МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

ПРОГРАММА КОЛЛОКВИУМА

Механико-математический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова
1 курс, 1 поток
осенний семестр 2015/2016 учебного года
Лектор — доц. В.В. Галатенко

1. Понятие множества. Способы задания множеств. Парадокс Рассела. Понятия подмножества, равенства множеств. Операции над множествами: объединение, пересечение, разность. Правила дополнения.

2. Кванторы существования и всеобщности. Построение отрицаний утверждений с кванторами.

3. Понятие пары и упорядоченной пары. Декартовы произведения множеств. Понятие отношения. Частные случаи: отношения порядка, отношения эквивалентности.Классы эквивалентности.

4. Понятия отображения, инъекции, сюръекции, биекции. Понятия образа и прообраза. Понятие композиции отображений. Теорема о существовании обратного отображения.

5. Аксиоматика Пеано. Принцип математической индукции. Порождение отношения порядка и арифметических операций на множестве натуральных чисел отношением следования (без доказательства). Множества целых и рациональных чисел, отношение порядка и арифметические операции на этих множествах.

6. Аксиоматика действительных чисел. Эквивалентные формы аксиомы полноты (принцип полноты Дедекинда, принцип полноты Вейерштрасса).

7. Принцип Архимеда, принцип вложенных отрезков Кантора. Их связь с аксиомой полноты.

8. Бесконечные десятичные дроби как модель действительных чисел. Проверка справедливости аксиомы полноты для этой модели.

9. Примеры применения принципа математической индукции: неравенство И. Бернулли, бином Ньютона.

10. Понятие эквивалентности (равномощности) множеств, свойства: рефлексивность, симметричность, транзитивность. Сравнение мощностей: транзитивность отношения $\operatorname{card} A \leqslant \operatorname{card} B$; сравнимость мощностей произвольной пары множеств (без доказательства); теорема Кантора-Бернштейна-Шредера.

11. Множества из n элементов. Конечные, счетные и не более чем счетные множества. Теорема Кантора об объединении не более чем счетной совокупности не более чем счетных множеств и следствия из нее: счетность множества целых чисел, рациональных чисел, алгебраических чисел.

12. Теорема Кантора о несчетности отрезка. Существование трансцендентных (неалгебраических) чисел.

13. Континуальные множества. Континуальность промежутков числовой прямой, всей числовой прямой, фигур на плоскости, множества всех двузначных последовательностей. Теорема Кантора о множестве всех подмножеств.

14. Внутренние, внешние, граничные точки множеств на числовой прямой. Открытые и замкнутые множества на числовой прямой, их свойства. Предельные точки. Характеризация замкнутых множеств в терминах граничных и в терминах предельных точек.

15. Теорема Гейне-Бореля-Лебега о компактности ограниченных замкнутых множеств на числовой прямой. Критерий компактности подмножеств числовой прямой.

16. Теорема Больцано-Вейерштрасса о существовании предельной точки.

17. Понятия числовой последовательности и предела числовой последовательности (на $\mathbb{R}$ и $\overline{\mathbb{R}}$). Свойства (единственность предела, ограниченность сходящейся последовательности, свойство отделимости, независимость предела от изменения конечного числа членов последовательности, переход к пределу в неравенствах, лемма о зажатой последовательности).

18. Бесконечно малые последовательности и ограниченные последовательности, их свойства. O-символика. Арифметические свойства предела последовательности.

19. Сходимость монотонных последовательностей. Число e.

20. Теорема Больцано-Вейерштрасса о выделении сходящейся подпоследовательности.

21. Критерий Коши сходимости последовательности и примеры его применения.

22. Понятие числового ряда. Сходимость числового ряда. Необходимое условие и критерий Коши сходимости числового ряда. Абсолютная и условная сходимость числовых рядов. Понятие равномерной сходимости функционального ряда.

23. Признаки сходимости знакопостоянных рядов (сравнения, Д'Аламбера, радикальный признак Коши).

24. Понятие частичного предела последовательности. Теорема о структуре множества частичных пределов последовательности.

25. Эквивалентные определения верхнего и нижнего пределов последовательности.

26. Определения предела функции, их эквивалентность. Свойства предела функции (единственность, предел по подмножеству, арифметические свойства, переход к пределу в неравенствах, лемма о зажатой функции). Предел композиции функций.

27. Критерий Коши существования предела функции.

28. Односторонние пределы. Теорема об односторонних пределах монотонной функции. Класификация точек разрыва.

29. Непрерывность функции. Локальные свойства непрерывных функций.

30. Теорема Больцано-Коши о промежуточных значениях непрерывной на промежутке функции.

31. Теоремы Вейерштрасса о свойствах непрерывной на отрезке функции.

32. Теорема Кантора о равномерной непрерывности непрерывной на отрезке функции.

