МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
ПРОГРАММА КОЛЛОКВИУМА

Механико-математический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова
2 курс, осенний семестр
Лектор — доц. В.В. Галатенко

1. Числовые ряды, их сходимость. Необходимое условие сходимости. Хвосты и остатки ряда, связь частичных сумм и остатков сходящегося ряда. Связь сходимости ряда и расстановки скобок. Критерий Коши сходимости ряда. Абсолютная и условная сходимось рядов.
2. Ряды с неотрицательными членами. Эквивалентность сходимости и ограниченности последовательности частичных сумм. Признаки сравнения.
3. Признак Де Аламбера. Радикальный признак Коши.
4. Интегральный признак Коши-Маклорена. Использование интегралов для анализа асимптотики частичных сумм расходящихся рядов и остатков сходящихся рядов.
5. Признаки Куммера и Раабе.
6. Признак Гаусса.
7. Признак Лейбница сходимости числового ряда.
8. Класс последовательностей ограниченной вариации как замыкание класса монотонных ограниченных последовательностей.
9. Признаки Абеля и Дирихле сходимости числового ряда (в случае условия монотонности и в случае условия ограниченности вариации).
10. Комплексные ряды, сходимость комплексных рядов.
11. Перестановки рядов. Теорема Коши о перестановке абсолютно сходящегося ряда.
12. Теорема Римана о перестановке условно сходящегося ряда.
13. Произведения числовых рядов. Теорема Коши о произведении абсолютно сходящихся рядов.
14. Теорема Мертенса о произведении числовых рядов.
15. Бесконечные произведения. Определение, необходимосе условие сходимости. Связь со сходимостью рядов. Критерии и признаки сходимости.
16. Поточечная и равномерная сходимость функциональных последовательностей. Супремум-критерий равномерной сходимости. Критерий Коши равномерной сходимости. Арифметические свойства. Примеры.
17. Поточечная и равномерная сходимость функциональных рядов. Необходимое условие равномерной сходимости, критерий Коши равномерной сходимости. Признак Вейерштрасса, Дирихле, Абеля равномерной сходимости.
18. Признаки Абеля и Дирихле равномерной сходимости функциональных рядов.
19. Признак Дини равномерной сходимости.
20. Перестановка пределов. Критерий Маркова-Гордона.
21. Свойства равномерно сходящихся последовательностей и рядов: переход к пределу, непрерывность, интегрируемость.
22. Теорема о почленном дифференцировании функционального ряда.

23. Степенные ряды. Понятие радиуса сходимости, формула Коши-Адамара. Теоремы Абеля.

24. Непрерывность, почленная дифференцируемость и интегрируемость степенных рядов. Комплексная дифференцируемость степенных рядов. Степенной ряд как ряд Тейлора своей суммы. Теорема единственности для степенных рядов.

25. Разложение в степенные ряды элементарных функций.

26. Пример всюду непрерывной, но нигде не дифференцируемой функции.

27. Суммирование рядов методом средних арифметических и методом Абеля. Линейность и вполне регулярность этих методов. Теорема Фробениуса.

28. Разложение синуса в бесконечное произведение. Формула Валлиса.

29. Формула Стирлинга.

30. Критерий компактности Хаусдорфа.

31. Теорема Арцеля-Асколи.

32. Двойные и повторные ряды.

ЗАДАЧИ К КОЛЛОКВИУМУ

1. Для каждого действительного α исследуйте на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{arcctg} n^{\alpha}$.

2. Существует ли такая последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ неотрицательных чисел, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, но для любой последовательности $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, стремящейся к бесконечности, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ расходится? (Неформально этот вопрос можно переформулировать так: существует ли самый большой сходящийся ряд.)

3. Существует ли такая последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ неотрицательных чисел, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, но для любой последовательности $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ положительных чисел, стремящейся к бесконечности, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n}$ сходится? (Неформально этот вопрос можно переформулировать так: существует ли самый маленький расходящийся ряд.)

4. Приведите примеры сходящегося и расходящегося рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ с $a_n > 0$, для которых

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = 1$$

(эти примеры позволяют оценить мертвую зону признака Раабе).

5. Приведите пример ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, члены которого монотонно стремятся к нулю, для которого не применим признак Гаусса. (Этот пример показывает, что несмотря на внешнее отсутствие "мертвой зоны", признак Гаусса не является универсальным.)

