P и $u(t)$, $v(t)$ – уравнения кривой γ в окрестности этой точки. Тогда $r(t) = R(u(t), v(t))$, $r'(t) = R_u u' + R_v v'$, $r'' = R_{uu}u'^2 + 2R_{uv}u'v' + R_{vv}v'^2 + R_u u'' + R_v v''$. Так как $R_{uu} = \Gamma^1_{11}R_u + \Gamma^2_{11}R_v + L\overline{n}$, $R_{uv} = \Gamma^1_{12}R_u + \Gamma^2_{12}R_v + M\overline{n}$, $R_{vv} = \Gamma^1_{22}R_u + \Gamma^2_{22}R_v + N\overline{n}$, то

$$r'' = R_u\{\Gamma^1_{11}u'^2 + 2\Gamma^1_{12}u'v' + \Gamma^1_{22}v'^2 + u''\} +$$
$$+ R_v\{\Gamma^2_{11}u'^2 + 2\Gamma^2_{12}u'v' + \Gamma^2_{22}v'^2 + v''\} + \overline{n}\{Lu'^2 + 2Mu'v' + Nv'^2\} =$$
$$= R_u(A + u'') + R_v(B + v'') + \overline{n}C,$$

где $A=\Gamma^1_{11}u'^2+2\Gamma^1_{12}u'v'+\Gamma^1_{22}v'^2$, $B=\Gamma^2_{11}u'^2+2\Gamma^2_{12}u'v'+\Gamma^2_{22}v'^2$, $C=Lu'^2+2Mu'v'+Nv'^2$. Тогда

$$(r'',r',\overline{n})=|R_u\times R_v|\{(A+u'')v'-(B+v'')u'\}=$$
$$=\sqrt{EG-F^2}\{(A+u'')v'-(B+v'')u'\}\,.$$

Подставляя в формулу для k_g, получаем

$$k_g=\frac{\sqrt{EG-F^2}}{(Eu'^2+2Fu'v'+Gv'^2)^{\frac{3}{2}}}(u''v'-v''u'+Av'-Bu')\,.$$

Так как величины Γ^k_{ij} выражаются только через коэффициенты первой квадратичной формы поверхности и их производные, то *геодезическая кривизна кривой на поверхности определяется только внутренней геометрией поверхности и, следовательно, не изменяется при изгибании поверхности.*

Пусть поверхность принадлежит классу C^2 и кривая Γ на поверхности тоже класса C^2.

Определение. Кривая Γ на поверхности называется *геодезической линией*, если в каждой точке этой кривой геодезическая кривизна равна нулю.

Так как геодезическая кривизна кривой на поверхности не изменяется при изгибании поверхности, то при изгибании поверхности геодезическая линия переходит в геодезическую.

Отметим следующее характеристическое свойство геодезической линии.

Теорема. *Кривая на поверхности есть геодезическая линия тогда и только тогда, когда вдоль этой кривой главная нормаль $\overline{\nu}$ кривой и нормаль $\overline{n}$ к поверхности коллинеарны в каждой точке, где кривизна отлична от нуля.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $k_g\equiv 0\Leftrightarrow(r''_{ss},r'_s,\overline{n})\equiv 0$, а $r''_{ss}=k\overline{\nu}$, то, если кривизна k не равна нулю, векторы $\overline{\nu}$, r', $\overline{n}$ компланарны. Так как и $\overline{\nu}$ и $\overline{n}$ ортогональны r', то $\overline{\nu}\parallel\overline{n}$. ▶

Замечание. Чтобы получить дифференциальное уравнение геодезических линий $u(t)$, $v(t)$ достаточно приравнять к нулю выражение для геодезической кривизны:

$$u''v'-v''u'+Av'-Bu'=0\,.$$

Можно показать, что через каждую точку регулярной поверхности $S\in C^2$ в каждом направлении проходит и притом единственная геодезическая. Семейство геодезических и их ортогональных траекторий называется *полугеодезической системой координат*, а параметризация, при которой координатная сеть дает это семейство, называется *полугеодезической.* [8)]

Определение. Кривая γ на поверхности, соединяющая точки P и Q, называется *кратчайшей*, если любая кривая на поверхности, соединяющая точки P и Q, имеет длину не меньшую, чем кривая γ.

Теорема. *Геодезическая на достаточно малом отрезке является кратчайшей. А именно, для достаточно гладкой поверхности и для геодезической* Γ, *проходящей через регулярную точку* P, *найдется такая окрестность точки* P, *что для любых точек* M_1, M_2 *из этой окрестности, принадлежащих* Γ, *отрезок геодезической* M_1M_2 *является кратчайшей.* [9)]

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть через регулярную точку P поверхности проходит геодезическая Γ. Обозначим через U окрестность точки P, все точки которой регулярные. Проведем через P геодезическую Γ' ортогональную Γ. Построим семейство геодезических, которые пересекают Γ' ортогонально и для этого семейства построим семейство их ортогональных траекторий. Получим полугеодезическую систему (см. рис. 19.15). Заметим, что Γ входит в семейство геодезических, ортогональных Γ'. В силу ортогональности координатных линий $F = 0$ в первой квадратичной форме и, следовательно, $ds^2 = Edu^2 + Gdv^2$. Пусть, для определенности, в соответствующей параметризации линии $v = \mathrm{const}$ – геодезические. Подставляя $v = \mathrm{const}$ в уравнение геодезических $u''v' - v''u' + Av' - Bu' = 0$, получим $B = 0$. Отсюда следует (см. определение B на с. 594), что $\Gamma^2_{11} = 0$. Из второго уравнения для определения символов Кристоффеля (с. 591), содержащего Γ^2_{11}, в нашем случае следует, что $\Gamma^2_{11} = -\frac{E_v}{2G} = 0$. Следовательно, E не зависит от v. Таким образом, $ds^2 = E(u)du^2 + G(u,v)dv^2$. Введем новый параметр u_1,

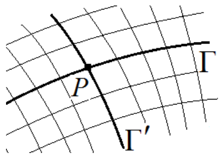


Рис. 19.15.

[8)] См. [17] гл. IX § 3 с.164 – 168. (Ред.)

[9)] У каждой регулярной точки есть окрестность, в которой две любые точки соединимы единственной геодезической линией, не выходящей из окрестности. Задача отыскания такой геодезической была решена Я.Бернулли в 1698 г., а общий вариационный метод решения задач такого типа дан в работах Л.Эйлера и Ж.Лагранжа (см. [14] Т. 1 с. 925). Экстремальное свойство кривой быть кратчайшей не только необходимое, но и достаточное для того, чтобы кривая была геодезической (см. [19] гл. VII § 94 с. 391). (Ред.)

связанный с u равенством $du_1 = \sqrt{E(u)}du$. Тогда линейный элемент поверхности примет вид $ds^2 = du_1^2 + Gdv^2$.

Пусть U_P – окрестность точки P, в которой определена построенная полугеодезическая система координат и все точки которой регулярные.

Расстояние между двумя точками на поверхности определяется как нижняя грань длин кривых на поверхности, соединяющих эти точки. Пусть расстояние от точки P до границы окрестности U_P равно ε и пусть точки M_1 и M_2 на кривой Γ находятся от точки P на расстоянии меньшем $\frac{\varepsilon}{2}$. Предположим, что кривая l на поверхности соединяет точки M_1 и M_2 и пересекает границу окрестности U_P. Пусть N_1 и N_2 – первая и последняя точки пересечения кривой l с границей окрестности U_P (см. рис. 19.16). В силу неравенства треугольника для расстояний между этими точками и точкой P выполняются неравенства: $\rho(P, N_1) \le \rho(P, M_1) + \rho(M_1, N_1)$, $\rho(P, N_2) \le \rho(P, M_2) + \rho(M_2, N_2)$. Так как $\rho(P, N_1) \ge \varepsilon$, $\rho(P, M_1) < \frac{\varepsilon}{2}$, то $\rho(M_1, N_1) > \frac{\varepsilon}{2}$. Аналогично, $\rho(M_2, N_2) > \frac{\varepsilon}{2}$. Отсюда следует, что длина кривой l больше ε. А так как $\rho(P, M_1) < \frac{\varepsilon}{2}$, $\rho(P, M_2) < \frac{\varepsilon}{2}$, то существует кривая, проходящая через точки M_1, P и M_2, имеющая длину меньше ε. Отсюда следует, что кратчайшая, проходящая через точки M_1 и M_2, лежит внутри окрестности U_P.

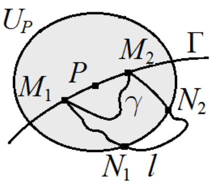


Рис. 19.16.

Заметим, что длина $|M_1M_2|_\Gamma$ отрезка M_1M_2 вдоль геодезической Γ вычисляется по формуле $|M_1M_2|_\Gamma = \int\limits_{M_1}^{M_2} ds = \int\limits_{M_1}^{M_2} |du| = |u_{M_2} - u_{M_1}|$, так как $dv = 0$ вдоль геодезической при нашей параметризации.

Для любой кривой γ, соединяющей точки M_1, M_2 и проходящей внутри окрестности U_P (рис. 19.16), длина отрезка M_1M_2 равна $\int\limits_\gamma ds = \int\limits_\gamma \sqrt{du^2 + Gdv^2} \ge \int\limits_\gamma |du| = |u_{M_2} - u_{M_1}|$. Значит, длина γ не меньше длины отрезка M_1M_2 геодезической. Следовательно, отрезок геодезической M_1M_2 является кратчайшей. ►

Литература

[1] Валле-Пуссен де ла Ш.-Ж. * [10] Курс анализа бесконечно малых. В 2 т. – Петроград: Гостехиздат, 1922.

[2] Гелбаум Б., Олмстед Дж.* Контрпримеры в анализе. – М.: Мир, 1967.

[3] Seifert H. Uber das Geschlecht von Knoten. Math. Ann. 110, 571-592, 1934.

[4] Изложение лекций С.Б. Стечкина по теории приближений. Главный редактор Бердышев В.И., ответственный редактор Черных Н.И. – Екатеринбург: ИММ УрО РАН, Издательство "Учебно методический центр – УПИ 2010.

[5] Камке Э.,Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1971.