ЗАДАЧИ К КОЛЛОКВИУМУ

1. Является ли равенство $(A \cup B) \setminus C = A \cup (B \setminus C)$ (i) верным хотя бы для одной тройки множеств A, B, C; (ii) неверным хотя бы для одной тройки множеств A, B, C?

2. (i) Сколько различных отношений линейного порядка можно задать на множестве из семи элементов? (ii) Сколько различных отношений эквивалентности можно задать на множестве из четырех элементов?

3. Пусть f — произвольное отображения. Верны ли равенства
$$f(A \circ B) = f(A) \circ f(B)$$
и
$$f^{-1}(A \circ B) = f^{-1}(A) \circ f^{-1}(B),$$
если через $\circ$ обозначено (i) объединение множеств; (ii) пересечение множеств; (iii) разность множеств?

4. Вычислите для каждого натурального n суммы $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k$ и $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k$.

5. Доказажите, что если A и B — такие непустые подмножества множества действительных чисел, что $\forall a \in A \ \exists b \in B$: $a \leqslant b$, то $\sup A \leqslant \sup B$. Останется ли утверждение верным, если всюду в нем нестрогие неравенства заменить на строгие?

6. Существует ли такое множество A, что для любого множества B выполняется неравенство $\mathrm{card} B \leqslant \mathrm{card} A$?

7. Докажите, что множества иррациональных и трансцендентных чисел континуальны.

8. Доказажите, что множество Кантора (i) замкнуто; (ii) континуально.

9. Доказажите, что на числовой прямой существует ровно два множества, которые одновременно открыты и замкнуты.

10. Верно ли, что у любой последовательности вложеных замкнутых непустых множеств ($F_{n+1} \subset F_n$) есть хотя бы одна общая точка?

11. Верно ли, что у любой последовательности вложеных замкнутых непустых ограниченных множеств ($F_{n+1} \subset F_n$) есть хотя бы одна общая точка?

12. Докажите, что если последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится, то последовательность $\{|a_n|\}_{n=1}^{\infty}$ также сходится. Верно ли обратное утверждение?

13. Докажите,что для любого $a > 1$ справедливо равенство $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3}{a^n} = 0$.

14. Докажите равенство $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2015n + 2016} = 1$.

15. Исследуйте на сходимость последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, в которой $a_1 = 2015$, $a_{n+1} = \sin a_n$ $(n \in \mathbb{N})$.

16. Докажите, что если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \in \overline{\mathbb{R}}$ и $\sigma_n = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)/n$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = A$.

17. Доказажите, что если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \in \overline{\mathbb{R}}$, все $a_n > 0$ и $g_n = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}$, то $\lim\limits_{n\to\infty} g_n = A$.

18. Исследовуйте на сходимость ряды (i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{n}}{n^3}$; (ii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$; (iii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$; (iv) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log_2 n}$.

19. Исследуйте на равномерную сходимость функциональную последовательность $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$ (i) на интервале $(0,\ \ 0,99)$; (ii) на интервале $(0,1)$.

20. Исследуйте на равномерную сходимость функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ (i) на интервале $(0,2015)$; (ii) на интервале $(0,+\infty)$.

21. Докажите, что верхний предел суммы последовательностей не превосходит суммы верхних пределов этих последовательностей, причем неравенство может быть строгим.

22. Существует ли последовательность, множество частичных пределов которой (i) счетно и ограничено; (ii) совпадает с отрезком $[0,1]$; (iii) совпадает с интервалом $(0,1)$; (iv) совпадает с множеством $[0,1] \setminus \{\frac{1}{2}\}$?

23. Верно ли, что для любого непустого замкнутого подмножества $\overline{\mathbb{R}}$ существует последовательность, множество частичных пределов которой совпадает с этим множеством?

24. Верно ли, что если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ и $\lim\limits_{y\to b} g(y) = c$, то $\lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = c$?

25. Докажите, что функция Римана непрерывна во всех иррациональных точках.

26. Докажите, что у монотонной на всей числовой прямой функции не более чем счетное множество точек разрыва.

27. Функции $\sqrt{x}$ и x^2 исследуйте на равномерную непрерывность на интервалах $(0,2015)$ и $(0,+\infty)$.

28. Функции $f(x)$ и $g(x)$ равномерно непрерывны на $\mathbb{R}$. Докажите, что композиция $f(g(x))$ равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$.

29. Существует ли функция, определенная на всей числовой прямой и не ограниченая ни на одном невырожденном интервале?

30. Может ли композиция двух определенных на всей числовой прямой и разрывных в каждой точке функций быть всюду непрерывной?

31. Докажите что определенная на всей числовой функция $f(x)$ непрерывна в каждой точке если и только если для каждого открытого множества $G \subset \mathbb{R}$ открытым является $f^{-1}(G)$.

32. Верно ли, что если определенная на всей числовой прямой функция $f(x)$ принимает все промежуточные значения (то есть образ каждого промежутка — промежуток), то f непрерывна?