6. Приведите пример $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, члены которого монотонно стремятся к нулю, для которого не применим признак Гаусса, но при этом применим признак Раабе. (Этот пример показывает некорректность утверждения о том, что признак Гаусса сильнее признака Раабе).

7. Найти такие значения C_1, C_2 и α, что при всех N справедливо неравенство

$$\left|\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}-C_1N^{\alpha}\right|<C_2.$$

8. Найти такие значения C и α ($C\neq 0$), что

$$\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{n^3}=\frac{C}{N^{\alpha}}+O\left(\frac{1}{N^{\alpha+1}}\right)$$

при $N\to\infty$.

9. Приведите примет таких последовательностей $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится, $b_n\to 1$ $(n\to\infty)$, но ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ расходится.

10. (i) Известно, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится. Что можно сказать о сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$?
    (ii) Известно, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ сходится. Что можно сказать о сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$?
    (iii) Известно, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится. Что можно сказать о сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^3$?
    (iv) Известно, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^3$ сходится. Что можно сказать о сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$?
    (v) Известно, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится. Что можно сказать о сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin a_n$?

11. Существует ли двойной ряд $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty}a_{m,n}$, который
    (i) суммируется по прямоугольникам, но не суммируется по квадратам;
    (ii) суммируется по квадратам, но не суммируется по прямоугольникам.

12. Существует ли такой функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$, который состоит из неотрицательных непрерывных на отрезке $[0;1]$ функций, сходится на отрезке $[0;1]$ равномерно, но при этом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sup\limits_{x\in[0;1]}f_n(x)=+\infty$ (то есть равномерную сходимость нельзя доказать по признаку Вейерштрасса).

13. Существует ли функциональный ряд, который на некотором множестве сходится равномерно, но при этом ряд из модулей его членов в каждой точке этого множества расходится?

14. Исследуйте на равномерную сходимость на всевозможных интервалах, лежащих в интервале $(0;\pi)$, ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}$.

15. Исследуйте на равномерную сходимость на интервале $(0;\pi)$ ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x\sin nx}{n}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x\cos nx}{n}$.

16. Приведите пример последовательности функций $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, непрерывных на отрезке $[0,1]$, которая поточечно сходится к нулю на этом отрезке, но при этом (i) $\int\limits_0^1 f_n(x)\,dx\to+\infty$ $(n\to\infty)$; (ii) $\int\limits_0^1 f_n(x)\,dx\to 2016$ $(n\to\infty)$.

17. Последовательность непрерывных на луче $[0, +\infty)$ и интегрируемых на этом луче функций равномерно сходится на этом луче к нулю. Можно ли утверждать что последовательность интегралов от этих функций по лучу $[0, +\infty)$ также сходится к нулю?

18. Может ли степенной ряд в одном конце интервала сходимости сходиться абсолютно, а в другом — сходиться условно?

19. Каков может быть радиус сходимости у суммы двух степенных рядов с общим центром, если радиус сходимости первого ряда равен R_1, а радиус сходимости второго ряда равен R_2?

20. Вычислите с точностью не хуже 10^{-4} (i) $\int\limits_0^1 \sin(x^2)\,dx$; (ii) $\int\limits_2^\infty \frac{1}{1+x^5}dx$.

21. Для каждого действительного α исследуйте сходимость биномиального ряда (разложения функции $(1+x)^\alpha$ в ряд Тейлора–Маклорена) в точках $x = \pm 1$.

22. Докажите иррациональность числа e.

23. Исходя из определения произведения рядов, непосредственно проверьте равенство

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!}$$

(по сути, предлагается проверить равенство $e^x e^y = e^{(x+y)}$ в ситуации, когда функция e^x определена как сумма ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$).

24. Найдите сумму ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$ (i) используя почлененое интегрирование; (ii) возведя в квадрат ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$.

25. Приведите пример функции $f(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$, для которой ряд Тейлора–Маклорена сходится всюду на $\mathbb{R}$, но сумма этого ряда совпадает с $f(x)$ (i) лишь в точке 0; (ii) лишь на отрезке $[-1; 1]$.

26. Приведите пример ряду, суммируемого методом средних арифметических, но не суммируемого методом Абеля.

27. Приведите пример ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, который суммируется методом Абеля, но при этом (i) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{n} = \infty$; (ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{n^2} = \infty$.