[6] Carleson L. On the convergence and growth of partial sums of Fourier series, Acta math. 1966. V.116. P.135-137

[7] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1972.

[8] Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. В 2 т. – М.: Высшая школа, 1981.

[9] Куратовский К. Топология. – М.: Мир, 1966.

[10] Знаком " * " отмечена литература, рекомендованная С.Б.С. на лекциях. (Ред.)

[10] Lebesgue A. Sur l'approximation des fonctions. Bull. Sci. Math. France, 1898, 22.

[11] Лекции С. Б. Стечкина по математическому анализу. Том I. – М. : издательство механико-математического факультета МГУ, 2012.

[12] Лукашенко Т. П. Сходимость почти всюду рядов Фурье функций, суммируемых с квадратом. Курс лекций. – М.: Издательство МГУ, 1978.

[13] Маркушевич А. И.* Краткий курс теории аналитических функций. – М. : Наука, 1966.

[14] Математическая Энциклопедия. – М.: Издательство "Советская энциклопедия 1982.

[15] Натансон Г. М. Теория функций вещественной переменной. – Санкт-Петербург: издательство "Лань 1999.

[16] Норден А. П.* Краткий курс дифференциальной геометрии. – М. : Физматгиз, 1958.

[17] Погорелов А. В.* Лекции по дифференциальной геометрии. – Харьков: Наука, 1956.

[18] Прасолов В. В. Наглядная топология. – М. : МЦНМО, 1995.

[19] Рашевский П .К. Курс дифференциальной геометрии. – М. – Л. : Гостехиздат, 1950.

[20] Розендорн Э. Р.* Задачи по дифференциальной геометрии. Первое издание. – М. : Издательство МГУ, 1969; Второе издание – М. : Наука, 1971.

[21] Рудин У.* Основы математического анализа. – М. : Мир, 1957. Переиздана в 1976 г.

[22] Спивак М.* Математический анализ на многообразиях. – М. : Мир, 1968.

[23] Стечкин С. Б. Как писать работы (подготовлена А.Р. Алимовым и М. И. Карловым). Фундаментальная и прикладная математика, Т.3, вып.4, 1997.

[24] Выступление С.Б.Стечкина на Школе по теории функций и приближений 8 августа 1995 г. Фундаментальная и прикладная математика, Т.3, вып.4, 1997.

[25] Тихомиров В. М. Итоги науки и техники. Серия Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. **14** (1987), 103-260.

[26] Ульянов П. Л., Бахвалов А. Н., Дьяченко М. И., Казарян К. С., Сифуэнтес П. Действительный анализ в задачах. – М.: Физматлит, 2005.

[27] Фихтенгольц Г. М.* Основы математического анализа. В 2 т. – М. : Наука, 1964.

[28] Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3 т. – М. : Наука, 1969.

[29] Frankl F., Pontrjagin L. Ein Knotensatz mit Anwendung auf die Dimensionstheorie. Mathematische Annalen 1930, Volume 102, Issue 1, pp 785-789.

[30] Хинчин А. Я.* Краткий курс математического анализа. – М. : Гостехиздат, 1957.

[31] Шибинский В. М. Примеры и контрпримеры в курсе математического анализа. – М. : Высшая школа, 2007.

Предметный указатель

Лектор Стечкин Сергей Борисович
Редакторы
Радославова Татьяна Васильевна,
Холщевникова Наталья Николаевна

ЛЕКЦИИ С.Б. СТЕЧКИНА ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ. Том II.
М., Издательство попечительского совета механико-математического факультета МГУ, 2014 – 304 с.

Подписано в печать 11.01.2014 г.
Формат 60×90 1/16. Объем 19 п.л.
Заказ 7 Тираж 200 экз.

Издательство попечительского совета механико-математического факультета МГУ
г. Москва, Ленинские горы.

Отпечатано на типографском оборудовании механико-математического факультета

В. М. Тихомиров

ОБЗОРНАЯ ЛЕКЦИЯ

к курсу С. Б. Стечкина по математическому анализу

Нередко перед экзаменами по своему курсу я читал обзорную лекцию о прочитанном в нём, стараясь выделить главное и осветить опорные места курса. Получив изданные «Лекции С. Б. Стечкина по математическому анализу» от редакторов издания — Т. В. Радославовой и Н. Н. Холщевниковой, и зная с каким участием и самоотверженностью редакторы и ученики Сергея Борисовича работали над этим изданием, я предложил при вывешивании курса в Интернете написать как бы обзорную лекцию по этому курсу.

Мне представляется вообще целесообразным венчать учебники по математическому анализу неким «взглядом сверху» на изложенное в учебнике, где обсуждаются некоторые важнейшие понятия, идеи и теоремы курса, имеющие значение для всей математики.

Введение

Курс математического анализа обеспечен многими замечательными учебниками, прошедшими проверку временем. Из этого множества выделим три учебника: Г. М. Фихтенгольца [1], Л. Д. Кудрявцева [2] и В. А. Зорича [3]. Воздавая должное выдающимся учебникам и их авторам, справедливость требует отметить, что все эти учебники слишком велики по объёму. Курс Фихтенгольца несколько устарел, курс Зорича трудноват для нынешней «массовой» студенческой аудитории, а курс Кудрявцева все-таки ориентирован не на мехмат. Сопоставляя курс С. Б. Стечкина с этими учебниками, мне хотелось бы высказать своё мнение, что этот курс может занять своё место в ряду учебников по анализу, как доступный нынешней университетской аудитории, методически отработанный, в меру современный и хорошо приспособленный к действующей университетской программе по математическому анализу. В нём имеется множество интересных методических находок, касающихся, например, изложения интегралов Римана в одномерном случае и кратного интеграла, а также гармоничное изложение теории рядов, начиная с числовых и заканчивая рядами Фурье.

Общий раздел
(компоненты, из которых складывается курс математического анализа: теории, методы, понятия, идеи и теоремы)

Теории. Начала теории множеств. Теория действительных чисел. Общая топология. Дифференциальное исчисление. Интегральное исчисление.

Методы. Диагональный метод (на примере вещественных чисел). Метод деления пополам и его обобщение (на примере общетопологических теорем). Модифицированный метод Ньютона (на примере обращения нелинейных отображений). Принцип Лагранжа (метод множителей Лагранжа — на примере теории экстремума).

Понятия. Из теории множеств: счётность, континуум, линейный порядок. Из алгебры: группа, абелева группа, поле, определитель. Из общей топологии: метрика и метрические понятия замкнутости, предела, сходимости, числового ряда, полноты, непрерывности и компактности; общетопологические понятия окрестности, сходимости, непрерывности. Из дифференциального исчисления: производная, дифференцируемость, строгая дифференцируемость, функциональный ряд. Из интегрального исчисления: интеграл и мера, дифференциальная форма, дифференцирование и интегрирование дифференциальных форм.

Идеи. Математический анализ — язык естествознания (Ньютон). Разделение теорий, исчислений и алгоритмов (Лейбниц). Идея построения Вавилонской башни или «дерева» математики (на примере мехматского образования: база — теория множеств и логика, первые ветви — алгебра, топология, мера, далее числа, а затем математический анализ, геометрия и теория случайности (теория вероятностей и математическая статистика) (исходная идея такого построения восходит к Кантору). Конкретно в курсе математического анализа фундаментальными идеями являются идеи пополнения пространств (Больцано, Дедекинд, Вейерштрасс, Кантор, Коши), линеаризации нелинейных отображений (Лейбниц) и обратимости дифференцирования (Ньютон и

Лейбниц).

Важные теоремы в курсе математического анализа: о «равносильности аксиом» действительных чисел; теоремы Вейерштрасса о свойствах непрерывных функций и Кантора – Гейне о равномерной непрерывности; теоремы об обратных отображениях; представление функций формулами и рядами; правило множителей Лагранжа; теорема Стокса–Пуанкаре.

Экскурсия по началам других аналитических курсов — дифференциальных уравнений, дифференциальной геометрии, комплексного анализа.

1. Числовая прямая $\mathbb{R}$

Базовым объектом математического анализа является числовая (вещественная) прямая (обозначаемая ныне символом $\mathbb{R}$). На ней имеется *алгебраическая структура* ($\mathbb{R}$ — это поле), она наделена *порядком* (являясь линейно-упорядоченным множеством) и обладает *полнотой.* Числовая прямая является прародительницей метрических, топологических и векторных пространств, на числах формировались понятия сходимости, компактности, полноты, непрерывности, гладкости и многие другие.

Сжатое определение $\mathbb{R}$ таково — это *полное, линейно-упорядоченное поле.* Аксиомы поля сформировались из свойств чисел, которые можно складывать, вычитать, умножать и делить на любые числа, кроме нуля. Числа натурального ряда $\mathbb{N}$ можно складывать и перемножать, но не вычитать. Целые числа $\mathbb{Z}$ можно складывать, умножать, вычитать, но не делить. Рациональные числа (или дроби) $\mathbb{Q}$ можно складывать, умножать, вычитать и делить, и правила сложения, умножения и деления дробей и предопределили аксиоматику поля. Дроби можно сравнивать между собой, и это определило аксиомы порядка. Но ещё в школе Пифагора было обнаружено, что дробей не хватает для того, чтобы выразить некоторые величины, например длину диагонали квадрата со стороной единица. Совокупность дробей оказалась «дырявой», незаполненной, и фундаментальную **идею** «заполнения» пробелов, существующих между дробями реализовывали замечательные математики XIX века, такие как Больцано (1781 – 1848), Вейерштрасс (1815 – 1897), Дедекинд (1831 – 1916), Кантор (1845 – 1918) и Коши (1789 – 1857). Все они предложили каждый свою версию пополнения вещественной прямой. Далее будут представлены разные варианты этого пополнения путём формулировок эквивалентных друг другу аксиом названных выше математиков. Это привело в итоге к формированию специальной главы математики, получившей название *общей топологии*. В общей топологии изучают понятия предела, окрестности, компактности, полноты и т. п. — всего, что сопутствует понятию непрерывности. Эти начальные общие топологические понятия являются базой курсов математического анализа, читающихся на мехмате с самого момента рождения нашего факультета.

Теории действительных чисел посвящён пятый параграф лекций С. Б. Стечкина. В основу теории он ставит, как было принято в те годы, когда читался курс и популярно поныне, аксиому Дедекинда. Она определяет полноту через порядковое свойство $\mathbb{R}$.

