МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

ПРОГРАММА КОЛЛОКВИУМА

Механико-математический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова
1 курс, 1 поток
Весенний семестр 2015/2016 учебного года
Лектор — доц. В.В. Галатенко

1. Точные и обобщенные первообразные. Неопределенный интеграл. Линейность неопределенного интеграла, интегрирование по частям, теоремы о замене переменной в неопределенном интеграле и примеры их применения.

2. Таблица неопределенных интегралов. Интегрирование рациональных функций. Метод Остроградского интегрирования рациональных функций и его применение для нахождения рациональной части интеграла. Интегрирование дробно-линейных иррациональностей.

3. Интегрирование квадратичных иррациональностей (подстановки Эйлера). Интегрирование дифференциального бинома (подстановки Чебышева). Интегрирование тригонометрических функций.

4. Понятия метрического пространства. Открытые и замкнутые множества в метрических пространствах. Необходимые условия компактности. Недостаточность этих условий.

5. Сходимость последовательностей в метрических пространствах. Лемма Больцано–Вейерштрасса о выделении сходящейся подпоследовательности из последовательности точек компакта.

6. Полные метрические пространства. Принцип вложенных шаров.

7. Теорема Бэра.

8. Принцип сжимающих отображений, примеры его применения.

9. Отображения из метрических пространств в метрические пространства. Предел отображения (два определения, их эквивалентность). Непрерывность отображений: локальное и глобальное определения, их эквивалентность.

10. Компактность непрерывного образа компакта. Теорема Кантора о равномерной непрерывности.

11. Пути в метрических пространствах. Связность и линейная связность, связность линейно связного множества.

12. Связность непрерывного образа связного множества. Связные множества в $\mathbb{R}$. Теорема о промежуточных значениях непрерывной функции.

13. Нормированные пространства. Порождение нормой метрики. Примеры нормированных пространств. Полнота пространств $B(K)$ и $C(K)$ (ограниченных и непрерывных на компакте функций).

14. Наличие общей точки у последовательности вложенных замкнутых шаров в банаховом пространстве.

15. Линейная связность открытого связного множества в нормированном пространстве.

16. Последовательности точек нормированного пространства, предел последоватиельности, его свойства.

17. Пространства со скалярным произведением. Порождение нормы скалярным произведением. Неравенство Коши-Буняковского.

18. $\mathbb{R}^n$ как пространство со скалярным произведнием. Порождаемые норма и метрика. Эквивалентность сходимости и покоординетной сходимости последовательностей в $\mathbb{R}^n$, полнота $\mathbb{R}^n$, критерий компактности в $\mathbb{R}^n$, замкнутость декартова произведения замкнутых множеств в $\mathbb{R}^n$.

19. Вектор-функции и скалярные функции нескольких переменных, их связь. Предел функции нескольких переменных: для вектор-функций — эквивалентность сходимости и покоординатной сходимости; для скалярных функций — предел как предел по базе и следствия этого (единственность предела, арифметические свойства, переход к пределу в неравенствах, критерий Коши).

20. Непрерывность функции нескольких переменных. Локальные свойства непрерывных функций. Непрерывность композиции. Глобальные свойства непрерывных функций. Теорема о промежуточных значениях непрерывной функции.

21. Дифференцируемость функций нескольких переменных: понятия дифференциала, частных производных, их связь. Необходимое условие дифференцируемости.

22. Достаточное условие дифференцируемости.

23. Свойства дифференциала: линейность, дифференциал произведения и частного. Дифференциал и частные производные сложной функции. Производная по направлению и градиент. Геометрический смысл градиента.

24. Частные производные второго порядка. Теорема Шварца о равенстве смешанных частных производных второго порядка. Пример, показывающий, что условие теоремы Шварца не является необходимым.

25. Теорема Юнга о равенстве смешанных частных производных второго порядка.