A) Аксиома Дедекинда о сечении. *Если множество действительных чисел представлено как объединение двух непустых непересекающихся множеств, причём каждый элемент первого множества меньше любого элемента из второго, то существует единственное число такое, что оно не меньше никакого числа из первой и не больше никакого числа из второй группы* (*или, что то же*: *либо в первой группе существует максимальный элемент, либо во второй элемент минимальный*).

Сергей Борисович приводит в §5 два результата равносильных аксиоме Дедекинда и тоже основанных на порядковом свойстве вещественных чисел. Стечкин выводит их из аксиомы Дедекинда, мы называем их также аксиомами полноты. Через порядковое свойство определяется понятие верхней и нижней граней и после этого формулируется следующая

B) Аксиома Вейерштрасса о существовании точной верхней (нижней) грани. *Любое множество вещественных чисел, ограниченное сверху* (*снизу*), *имеет точную верхнюю* (*нижнюю*) *грань.*

Вложенность отрезков тоже определяется через порядок, существующий в вещественных числах. И это приводит к аксиоме равносильной и аксиоме Дедекинда и аксиоме Вейерштрасса.

C) Аксиома Кантора о вложенных отрезках. *Последовательность вложенных отрезков с длинами, стремящимися к нулю, имеет единственную общую точку.*

После прохождения курса разумно взглянуть на этот замечательный объект как бы сверху, чтобы осознать, какое богатое содержание в истоке родилось из обдумывания того, что такое вещественное число.

Вейерштрасс сделал первые шаги в формировании понятий общей топологии. Таково понятие предела числовой последовательности. Оно приводит к следующей аксиоме равносильной всем предыдущим (и доказываемой обычно в курсе анализа, как теорема).

D) Аксиома Вейерштрасса о сходящейся подпоследовательности. *Из каждой ограниченной числовой последовательности элементов можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.*

Больцано стал впервые анализировать понятие монотонности. Это можно выразить такой аксиомой.

E) Аксиома Больцано о монотонно возрастающей (монотонно убывающей) последовательности. *Монотонно возрастающая (убывающая) ограниченная числовая последовательность имеет предел.*

Вывод остальных аксиом из какой-то одной (как это делается во всех курсах анализа) — замечательное упражнение в логике проведения доказательств. Но в обзорной лекции можно считать, что слушатель, сдавший три экзамена по математическому анализу, не нуждается в повторении всего этого в обзорной лекции.

Следует отметить, что собственно понятие полноты у математиков ассоциируется с признаком Коши сходимости числовой последовательности. Это побуждает заменить этот признак аксиомой. Но здесь математиков ждала неожиданность: если все остальные аксиомы были равносильны друг другу, то аксиома Коши, как выяснилось, всем остальным приведённым нами аксиомам не эквивалентна, необходима дополнительная аксиома — аксиома Архимеда: можно построить «неархимедово» полное по Коши упорядоченное поле. Итак, последняя пара аксиом полноты такова:

F) Аксиома Архимеда и аксиома сходимости фундаментальной последовательности Коши. *Для любых положительных чисел найдётся натуральное число, такое, что его произведение с первым превзойдёт второе* (аксиома Архимеда, которую часто называют аксиомой Архимеда – Евдокса); *фунда-*

ментальная последовательность вещественных чисел сходится (аксиома Коши).

Далее описанными аксиомами (кроме дедекиндовской) мы будем пользоваться как доказанными утверждениями и называть их леммами. Доказательством лемм завершается построение числовой прямой.

Разумеется, в той или иной форме надо описать **арифметическую модель** вещественной прямой. Наиболее естественно представлять вещественное число в виде десятичной дроби $n.\alpha_1, \ldots, \alpha_n \ldots$, где $n \in \mathbb{N}$, а последовательность $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \ldots$ — десятичная, т. е. α_i — это одна из цифр от нуля до девятки, причём среди таких последовательностей не встречаются оканчивающихся на одни девятки. Такие последовательности естественным образом складываются, вычитаются, умножаются и делятся, упорядочиваются и обладают свойством полноты.

И здесь же разумно описать **диагональный метод**, доказав несчётность $\mathbb{R}$. Для этого выписываются все десятичные дроби, описывающие некую счётную последовательность чисел и составляется новое число, где k-тая цифра меняется на любую цифру, отличную от девятки. Полезно отметить при этом, что многие фундаментальнейшие теоремы всей математики (в частности, теорема Гёделя) доказываются диагональным методом.

После этого построения вещественных чисел естествен выход в конечномерные пространства.

2. Пространство $\mathbb{R}^n$, непрерывность и компактность

После построения числовой прямой в курсе анализа идёт теория пределов и изучаются свойства непрерывных функций одного переменного. В обзорной лекции естественно сразу обратиться к основному объекту анализа — функциям многих переменных. Остановившись кратко на обще-топологических понятиях непрерывности и компактности и напомнив в этом параграфе об основных свойствах непрерывных функций на конечномерных компактах, мы на этом завершаем обзор базового цикла курса, и в следующих двух параграфах излагаются уже основные понятия и теоремы математического анализа, а именно, дифференциального и интегрального исчислений.

На первых же лекциях по алгебре вводится понятие *векторного пространства*[11] над полем вещественных чисел — про-

[11] У нас вместо термина «векторное пространство» сохраняется термин «линейное пространство»

странства, в котором определены операции сложения элементов пространства и умножения элементов на вещественные числа. Для нужд математического анализа достаточно пространства $\mathbb{R}^n$ — декартова произведения числовой прямой $\mathbb{R}$, образованного векторами-столбцами $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ с координатами $x_1, \ldots, x_n$, $x_i \in \mathbb{R}$, где сложение векторов и умножение вектора на число совершается покоординатно.

В обзорной лекции, подводящей итоги курса, разумно отметить, что помимо пространства $\mathbb{R}^n$ нужно рассматривать *двойственное пространство* $(\mathbb{R}^n)^*$, которое реализуется в виде векторов-строк $y = (y_1, \ldots, y_n)$. Это пространство *линейных функционалов* над $\mathbb{R}^n$. Действие линейного функционала y на вектор x записывается в виде «внутреннего произведения» $< y, x >= \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$. В самом курсе анализа различие $\mathbb{R}^n$ и $(\mathbb{R}^n)^*$ может выглядеть вычурностью, «затуманиванием» мозгов, но основное понятие дифференциального исчисления — понятие производной функции многих переменных — с неизбежностью ведёт к необходимости рассмотрения пространства $(\mathbb{R}^n)^*$, ибо производная — это *линейный функционал*. Как мы увидим в дальнейшем, понятие производной было осознано только в XX веке.

Величина $|x| = (\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2)^{1/2}$ называется *модулем* вектора x. Понятия предела и непрерывности для одного и многих переменных выглядят одинаково. Скажем, говорят, что функция $x \mapsto f(x)$ непрерывна в точке $\widehat{x}$, если для любого $\varepsilon > 0$ можно найти $\delta > 0$ так, что если $|x - \widehat{x}| < \delta$, то $|f(x) - f(\widehat{x})| < \varepsilon$. Это определение принадлежит Коши (1823). Из этого определения следует *локальная ограниченность функции, непрерывной в точке.* Приведённому определению эквивалентно следующее определение *непрерывности по Гейне* (или *секвенциальной непрерывности*), согласно которому функция f является *непрерывной в точке* $\widehat{x}$, если для всякой последовательности $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, сходящейся к $\widehat{x}$ последовательность $\{f(x_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ сходится к $f(\widehat{x})$. Функция называется *непрерывной на некотором множестве*, если она непрерывна в каждой точке этого множества. Функция f называется *равномерно непрерывной* на множестве, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое число $\delta > 0$, что если $|x - \xi| < \delta$, то $|f(x) - f(\xi)| < \varepsilon$.

Через модуль определяется *расстояние* между элементами пространства $\mathbb{R}^n$: $d(x,\xi) = |x-\xi|$, и это расстояние превращает $\mathbb{R}^n$ в *метрическое пространство.* Из полноты $\mathbb{R}$ вытекает полнота $\mathbb{R}^n$. Множества $B(\widehat{x},\varepsilon) = \{x \in X \mid |x-\widehat{x}| \leq \varepsilon\}$ и $U(\widehat{x},\varepsilon) = \{x \in X \mid |x-\widehat{x}| < \varepsilon\}$, называют, соответственно, замкнутым и открытым шаром в X радиуса ε с центром в $\widehat{x}$ (или ε-окрестностью точки $\widehat{x}$). Подмножество U пространства $\mathbb{R}^n$ называют *открытым*, если для любой точки $x \in U$ можно найти такое число $\varepsilon > 0$, что $U(\widehat{x},\varepsilon) \subset U$. Множество называется *замкнутым*, если его дополнение открыто. Очевидно, что имеется другое равносильное определение замкнутости: множество называется замкнутым, если оно содержит все свои предельные точки (ибо иначе предельная точка, не принадлежащая множеству, не может содержаться в открытом шаре, содержащемся в дополнении). Система открытых множеств задаёт в пространстве $\mathbb{R}^n$ *топологию*, превращая его в *топологическое пространство.* Подмножество $\mathbb{R}^n$ называют *ограниченным*, если его можно заключить в некоторый шар.

Ограниченное замкнутое множество называют *компактом.* Это определение равносильно двум определениям. Одно из них метрическое (*в компакте из всякой последовательности можно выбрать сходящуюся подпоследовательность*), другое топологическое (*в компакте из всякого открытого покрытия можно извлечь конечное подпокрытие.*)

Докажем первое из этих утверждений для демонстрации важного **метода** доказательств обще-топологических результатов в $\mathbb{R}^n$ — «обобщённого метода деления пополам». В одномерном случае это просто метод деления пополам.

Пусть нам дан одномерный компакт и в нем последовательность $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. Вследствие того, что компакт по определению ограничен, поместим его в некоторый отрезок. Выбрав любой элемент последовательности в качестве первого, делим отрезок на две равные части, выбираем тот, в котором имеется бесконечное число элементов последовательности, и там выбираем, в качестве второго, один из элементов с номером, большим, чем номер первого элемента, и затем повторяем всю процедуру. Получаем сходящуюся последовательность (можно сослаться на аксиому Кантора), предел которой, в силу замкнутости компакта, принадлежит ему.

В многомерном случае надо заключить компакт в куб, делить куб на равные кубики в числе 2^n и повторять приведённое одномерное рассуждение.

Таким же методом — обобщённого деления пополам — доказывается равносильность топологического определения компакта.

Важную роль при введении в анализ играют два результата из общей топологии:

Теорема Вейерштрасса о достижении максимумов и минимумов. *Непрерывная на компакте в* $\mathbb{R}^n$ *функция достигает максимума и минимума.*

Доказательство достижения максимума проводится от противного, где комбинируются свойства непрерывности, компактности и числовой прямой. Если допустить, что непрерывная функция на компакте неограничена сверху, то найдётся последовательность точек компакта, в которой значения функции стремятся к бесконечности. Выбираем по аксиоме D) Вейерштрасса подпоследовательность, сходящуюся к некоторой точке компакта и приходим к противоречию с локальной ограниченностью непрерывной в точке функции. Итак, функция ограничена сверху, и значит, по аксиоме B) Вейерштрасса у неё есть верхняя грань. Если допустить, что верхняя грань не достигается, то выбираем последовательность точек компакта, в которых значения функции стремятся к верхней грани. Выбираем из этих точек подпоследовательность, сходящуюся к какой-то точке компакта, и по определению непрерывности по Гейне значение в этой точке будет равно верхней грани. Случай минимума аналогичен. $\square$

Теорема о равномерной непрерывности. *Функция, непрерывная на компакте в* $\mathbb{R}^n$, *равномерно непрерывна.* (В курсе Стечкина этот результат называется теоремой Кантора; Бурбаки называет этот результат теоремой Гейне).

Доказательство основано на определении компакта и определении непрерывности по Гейне. Если предположить, что для некоторого $\varepsilon > 0$ существуют две последовательности точек компакта $\{x_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ и $\{\xi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, для которых $|x_j - \xi_j| \to 0$ в то время, как расстояние между точками $f(x_j)$ и $f(\xi_j)$ больше ε $(*)$, то, выбрав точку сходимости первой последовательности, убеждаемся, что соответствующая вторая подпоследовательность сходится к той же точке, и определение непрерывности по Гейне противоречит соотношениям (*). $\square$

Отсюда ведут два пути: один к дальнейшим обобщениям в стиле общей топологии — к понятиям метрического и топологического пространств (первое было предложено Фреше в 1912 г., второе Хаусдорфом (1914)), общим определениям компактов (метрических и топологических) и затем к бесконечномерному анализу (так строится курс функционального анализа). Второй путь, по которому следуют в курсе математического анализа, возвращает нас к одномерному случаю, где определяются основные понятия дифференциального и интегрального исчислений, а потом происходит выход в конечномерные пространства.

3. Производная и теоремы об обратных функциях и отображениях

Основными понятиями математического анализа являются понятия производной и интеграла. Они были введены в математику Ньютоном (1643–1727) *и Лейбницем* (1646–1716) . *Ньютон «для пояснения искусства анализа»* (это его слова) *приводит две задачи. Вот они*: I) *Пусть расстояние от начала отсчёта известно. Нужно узнать скорость в данный момент времени.* II) *Пусть известна скорость движения. Надо узнать расстояние до начала отсчёта.* (Мы чуть модернизировали текст Ньютона.)

Если вдуматься в содержание первой задачи Ньютона (вторую мы обсудим в следующем параграфе), то становится ясно, что к понятию производной Ньютон пришёл с естественно-научных позиций. Он руководствовался при этом **идеей** построения аппарата для описания законов природы.

Пусть экипаж (для Ньютона — это конный дилижанс, для нас — автомобиль со спидометром) движется по прямолинейной дороге, и пусть функция, сопоставляющая моменту времени t длину пройденного пути $s(t)$, известна. Требуется найти скорость экипажа в момент τ (как мы говорим — *мгновенную скорость в момент* τ).

Продумывание этой задачи Ньютона естественно приводит к идее, что скорость $v(\tau)$ экипажа в некоторый момент времени τ примерно равна *средней скорости* $\frac{s(\tau+\Delta t)-s(\tau)}{\Delta t}$ на малом участке времени от τ до $\tau+\Delta t$, а сама скорость равна *пределу этого отношения при* Δt *стремящемся к нулю.* (Слово «предел» по Ньютону означало, что чем меньше будет величина приращения времени Δt, тем меньше средняя скорость $\frac{s(\tau+\Delta t)-s(\tau)}{\Delta t}$ будет отличаться от числа $v(\tau)$ – полшага до нашего понимания на языке $\varepsilon - \delta$). Потом стали писать так: $v(\tau) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{s(\tau+\Delta t)-s(\tau)}{\Delta t}$ и говорить, что скорость — это *производная пути по времени.* Ньютон обозначил этот предел точкой над s: $v(\tau) = \dot{s}(\tau)$. Итак, *производная по Ньютону — это мгновенная скорость.* Сейчас это общеизвестно, но поражает отчётливость понимания сути дела Ньютоном с самого начала!

Переложение понятия предела на язык дельт и эпсилонов было осуществлено Коши в первой четверти XIX века.

Если исходной позицией для Ньютона было естествознание, то Лейбниц во многом исходил из геометрии. Излагая концепцию Лейбница, разумно использовать более привычные обозначения аргумента и функции, когда аргумент обозначается буквой x, а функция – буквой f. Тогда производная $f'(\widehat{x})$ функции f в точке $\widehat{x}$ есть $\lim\limits_{x \to \widehat{x}} \frac{f(x)-f(\widehat{x})}{x-\widehat{x}}$, а с геометрической точки зрения – это *тангенс угла наклона касательной к графику функции f в точке* $(\widehat{x}, f(\widehat{x}))$. Лейбниц осознал важнейшую **идею**, связанную с производной – идею *локальной линейной аппроксимации функции.* Соответствующую линейную функцию Лейбниц назвал *дифференциалом*, и само новое направление получило название *дифференциального исчисления.*

Поговорим о терминах, с которыми нам постоянно придётся иметь дело. Слово *анализ* произнёс, как мы помним, Ньютон. Он поставил две основные задачи своего «анализа». Сейчас развитие теории задач, подобных задачам Ньютона, называют *математическим анализом.* Слово *дифференциал* происходит от латинского differentia — разность. Этот термин, введённый Лейбницем, отражает сам процесс замены приращения функции на малом интервале на произведение некоторого числа (а именно, производной в данной точке) на приращение аргумента. А для самогó процесса исследования средствами математического анализа Лейбниц нашёл удивительно ёмкое слово calculus — исчисление.

Дифференциальное исчисление функций одного переменного сложилось в восемнадцатом веке, в основном, трудами Эйлера. Этому исчислению посвящается основная часть первого семестра курса «Математический анализ». Во все времена этому «исчислению» обучают на мехмате очень хорошо.

Мы здесь не остановимся на одномерном случае, а перейдём сразу к дифференциальному исчислению функций многих переменных.

Понятие линейной аппроксимации даёт возможность для толкования понятия производной в конечномерном и даже в бесконечномерном случаях.

Отображение F из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$ называется *дифференцируемым в точке* $\widehat{x}$, если существует линейное отображение Λ из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$ такое, что для любого числа $\varepsilon > 0$ найдётся число $\delta > 0$, для которого из неравенства $|x - \widehat{x}| < \delta$ следует неравенство $|F(x) - F(\widehat{x}) - \Lambda(x - \widehat{x})| < \varepsilon|x - \widehat{x}|$.

Этими соотношениями отображение Λ определяется однозначно, оно называется *производной отображения* F *в точке* $\widehat{x}$ и обозначается $F'(\widehat{x})$. Саму линейную функцию $x \mapsto F'(\widehat{x})x$ называют вослед за Лейбницем, давшим это определение в одномерном случае, *дифференциалом* F *в точке* $\widehat{x}$. (В одномерном случае приращение аргумента и функции Лейбниц обозначал буквой d, потому для дифференциала функции $y = f(x)$ до сих пор применяется запись $dy = f'(x)dx$.)

Дадим ещё определение строгой дифференцируемости, которое, как это будет видно в дальнейшем, оказывается достаточно мотивированным. Дадим это определение сразу в нормированном пространстве. Отображение $F : X \to Y$ (где $(X, \|\cdot\|_X)$ и $(Y, \|\cdot\|_Y)$ нормированные пространства) называется *строго дифференцируемым в точке* $\widehat{x}$, если оно дифференцируемо в $\widehat{x}$ и для любого числа $\varepsilon > 0$ найдётся такое число $\delta > 0$, что из неравенств $\|x_i\|_X < \delta,\ i = 1, 2$ следует, что

$$\|F(\widehat{x} + x_1) - F(\widehat{x} + x_2) - F'(\widehat{x})(x_1 - x_2)\|_Y < \varepsilon\|x_1 - x_2\|_X .$$

В конечномерном случае определение производной функции многих переменных как линейного функционала восходит к Вейерштрассу, в бесконечномерном – к Фреше (1912). Интересно отметить, что Фреше полагал, что определение дифференциала в конечномерном пространстве, как *линейного функционала*, до его определения дифференциала в бесконечномерном пространстве не существовало: Фреше, описывая приведённое нами определение дифференциала, говорит, что это «дифференциал в моём смысле». Надо иметь ввиду, что труды Вейерштрасса с его определением дифференциала были изданы лишь в двадцатые годы XX века.

В дифференциальном исчислении есть два результата особой важности: цепное правило Лейбница (формула для производной сложной функции) и теорема об обратной функции (и/или её обобщение — теорема о неявной функции). Цепное правило — технический результат, он доказывается из определений.

Теорема об обратной функции и её обобщения, в частности, теорема «о правом обратном» и разного рода теоремы о неявных функциях, связаны с одним из центральных вопросов математики и естествознания — о решении нелинейных уравнений.