26. Частные производные высших порядков. Следствие из теоремы Шварца о равенстве смешанных частных производных высших порядков на открытом множестве.

27. Дифференциалы высших порядков от скалярных функций как полилинейные формы. Необходимое условие дифференцируемости m раз и выражение m-го дифференциала через частные производные.

28. Достаточное условие дифференцируемости m раз. Стандартное определение дифференциалов высших порядков (как полилинейных форм, вычисляемых при совпадающих аргументах). Инвариантность формы m-го дифференциала при линейных заменах переменных.

29. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано как ее следствие.

30. Локальные экстремумы скалярных функций многих переменных: определение, необходимые условия экстремума, достаточные условия наличия или отсутствия экстремума в стационарной точке.

31. Теорема о существовании и непрерывности неявной функции.

32. Теорема о дифференцируемости неявной функции.

33. Теорема о существовании и дифференцируемости неявно заданного отображения.

34. Понятие функциональной зависимости. Связь функциональной зависимости и ранга матрицы Якоби.

35. Условный экстремум. Необходимое условие условного экстремума.

36. Достаточные условия условного экстремума или его отсутствия.

ЗАДАЧИ К КОЛЛОКВИУМУ

1. Может ли у неограниченной на $\mathbb{R}$ функции существовать точная первообразная?

2. Может ли у разрывной функции существовать точная первообразная?

3. Верно ли, что у каждой кусочно-постоянной функции существует обобщенная первообразная?

4. Приведите пример функции, не имеющей обобщенной первообразной ни на одном невырожденном промежутке.

5. Найдите точную первообразную функции $x^2 e^x \cos x$.

6. Покажите, что в принципе вложенных шаров условие стремления к нулю радиусов является существенным.

7. Покажите, что в полном метрическом пространстве замыкание открытого шара может не совпасть с замкнутым шаром того же радиуса.

8. В метрическом пространстве один замкнутый шар является собственным подмножеством другого. Какие значения может принимать отношение радиусов этих шаров?

9. Найдите условия, гарантирующие, что линейное отображение пространства $\mathbb{R}^n$ в себя, заданного в стандартном базисе матрицей A, является сжимающим относительно (i) евклидовой нормы; (ii) нормы ℓ^1; (iii) нормы ℓ^∞. Являются ли найденные условия необходимыми?

10. Можно ли задать на множестве действительных чисел метрику, которая породит сходимость последовательностей, отличную от стандартной?

11. Можно ли задать на пространстве $\mathbb{R}^n$ норму, которая породит сходимость последовательностей, отличную от стандартной?

12. Можно ли задать на пространстве $C^1[0,1]$ две нормы, порождающие разные сходимости последовательностей?

13. Существует ли непрерывная функция двух переменных, имеющая бесконечно много строгих локальных максимумов, но ни одного локального минимума?

14. Функция двух переменных стремится к нулю, когда аргумент стремится к началу координат по любому направлению. Верно ли, что и как функция двух переменных она стремится к нулю при стремлении аргумента к началу координат?

15. Верно ли, что если функция двух переменных непрерывна как по каждой переменной (при каждом фиксированном значении другой переменной), то она непрерывна всюду и как функция двух переменных?

16. Верно ли, что если функция двух переменных $f(x, y)$ непрерывна по x при каждом значении y и удовлетворяет условию $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq |y_1 - y_2|$, то $f(x, y)$ непрерывна как функция двух переменных?

17. Верно ли, что существование и тождественное равенство нулю всех частных производных является критерием постоянства функции на открытом связном подмножестве $\mathbb{R}^n$?

18. Верно ли, что если $f'_x(x, y)$ сущесвует и равна нулю в каждой точке плоскости, то $f(x, y)$ не зависит от x (то есть для некоторой функции $g(y)$ справедливо равенство $f(x, y) \equiv g(y)$)?

19. Приведите пример функции двух переменных, имеющей частные производные по каждой переменной в каждой точке, но не дифференцируемой в начале координат.