Считается, что первый алгоритм для приближенного вычисления числа $\sqrt{2}$ или решения нелинейного уравнения $x^2 = 2$, принадлежит древнегреческому математику Герону, жившему в первом веке нашей эры. Герону приписывают следующую итерационную формулу для $\sqrt{2}$:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{2}{x_n}),\ x_0 \neq 0\,.$$

В 1676 году Ньютон описал метод решения уравнения $F(x) = y$ для дифференцируемой функции F:

$$x_{n+1} = \frac{1}{F'(x_n)}(y - F(x_n))\,.$$

Свой метод Ньютон продемонстрировал на примере решения уравнения $F(x) = x^3 - 2x = 5$. Если применить алгоритм Ньютона к функции $F(x) = x^2$, то обнаружится, что он совпадает с алгоритмом Герона.

Метод Ньютона обладает большой скоростью сходимости, но при его осуществлении приходится на каждом шаге вычислять производную, что в многомерных задачах бывает затруднительно. В XX веке стали использовать лишь одну производную на первом шаге (в бесконечномерных задачах такой метод активно внедрял Леонид Витальевич Канторович). Но необязательно вообще применять производные для решения уравнения $F(x) = y$. Излагаемый далее **метод**, который мы называем *модифицированным методом Ньютона*, не требует знания основ анализа, может быть рассказан школьникам и остается фактически неизменным по сути вплоть до бесконечномерного случая. Суть дела видна из рисунка (см. рис. 1): из выбранной начальной точки по аффинной функции достигаем нужного уровня, получаем первую точку и далее повторяем построение.

4. Разрешимость нелинейных уравнений

Теорема 1 об обратной функции в одномерном случае. *Пусть функция* $F : V \to \mathbb{R}$ *определена в окрестности* V *точки* $\widehat{x} \in \mathbb{R}$ *и при этом существуют числа* $A \neq 0$, θ, $0 < \theta < 1$, *и* $\delta > 0$ *такие, что для любых* x, x' *из* V, *для которых* $|x-\widehat{x}|<\delta, |x' - \widehat{x}| < \delta$, *выполнено неравенство*

$$|F(x) - F(x') - A(x - x')| \leq \frac{\theta|x - x'|}{|R|}, \tag{1}$$

где $R = A^{-1}$. *Тогда для любого числа* y, *отстоящего по модулю от* $F(\widehat{x})$ *не больше, чем на* $\frac{\delta(1-\theta)}{|R|}$, *последовательность (модифицированного метода Ньютона)*

$$x_k = x_{k-1} + R(y - F(x_{k-1})),\ x_0 = \widehat{x},\ k \in \mathbb{N}, \tag{2}$$

будет стремиться к числу $\varphi(y)$, *отстоящему от* $\widehat{x}$ *по модулю не больше, чем на* δ *такому, что* $F(\varphi(y)) = y$ *и при этом* $|\varphi(y) - \widehat{x}| \leq K|y - F(\widehat{x})|$, *где* $K = \frac{|R|}{(1-\theta)}$.

Доказательство (см. рис. 1). Докажем, что a) элементы x_k для всех $k \geq 0$ лежат в интервале $\Delta = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - \widehat{x}| < \delta\}$ и b) что последовательность $\{x_k\}_{k\geq 0}$ фундаментальна. Утверждение a) докажем по индукции. Начальный элемент x_0 принадлежит

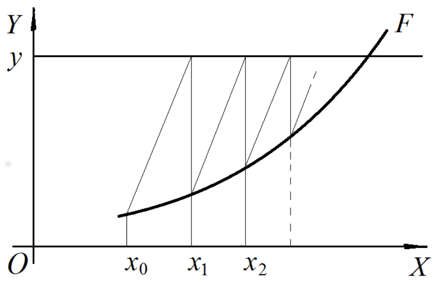


Рис.1.

интервалу Δ по определению. Пусть $|y - F(\widehat{x})| \leq \frac{\delta(1-\theta)}{|R|}$ и $x_s \in \Delta,\ 1 \leq s \leq k$. Докажем, что $x_{k+1} \in \Delta$. Из равенства (2) следует, что $(x_s - x_{s-1}) = R(y - F(x_{s-1})),\ s \in \mathbb{N}$. Используя это равенство и итерируя процедуру, получим

$$
\begin{aligned}
&|x_{k+1} - x_k| = |R(y - F(x_k))| = \\
&|R(y - F(x_k) - y + F(x_{k-1}) + A(x_k - x_{k-1}))| = \\
&|R(F(x_{k-1} - F(x_k) - A(x_{k-1} - x_k))| \leq \\
&\theta|x_k - x_{k-1}| \leq ... \leq \theta^k|x_1 - x_0|\,.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Теперь, применяя неравенство для модулей, формулу для суммы геометрической прогрессии, равенство $|x_1 - \widehat{x}| = |R(y - F(\widehat{x}))|$ и неравенство $|y - F(\widehat{x})| \leq \frac{\delta(1-\theta)}{|R|}$, будем иметь:

$$
\begin{aligned}
&|x_{k+1}-\widehat{x}| \leq |x_{k+1}-x_k|+\ldots+|x_1-\widehat{x}| \leq (\theta^k+\theta^{k-1}+\ldots+1)|x_1-\widehat{x}| < \\
&\tfrac{1}{1-\theta}|x_1 - \widehat{x}| = \tfrac{|R(y-F(\widehat{x}))|}{(1-\theta)} \leq \tfrac{|R|\delta(1-\theta)}{|R|(1-\theta)} = \delta\,,
\end{aligned}
$$

т. е. утверждение a) доказано.

Докажем b). Для любых $k, l \in \mathbb{N}$, применяя (3), получим:

$$
\begin{aligned}
&|x_{k+l} - x_k| \leq |x_{k+l} - x_{k+l-1}| + \ldots + |x_{k+1} - x_k| \leq \\
&\left(\sum_{i=k}^{k+l-1} \theta^i\right)|x_1 - \widehat{x}| < \frac{\theta^k}{1-\theta}|x_1 - \widehat{x}|\,,
\end{aligned}
\tag{4}
$$

откуда

$$
|x_{k+l} - x_k| < \frac{\theta^k|R|}{(1-\theta)}|y - F(\widehat{x})| \leq \frac{\theta^k}{(1-\theta)|R|}\delta(1-\theta)|R| = \theta^k\delta\,,
$$

и, значит, последовательность $\{x_k\}_{n\in\mathbb{N}}$ фундаментальна. Значит она сходится. Обозначим ее предел $\varphi(y)$. Переход к пределу в (2), учитывая непрерывность функции F, которая следует из условия (1), приводит к равенству $F(\varphi(y)) = y$, а переход к пределу в (4) при $k = 0$ и $l \to \infty$ даёт

$$
|\varphi(y) - \widehat{x}| \leq \frac{|x_1 - \widehat{x}|}{1-\theta} = \frac{|y - F(\widehat{x})||R|}{(1-\theta)|} = K|y - F(\widehat{x})|
$$

с $K = \frac{|R|}{(1-\theta)}$. $\square$

Лемма о правом обратном отображении в линейном случае. *Пусть* $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *— линейное сюръективное отображение* (это значит, что уравнение $Ax = y$ разрешимо для любого $y \in \mathbb{R}^m$). *Тогда существует правое обратное отображение* $R : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ *такое, что*: $AR(y) = y$, $|R(y)| \le \gamma|y|\ \forall y \in \mathbb{R}^m$ *для некоторого* $\gamma > 0$.

Доказательство леммы. Рассмотрим систему базисных векторов $\{e_j\}_{j=1}^m$ в $\mathbb{R}^m$. По условию существуют векторы $\{f_k\}_{k=1}^m$, $f_k \in \mathbb{R}^n$, $1 \le k \le m$, такие, что $Af_k = e_k$. Для каждого вектора $y = \sum\limits_{k=1}^m y_k e_k \in \mathbb{R}^m$ положим $R(y) = \sum\limits_{k=1}^m y_k f_k$. Тогда равенство $AR(y) = y$ следует из линейности оператора A, а второе свойство следует из очевидных оценок (и того, что длина вектора не меньше модуля любой его координаты):

$$|Ry| \le \sum_{i=1}^m |y_k||f_k| \le \max_{1\le k\le m} |y_k| \sum_{k=1}^m |f_k| \le \gamma|y|,$$

где $\gamma = \sum\limits_{k=1}^m |f_k|$. $\square$

А для объяснения сути следующего результата снова сгодится рисунок 1, в котором вместо линейной функции надо воображать линейное отображение из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$.

Теорема 2 о правом обратном отображении в конечномерном случае. *Пусть* V *— окрестность точки* $\widehat{x} \in \mathbb{R}^n$ *и* $F : V \to \mathbb{R}^m$ *– нелинейное отображение. Пусть при этом существует сюръективный оператор* $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *и числа* θ, $0 < \theta < 1$, $\delta > 0$ *и* $\gamma > 0$ *такие, что для любых* x, x', *для которых* $|x - \widehat{x}| < \delta, |x' - \widehat{x}| < \delta$, *выполнено неравенство*

$$|F(x) - F(x') - A(x - x')| \le \frac{\theta}{\gamma}|x - x'|. \qquad (1)_2$$

Тогда для любого вектора $y \in \mathbb{R}^m$, *отстоящего по модулю от* $F(\widehat{x})$ *не больше, чем на* $\frac{\delta(1-\theta)}{\gamma}$, *последовательность модифицированного метода Ньютона*

$$x_k = x_{k-1} + R(y - F(x_{k-1})),\ \ x_0 = \widehat{x},\ \ k \in \mathbb{N} \qquad (2)_2$$

будет стремиться к вектору $\varphi(y)$ *, отстоящему от* $\widehat{x}$ *по модулю не больше, чем на* δ *, такому, что* $F(\varphi(y)) = y$ *, и при этом* $|\varphi(y) - \widehat{x}| \le K|y - F(\widehat{x})|$ *, где* $K = \gamma/(1-\theta)$ *и* $\|R\| \le \gamma$ (см. предыдущую лемму).

Доказательство этого результата почти дословно повторяет доказательство одномерного случая, но мы, тем не менее, проведём его с полной подробностью.

Докажем сначала, что a) элементы x_k , которые строятся согласно $(2)_2$, для всех $k \ge 0$ лежат в

$$U_{\mathbb{R}^n}(\widehat{x}, \delta) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - \widehat{x}| < \delta\}$$

(это открытый шар в $\mathbb{R}^n$ с центром в $\widehat{x}$ радиуса δ). А потом докажем, что b) последовательность $\{x_k\}_{k \ge 0}$ фундаментальна.

Утверждение a) докажем по индукции. Начальный элемент x_0 принадлежит $U_{\mathbb{R}^n}(\widehat{x}, \delta)$ по определению. Пусть $x_s \in U_{\mathbb{R}^n}(\widehat{x}, \delta)$, $1 \le s \le k$. Докажем, что $x_{k+1} \in U_{\mathbb{R}^n}(\widehat{x}, \delta)$. Переписывая равенство $(2)_2$ в виде $x_k - x_{k-1} - R(y - F(x_{k-1})) = 0$ и применяя к нему оператор A , получим $A(x_k - x_{k-1}) - y + F(x_{k-1}) = 0$. Отсюда, из равенства $(2)_2$ и оценки нормы оператора R следует, что

$$|x_{k+1} - x_k| = |R(y - F(x_k)| \le \gamma|y - F(x_k)| =$$

$$\gamma|y - F(x_k) - y + F(x_{k-1}) + A(x_k - x_{k-1})| =$$

$$\gamma|F(x_k) - F(x_{k-1}) - A(x_k - x_{k-1})| .$$

Применяя далее $(1)_2$ и затем итерируя процедуру, получим

$$|x_k - x_{k-1}| \le \theta|x_k - x_{k-1}| \le ... \le \theta^k|x_1 - x_0| . \qquad (3)_2$$

Применяя неравенство треугольника и формулу $(3)_2$, получим

$$|x_{k+1} - \widehat{x}| \le |x_{k+1} - x_k| + \ldots + |x_1 - \widehat{x}| \le$$

$$(\theta^k + \theta^{k-1} + \ldots + 1)|x_1 - \widehat{x}| \le \tfrac{1}{(1-\theta)}|x_1 - \widehat{x}| .$$

Далее, учитывая формулу $(2)_2$ при $k = 1$ и выбирая y таким образом, что $|y - F(\widehat{x})| \le \frac{\delta(1-\theta)}{\gamma}$, получим

$$|x_1 - \widehat{x}| \le \gamma|y - F(\widehat{x})| \le \gamma\frac{\delta(1-\theta)}{\gamma} = \delta(1-\theta) .$$

Отсюда следует, что

$$|x_{k+1}-\widehat{x}| \le \tfrac{1}{(1-\theta)}\delta(1-\delta)=\delta\,,$$

то есть элементы x_k отстоят от $\widehat{x}$ не больше чем на δ.

Докажем утверждение b). Для любых $n,m\in\mathbb{N}$ имеем:

$$|x_{k+l}-x_k| \le |x_{k+l}-x_{k+l-1}|+\ldots+|x_{k+1}-x_k| \le$$

$$\left(\sum_{i=k}^{k+l-1}\theta^i\right)|x_1-\widehat{x}| \le \frac{\theta^k\gamma}{1-\theta}|y-F(\widehat{x})| \le \delta\theta^k\,, \qquad (4)_2$$

откуда вытекает, что $\{x_k\}_{n\in\mathbb{N}}$ – фундаментальная последовательность. Значит, она сходится. Обозначим предел этой последовательности $\varphi(y)$. Переход к пределу в $(2)_2$, учитывая непрерывность F, которая следует из условия $(1)_2$, приводит к равенству $F(\varphi(y))=y$, а переход к пределу в $(4)_2$ при $k=0$ и $l\to\infty$ обеспечивает неравенство $|\varphi(y)-\widehat{x}| \le K|y-F(\widehat{x})|$ с $K=\frac{\gamma}{(1-\theta)}$. □

Следствие (правило множителей Лагранжа). *Пусть в задаче на минимум или максимум функции* f_0 *при ограничении ограничении в виде равенств* $f_1(x)=f_2(x)=\ldots=f_m(x)=0$, *функции* $f_i,\ 0\le i\le m$, *определены в окрестности* V *точки* $\widehat{x}$ *и строго дифференцируемы в* $\widehat{x}$. *Если* $\widehat{x}$ *есть точка локального экстремума задачи, то существует ненулевой вектор множителей Лагранжа* $\overline{\lambda}=(\lambda_0,\ldots,\lambda_m)$ *такой, что точка* $\widehat{x}$ *является стационарной точкой функции Лагранжа* $\mathcal{L}(x,\overline{\lambda})=\sum_{i=0}^m\lambda_i f_i(x)$ (*т. е.* $\sum\limits_{i=0}^{m}\lambda_i f_i'(\widehat{x})=0$). *В частности, в задаче без ограничений — на экстремум функции* f_0 *— необходимым условием минимума в точке* $\widehat{x}$ *является условие стационарности* $f_0'(\widehat{x})=0$ (*теорема Ферма*).

Доказательство. Если допустим, что векторы $\{f_i'(\widehat{x})\}_{i=0}^m$ линейно независимы, то (это доказывается в курсе алгебры) у отображения $x\mapsto F(x)=(f_0(x),\ldots,f_m(x))$ производная сюръективна, следовательно, удовлетворяет теореме о правом обратном, и, значит, в любой окрестности точки $\widehat{x}$ при любом малом по модулю действительном α разрешима система уравнений $f_0(x(\alpha))=f_0(\widehat{x})+\alpha$, $f_1(x(\alpha))=\ldots=f_m(x(\alpha))=0$, $|x(\alpha)-\widehat{x}| \le C|\alpha|$, т. е. $\widehat{x}$ – не локальный экстремум. Противоречие доказывает теорему. □

Теорема 3 об обратном отображении в банаховом случае. *Пусть* X *— банахово пространство и отображение* $F : V \to X$ *определено и непрерывно в окрестности* V *точки* $\widehat{x} \in X$ *и при этом существуют обратимый линейный непрерывный оператор* $A : X \to X$ *(у которого обратный оператор также непрерывен)*[12] *и числа* $0 < \theta < 1$ и $\delta > 0$ *такие, что для любых* x, x' *из* V, *для которых* $\|x - \widehat{x}\| < \delta, \|x' - \widehat{x}\| < \delta$, *выполнено неравенство*

$$\|F(x) - F(x') - A(x - x')\| \leq \frac{\theta\|x - x'\|}{\|R\|}, \qquad (1)_3$$

где $R = A^{-1}$, *а* $\|R\|$ *— норма этого оператора. Тогда для любого элемента* $y \in \mathbb{R}^n$, *отстоящего от* $F(\widehat{x})$ *не больше, чем на* $\frac{\delta(1-\theta)}{\|R\|}$, *последовательность (модифицированного метода Ньютона)*

$$x_k = x_{k-1} + R(y - F(x_{k-1})),\ x_0 = \widehat{x},\ k \in \mathbb{N}, \qquad (2)_3$$

будет стремиться к элементу $\varphi(y)$, *отстоящему от* $\widehat{x}$ *по норме не больше, чем на* δ, *такому, что* $F(\varphi(y)) = y$ $F(\varphi(y)) = y$ *и при этом* $\|\varphi(y) - \widehat{x}\| \leq K\|y - F(\widehat{x})\|$, *где* $K = \frac{\|R\|}{(1-\theta)}$.

Доказательство этой теоремы фактически неотличимо от доказательства теоремы 1, надо только под Δ понимать открытый шар с центром в $\widehat{x}$ радиуса δ и в бесконечномерном случае модули заменять на нормы в пространстве X. $\square$

5. Дифференциальные формы и их интегрирование

Взаимная обратимость интегрирования и дифференцирования — один из самых фундаментальных результатов и в математике и в математическом естествознании.

Интегрируемость. Рассмотрим теперь вторую задачу Ньютона об определении длины пути по скорости. Пусть снова экипаж движется по прямолинейной дороге, нам известна мгновенная скорость экипажа $v(t)$ в любой момент времени t на отрезке

[12] В фунциональном анализе доказывается, что у непрерывного сюръективного оператора обратный оператор непрерывен, но в нашем примере этот результат не понадобится.

времени $\Delta = [t_0, t_1]$, и мы хотели бы найти изменение расстояния от начала отсчёта. Естественно допустить, что на малом отрезке времени $\Delta = [\tau, \tau + \Delta\tau]$ скорость меняется мало и изменение расстояния примерно равно отрезку времени $|\Delta\tau|$, умноженному на значение скорости в какой-то момент времени в этом промежутке. Таким образом, расстояние примерно равно сумме $v(\theta_1)|\Delta_1| + \ldots + v(\theta_N)|\Delta_N|$, где $\{\Delta_i\}_{i=1}^N$ — разбиение отрезка $[t_0, t_1]$ на N отрезочков и θ_i — какая-то точка отрезка Δ_i. Это приводит к понятию определенного интеграла. Напомним, как определяется это понятие.

Для этого перейдём к более привычным обозначениям функции и переменной. Пусть f — функция, определённая на отрезке $[a, b]$. Выражение $R(f, D, S) = \sum_{j=1}^n f(\xi_j)|\Delta_j|$ называется *римановой суммой функции* f *по разбиению* D *отрезка на отрезочки* Δ_i *при выборе* S *точек* ξ_i *на* Δ_i. Число I (если таковое существует) называется *определённым интегралом (Римана) от функции* f *на* $[a, b]$ (обозначаемым $\int_a^b f(x)dx$), если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое число $\delta > 0$, что для любого D с $\mathrm{Diam}(D) = \max_i |\Delta_i| < \delta$ при любом выборе S выполнено неравенство $|R(f, D, S) - I| < \varepsilon$.

Существование интеграла по Риману для непрерывной функции сразу следует из теоремы о равномерной непрерывности.

Следующий результат является центральным в одномерном математическом анализе: он связывает дифференцирование и интегрирование, и, возвращаясь к словам Ньютона, позволяет по скорости определять путь. Имеет место

Формула Ньютона – Лейбница. *Если функция* $v(\cdot)$ *непрерывна, то* $\int_{t_0}^{t_1} v(t)dt = \int_{t_0}^{t_1} \dot{s}(t)dt = s(t_1) - s(t_0)$. Или в декартовых обозначениях: *если функция* f *непрерывно-дифференцируема, то* $\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$.

Для вывода формулы Ньютона – Лейбница в обозначениях Ньютона рассмотрим, выбрав $\varepsilon > 0$, риманову сумму $\mathcal{R}(v(\cdot), D, S)$ столь малого диаметра, что она отличается от $\int_{t_0}^{t_1} v(t)dt$ меньше, чем на ε. На отрезке $\Delta_k = [\tau_{k-1}, \tau_k]$, где $\tau_0 = t_0$, $\tau_n = t_1$, справедлива формула $s(\tau_k) - s(\tau_{k-1}) = v(\theta_k)(\tau_k - \tau_{k-1})$ (теорема Лагранжа о среднем). Суммируя по k, получим слева $s(t_1) - s(t_0)$, а справа риманову сумму, отличающуюся от интеграла $\int_{t_0}^{t_1} v(t)dt$ менее, чем на ε. В силу произвольности ε отсюда следует формула Ньютона-Лейбница $\int_{t_0}^{t_1} v(t)dt = s(t_1) - s(t_0)$. $\square$

Для того, чтобы сформулировать общий результат об обратимости интегрирования и дифференцирования, необходимо освоиться с понятием дифференциальной формы, её дифференцировании и интегрировании.

Дифференциальных форм от одного переменного две:

$\omega_{10} = f(x)$

и

$\omega_{11} = f_1(x)\,dx$

(функции f и f_1 предполагаются гладкими). Дифференциальные формы ω_{1j} , $j = 0, 1$, нужно будет дифференцировать и интегрировать. Областью интегрирования будет здесь отрезок $\Omega^1 = [a, b]$, граница Ω^1 состоит из точек $\{a, b\}$. Вот формулы для дифференциалов:

$$d\,\omega_{10} = f'(x)dx\ ,$$

$$d\,\omega_{11} = 0\,,$$

а формулы интегрирования таковы:

$$\int\limits_{\partial\,\Omega^1} \omega_{10} = f(b) - f(a)\,,$$

$$\int\limits_{\Omega^1} \omega_{11} = \int\limits_a^b f_1(x)dx\ .$$

Для понимания дальнейшего покажем, как доказывается формула Ньютона – Лейбница (NL) на любом отрезке в предположении, что она доказана на отрезке $[-1, 1]$. Далее по ходу дела совершаем замену переменных (CV — changing variables) $x = y(t),\ y(-1) = a,\ y(1) = b$:

$$\int\limits_{\Omega^1} d\omega_{10} \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_{\Omega^1} f'(x)dx \stackrel{\text{CV}}{=} \int\limits_{-1}^{1} f'(y)dy \stackrel{\text{NL}}{=} f(b) - f(a) \stackrel{\text{def}}{=}$$

$$\int\limits_{\partial\Omega^1} f(x) \Leftrightarrow \int\limits_{\Omega^1} d\omega_{10} = \int\limits_{\partial\Omega^1} \omega_{10}\,.$$

А теперь возможно в первом приближении дать общее определение дифференциальной формы и доказать две формулы — Грина и Остроградского.

Дифференциальные формы ω_{nm} от n переменных порядка m — это суммы одночленов вида $f_{i_1\ldots i_m}(x)dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_m}$, где $x\in\mathbb{R}^n,\ m\le n$, а $dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_m}$ — определитель матрицы

$\{dx_{i_1}e_{i_1}, \ldots, dx_{i_m}e_{i_m}\}$, где dx_i — числа, а $\{e_i\}_{i=1}^n$ — канонический базис в $\mathbb{R}^n$. Дифференциал одночленной формы определяется так:

$$df_{i_1\ldots i_m}(x)dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_m} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f_{i_1\ldots i_m}(x)}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_m}$$

(если в каком-то члене дифференциалы совпадают, этот член отбрасывается). Переходим к доказательству обобщений формулы Ньютона–Лейбница.

Формула Грина. При $n = 2$, $m = 1$ дифференциальные формы $\omega_{2i},\ i = 1, 2$ имеют вид:

$$\omega_{21} = f_1(x_1, x_2)dx_1 + f_2(x_1, x_2)dx_2 \,,$$

$$\omega_{22} = f(x_1, x_2)dx_1 \wedge dx_2 \,.$$

Областью интегрирования Ω^2 будет здесь у нас гладкий взаимнооднозначный образ квадрата $B^2 = [-1, 1]^2$, граница Ω^2 состоит из образа границы квадрата (т. е. из его рёбер, проходимых, скажем, против часовой стрелки). Вот формулы для дифференциалов:

$$d\omega_{21} = \left(\frac{\partial f_2(x_1,x_2)}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1(x_1,x_2)}{\partial x_2}\right)dx_1 \wedge dx_2 \,,$$

$$d\omega_{22} = 0 \,,$$

а формулы интегрирования — обычные, преподающиеся в курсах анализа интегралы:

$\int\limits_{\partial\Omega^2} f_1(x)dx_1 + f_2(x)dx_2$ — интеграл по границе области Ω^2,

$\int\limits_{\Omega^2} f(x_1, x_2)dx_1 \wedge dx_2$ — это обычный двойной интеграл по области Ω^2: $\int\limits_{\Omega^2} f(x_1, x_2)dx_1dx_2$.

Двумерное обобщение формулы Ньютона – Лейбница проводится почти дословно как доказательство самой формулы Ньютона – Лейбница (CV — замена переменных $x = y(t)$, отображающая Ω^2 на B^2):

$$\int\limits_{\Omega^2} d\omega_{21} \overset{\text{def}}{=} \int\limits_{\Omega^2} d(f_1(x)dx_1 + f_2(x)dx_2) \overset{\text{CV}}{=}$$

$$\int\limits_{B^2} d(f_1(y)dy_1 + f_2(y)dy_2) \overset{\text{def}}{=} \int\limits_{B^2} \left(\frac{\partial f_2(y)}{\partial y_1} - \frac{\partial f_1(y)}{\partial y_2}\right)dy_1dy_2 \overset{(NL)}{=}$$

$\int\limits_{\partial B^2} f_1(y)dy_1 + f_2(y)dy_2$ (эта импликация доказывается с помощью формулы Ньютона – Лейбница после перестановки порядка интегрирования)

$$\stackrel{\mathrm{CV}}{=} \int\limits_{\partial\Omega^2} \omega_{21} \, .$$

Эта формула называется *формулой Грина.*

Формула Остроградского–Гаусса. При $n = 3, m = 2$ дифференциальные формы ω_{3i}, $i = 2, 3$ имеют вид:

$$\begin{aligned} \omega_{32} = f_1(x_1, x_2, x_3)dx_2 \wedge dx_3 + f_2(x_1, x_2, x_3)dx_3 \wedge dx_1 + \\ f_3(x_1, x_2, x_3)dx_1 \wedge dx_2 \, , \end{aligned}$$

$$\omega_{33} = f(x_1, x_2, x_3)dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \, .$$

Областью интегрирования Ω^3 будет здесь у нас гладкий взаимнооднозначный образ куба $B^3 = [-1, 1]^3$, граница Ω^3 состоит из образа ориентированной границы этого куба. Вот формулы для дифференциалов:

$$d\omega_{32} = (\tfrac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} + \tfrac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} + \tfrac{\partial f_3(x)}{\partial x_3})dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \, ,$$

$$d\omega_{33} = 0 \, ,$$

а формулы интегрирования — обычные, преподающиеся в курсах анализа интегралы:

$\int\limits_{\partial\Omega^3} f_1(x)dx_2 \wedge dx_3 + f_2(x)dx_3 \wedge dx_1 + f_3(x)dx_1 \wedge dx_2$

— интеграл по границе области Ω^3,

$\int\limits_{\partial\Omega^3} f(x_1, x_2, x_3)dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$

— это обычный интеграл $\int\limits_{\Omega} f(x_1, x_2, x_3)dx_1dx_2dx_3$ по области Ω^3.

Трёхмерное обобщение формулы Ньютона – Лейбница проводится почти дословно как доказательство самой формулы Ньютона – Лейбница или формулы Грина (CV — замена переменных $x = y(t)$, отображающая Ω^3 на B^3):

$$\int\limits_{\Omega^3} d\,\omega_{32} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \int\limits_{\Omega^3} d\,(f_1(x)\,dx_2 \wedge dx_3 + f_2(x)\,dx_3 \wedge dx_1 + f_3(x)\,dx_1 \wedge dx_2) \stackrel{\mathrm{CV}}{=}$$

$$\int\limits_{B^3} d\,(f_1(y)\,dy_2 \wedge dy_3 + f_2(y)\,dy_3 \wedge dy_2 + f_3(y)\,dy_1 \wedge dy_2 \stackrel{\mathrm{def}}{=}$$

$$\int\limits_{B^3} \left(\frac{\partial f_1(y)}{\partial y_1} + \frac{\partial f_2(y)}{\partial y_2}\right) + \frac{\partial f_3(y)}{\partial y_3}) dy_1 \wedge dy_2 \wedge dy_3 \overset{\text{NL}}{=}$$

$$\int\limits_{\partial B^3} f_1(y) dy_2 \wedge dy_3 + f_2(y) dy_3 \wedge dy_1 + f_3(y) dy_1 \wedge dy_2$$

(эта импликация доказывается с помощью формулы Ньютона – Лейбница после перестановки порядков интегрирования)

$$= \int\limits_{\partial\Omega^3} \omega_{32} \, .$$

Эта формула называется *формулой Остроградского – Гаусса.*

Формула Стокса – Пуанкаре. Здесь n и m произвольны. Доказанные формулы Ньютона – Лейбница, Грина и Гаусса – Остроградского позволяют высказать следующее общее утверждение об обратимости операторов дифференцирования и интегрирования дифференциальных форм: *интеграл от дифференциала дифференциальной формы по области равен интегралу от самой формы по границе области.* А именно, имеет место формула:

$$\int\limits_{\Omega^n} d\omega_{nm} = \int\limits_{\partial\Omega^m} \omega_{nm} \, .$$

Эту формулу иногда называют *формулой Стокса* (Стокс опубликовал формулу с $n = 2$, $m = 3$), иногда *формулой Стокса – Пуанкаре*, иногда формулой *Ньютона – Лейбница – Грина – Гаусса – Остроградского – Стокса – Пуанкаре.*

Для доказательства этой формулы надо лишь освоить формулу замены переменных.

Приложения

(математический анализ и естествознание)

Преподавая курс математического анализа, разумно сказать о единстве математики и математического естествознания. Галилею принадлежат слова: *Книга Природы написана на языке математики.* Ньютоновскую концепцию математического естествознания можно кратко выразить словами: *языком, на котором написана книга Природы, является математический анализ; в частности, законы динамики описываются дифференциальными уравнениями.*

Фундаментальным явлением природы, описываемым дифференциальными уравнениями, является *предсказуемость будущего настоящим.*

Это находит своё выражение в следующем результате:

Локальная теорема о существовании и единственности решения задачи Коши. *Пусть* V *— окрестность точки* $(\tau, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ *и функция* $f : V \to \mathbb{R}^n$ *определена и непрерывна в* V *и удовлетворяет там условию Липшица по* x. *Тогда на некотором отрезке* $\Delta = [\tau - \alpha, \tau + \alpha]$ *определено единственное решение задачи Коши*

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(\tau) = \xi\,.$$

Доказательство. Пусть в V лежит (при некоторых положительных a и b) во множестве $D = [\tau - a, \tau + a] \times B_{\mathbb{R}^n}(\xi, b)$ и для любых $(t, x_i) \in D$, $i = 1, 2$, выполняется неравенство $|f(t, x_2) - f(t, x_1)| \le L|x_2 - x_1|$. Применим следствие **теоремы о правом обратном** — теорему Грейвса к случаю, когда

$$X = Y = C([\tau - \alpha, \tau + \alpha], \mathbb{R}^n)\,,$$

$$F(x(\cdot))(t) = x(t) - \xi - \int_{\tau}^{t} f(s, x(s))ds\,,$$

$\Lambda = \mathrm{Id}$ (тождественный оператор),

а $\alpha = \min\{a, \frac{1}{2L}, \frac{b}{2M}\}$, где $M = \max\limits_{t \in [\tau - a, \tau + a]} f(t, \xi)$. Нетрудно убедится в том, что при этом условие $(2)_3$ теоремы о правом обратном выполняется, и значит, применение этой теоремы приводит к цели. $\square$

Движение частицы массы m по прямой под воздействием силы $F(x)$ (зависящей от координаты x частицы), согласно второму закону Ньютона, удовлетворяет дифференциальному уравнению $m\ddot{x} = F(x)$. Это уравнение при $F(x) = 0$ и $F(x) = \mathrm{const}$ описывает первые галилеевы законы динамики — инерции и свободного падения тел. Если сила притяжения частицы к центру пропорциональна её координате, т. е. когда $F(x) = -\alpha^2 x$ (т. е. действует закон Гука), частица совершает гармонические колебания: $x(t) = A \sin \alpha t + B \cos \alpha t$. Если $F(x) = \alpha^2 x$, то $x(t) = A \,\mathrm{sh}\, \alpha t + B \,\mathrm{ch}\, \alpha t$. Лишь одно это — исследование простейших одномерных движений — мотивирует целесообразность изучения *элементарных функций* (полиномов, тригонометрических функций и экспонент, а для решений уравнений с ними — радикалов, обратных тригонометрических функций и логарифмов) в школьных, институтских и университетских курсах.

А модифицированный метод Ньютона, применённый к решению задачи Коши для уравнения $\dot{x} = x$ при начальном условии $x(0) = 0$, приводит к ряду Маклорена для экспоненты: надо применить этот метод для решения уравнения $x(t) = 1 + \int\limits_0^t x(\tau)d\tau$, начиная с $x_0(t) \equiv 0$ (в пространстве $C(0, T)$ при любом $T > 0$) и мы будем получать $x_1 \equiv 1, x_2(t) = 1 + t, x_3(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2}$ и т.д. Аналогично получаются ряды для синуса и косинуса.

Об одной особенности законов, записанных в Книге Природы, Эйлер (1707-1783) сказал так: *В мире не происходит ничего, в чём не был бы виден смысл какого-нибудь максимума или минимума.* Эту мысль иногда формулируют следующим образом: *законы природы в значительной своей доле описываются экстремальными принципами.*

Знаний, полученных нами по теории экстремума, достаточно, чтобы даже на школьном уровне вывести закон преломления света при переходе из одной однородной среды с одной скоростью распространения света в другую с другой скоростью, который был экспериментально установлен Снеллиусом. Для этого надо применить условие минимума в простой задаче на минимум функции $f(x) = \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2+(l-x)^2}}{v_2}$, которая формализует первый экстремальный принцип в естествознании, открытый Ферма в 1662 г. (согласно этому принципу *свет, распространяющийся в неоднородной среде от одной точки до другой избирает путь, при котором затрачивается наименьшее время*; в поставленной задаче свет идёт из точки $(0, a)$ в верхней $(0, a)$ в верхней полуплоскости, где его скорость распространения равна v_1, в точку $(l, -b)$ в нижней полуплоскости, где скорость распространения света равна v_2), и мы приходим к закону Снеллиуса, согласно которому *отношение синуса угла падения луча к синусу угла отражения равно отношению скоростей* $\frac{v_1}{v_2}$.

Остывание стержня, расположенного на единичном отрезке $\Delta = [0, 1]$, имеющего начальную температуру, задаваемую функцией $f : \Delta \to \mathbb{R}$ и имеющего нулевую температуру на концах, описывается уравнением теплопроводности $\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}$, с начальным условием $u(0,x) = f(x)$ и краевыми условиями $u(t,0) = u(t,1) = 0$.

Решим поставленную задачу методом разделения переменных. Ищем решение уравнения струны в виде произведения $T(t)X(x)$. Тогда уравнение $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ приводит к равенству $\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}$. Значит, и $\frac{T'(t)}{T(t)}$ и $\frac{X''(x)}{X(x)}$ равны константе, которую обозначим через λ. Краевые условия ведут к равенствам $X(0) = X(1) = 0$. Таким образом, функция $X(\cdot)$ является решением задачи Коши $y'' = \lambda y,\ y(0) = y(1) = 0$. Отсюда следует, что $\lambda_k = -k^2$, и решениями задачи Коши являются функции $c_k = \sin k\pi x,\ k \in \mathbb{N}$. В курсе математического анализа доказывается, что ряд Фурье по синусам представляет любую гладкую (скажем, один раз непрерывно-дифференцируемую функцию). Остается решить уравнения $T'(t) + k^2 T(t) = 0$ и тогда общее решение нашей задачи (для $f \in C^1(\Delta)$) оказывается таковым:

$$u(t,x) = \sum_{k\in\mathbb{N}} c_k e^{-k^2 t} \sin k\pi x\,,$$

где c_k определяются однозначно по начальной функции f. $\square$

В квантовой механике нет возможности точно определить координату частицы, можно узнать лишь *вероятность ее нахождения в том или ином множестве*. Плотность вероятности определяется квадратом модуля волновой функции. Эволюция волновой функции определяется *уравнением Шредингера*.

Рассмотрим прямолинейно движущуюся частицу, ограниченную в своем движении отрезком $[0,1]$ оси Ox. Математически это можно описать потенциалом V, равным нулю на отрезке $[0,1]$ и бесконечностью вне него. Уравнение Шрёдингера для такого потенциала имеет на $[0,1]$ вид: $\psi'' + \frac{8\pi^2 mE}{h^2}\psi = 0$, граничные условия $\psi(0) = \psi(1) = 0$. Оно решается методом разделения переменных совершенно аналогично тому, как это было проделано для остывания стержня.

И очень близко от формулы Стокса находится электромагнитная теория (уравнение Максвелла и прочее).

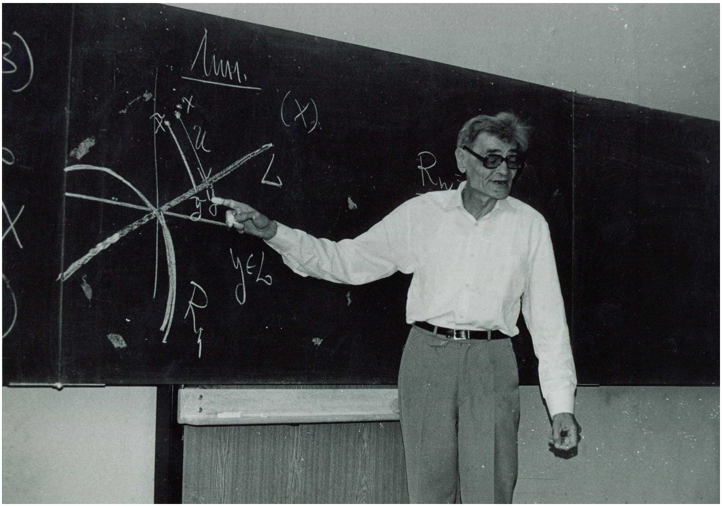
Так что курсом математического анализа можно иллюстрировать единство математики и естествознания на протяжении четырёх веков — от Галилея до Бора и Шрёдингера.

Литература к обзорной лекции

[1] Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3 т. – М. : Наука, 1969.

[2] Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа. В 2 т. Издание второе исправленное и дополненное. – М. : Высшая школа, 1981.

[3] Зорич В. А. Математический анализ. В 2 т. – М. Фазис, 1997.



Сергей Борисович Стечкин
(1920 – 1995)

Если вы будете шуметь, то я буду читать лекцию молча.

Думал-думал день-деньской – нет идейки никакой – это нормальный процесс работы над задачей.

Понять - это прежде всего привыкнуть.

Можно считать, что понял чужую работу, когда увидел, что это можно сделать проще.

Только после того, как задача полностью решена, можно писать статью. Чем больше работа вычищена от мусора (даже относящегося к делу), тем лучше. Работа – не помойное ведро, куда можно кидать все, что вам заблагорассудится. Включайте в работу только самое необходимое.

Неуважение к предкам – первый признак безнравственности. Плохо, если сразу после разъяснения терминологии пишут: "Я доказал такую-то теорему". Надо сказать, какая задача рассматривается. Помните, что математика делится на три части:

1) то, что было до меня; 2) то, что сделал я; 3) то, что будет после меня.

Знание литературы - половина решения задачи.

Творчество не есть складывание дома из кубиков. По Канту это "синтетическое суждение a priori".