И.Х. Сабитов

Конспекты семинаров по курсу математического анализа

Тема: Повторные пределы в рядах и несобственных интегралах, зависящих от параметра.

1. Основное утверждение. При исследовании и обосновании методов вычисления несобственных интегралов, зависящих от параметра, в большом количестве случаев используется предельный переход под знаком интеграла, или перестановка операций интегрирования и предельного перехода. Основой обоснования допустимости перестановки (т.е. коммутирования) таких операций следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть для числовой функции $f(x,y)$, заданной на множестве $X\times Y$, где $X\subset \mathbf{R}, Y\subset\mathbf{R}$, выполнены следующие условия:*

$$1)\qquad \exists \lim_{y\to y_0} f(x,y)=\varphi(x),$$

равномерно относительно $x\in X$, где y_0 - предельная точка для Y;

2) Для каждого $y\in Y$

$$\exists \lim_{x\to x_0} f(x,y)=\psi(y),$$

где x_0 - предельная точка для X.

Тогда существуют пределы

$$\lim_{y\to y_0}\psi(y),\ \lim_{x\to x_0}\varphi(x)$$

и они равны, т.е. существуют оба повторных предела и они равны:

$$\exists \lim_{y\to y_0}(\lim_{x\to x_0} f(x,y))=\exists \lim_{x\to x_0}(\lim_{y\to y_0} f(x,y)).$$

Это утверждение полезно запомнить в виде следующей диаграммы коммутативности (с обозначением через L общего значения предела):

$$\begin{tikzcd}
f(x,y) \arrow[r, Rightarrow, "y\to y_0", "x\in X"'] \arrow[d, "\exists\lim_{x\to x_0}"'] & \varphi(x) \arrow[d, "\exists\lim_{x\to x_0}"] \\
\psi(y) \arrow[r, "\exists\lim", "y\to y_0"'] \arrow[ur, dotted, no head] & L
\end{tikzcd}$$

Диаграмму нужно понимать так: если выполнена ее часть слева от пунктирной диагонали, то выполнена ее правая часть, т.е. из левой части следует существование двух пределов справа и их равенство. Доказательство утверждения основано на применении критерия Коши существования предела (на факте необходимости его выполнения в левой части диаграммы и достаточности его выполнения для справедливости правой части).

2. Применения. *Непрерывность предельной функции.*

Теорема 2. *Пусть элементы $f_n(x)$ функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$ заданы на некотором множестве X, непрерывны в точке $x_0\in X$, предельной для X, и $\exists\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$ равномерно относительно x из некоторой окрестности $U(x_0)$ точки x_0 в X. Тогда функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0.*

Здесь применение теоремы 1 будет в случае, когда роль переменной y играет дискретное n, а y_0 соответствует предельному значению $n = \infty$. Имеем условия

$$1) \qquad \exists \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

равномерно относительно $x \in U(x_0)$;

2) Для каждого $n \in \mathbb{N}$

$$\exists \lim_{x\to x_0} f_n(x) = f_n(x_0) = \psi_n.$$

Тогда по теореме 1 (составьте диаграмму!)

$$\exists \lim_{n\to\infty} \psi_n = \exists \lim_{x\to x_0} f(x),$$

но $\psi_n = f_n(x_0)$, а $\lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0)$, значит,

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{n\to\infty} \psi_n = \lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0),$$

что и дает непрерывность функции $f(x)$.

Если $f_n(x)$ являются частичными суммами функционального ряда из непрерывных функций, то при выполнении соответствующих условий получаем утверждение о непрерывности суммы ряда.

Предельный переход в несобственном интеграле.

Теорема 3. *Пусть дан несобственный интеграл*

$$F(y) = \int_a^\omega f(x,y)dx$$

с условиями:

1) функция $f(x,y)$ определена в области $X \times Y, X = a \le x < \omega, Y \subset R$, и при каждом $y \in Y$ интегрируема по x в собственном смысле на любом отрезке $[a, A], A < \omega$;

2) на любом отрезке $[a, A], A < \omega$, функция $f(x,y)$ при $y \to y_0$ стремится к некоторой функции $\varphi(x)$ равномерно относительно $x \in [a, A]$ (предполагается. что y_0 является предельной точкой для Y);

3) интеграл $\int_a^\omega f(x,y)dx$ сходится равномерно относительно y из некоторой проколотой окрестности $V(y_0) \subset Y$.

Тогда функция $\varphi(x)$ интегрируема в несобственном смысле на $[a, \omega)$ и

$$\exists \lim_{y\to y_0} \int_a^\omega f(x,y)dx = \int_a^\omega \varphi(x)dx = \int_a^\omega (\lim_{y\to y_0} f(x,y))dx, \tag{1}$$

т.е. можно перейти к пределу под знаком интеграла.

Доказательство тоже основано на теореме 1. Введем семейство функций

$$F(y, A) = \int_a^A f(x,y)dx.$$

Для этого семейства выполнены условия теоремы 1, для которой сейчас в роли переменной x выступает переменная y, а переменная A соответствует переменной y. Имеем диаграмму

$$\begin{tikzcd}
F(y,A) = \displaystyle\int_a^A f(x,y)dx \arrow[r, Rightarrow, "A\to\omega", "y\in V(y_0)"'] \arrow[d, "\exists \lim_{y\to y_0}"'] & \displaystyle\int_a^\omega f(x,y)dx \arrow[d, "\exists \lim_{y\to y_0}"] \arrow[dl, dotted, no head] \\
\displaystyle\int_a^A \varphi(x)dx \arrow[r, "\exists \lim", "A\to\omega"'] & \displaystyle\int_a^\omega \varphi(x)dx
\end{tikzcd}$$

Здесь верхняя строка выполняется в силу условия 3) теоремы, а левый столбик выполняется для собственного интеграла в силу условия 2). Подставив в правый столбик значение $\varphi(x) = \lim_{y\to y_0} f(x,y)$, получим соотношение (1).

В частности, если функция $f(x,y)$ непрерывна в области задания, тогда

$$\lim_{y\to y_0} F(y) = \lim_{y\to y_0}\int_a^\omega f(x,y)dx = \int_a^\omega \lim_{y\to y_0} f(x,y)dx = \int_a^\omega f(x,y_0)dx = F(y_0)$$

и, как следствие, имеем непрерывность несобственного интеграла, зависящего от параметра.

Обратим внимание, что в обеих теоремах 2 и 3 мы требовали равномерной сходимости относительно параметра не во всей области его изменения, а лишь в окрестности его рассматриваемой предельной точки (в $U(x_0)$ и $V(y_0)$ соответственно). Это объясняется тем, что существование предела функции, также свойства ее непрерывности или дифференцируемости в данной точке - это ее локальные свойства, значит, ддя установления таких свойств функции в данной точке не нужно знать поведение функции во всей области её существования, а достаточно знать её свойства в сколь угодно малой окрестности рассматриваемой точки.

Приведем пример использования теоремы 3. Рассмотрим задачу № 3779 из задачника Демидовича.

Исследовать на непрерывность функцию

$$F(\alpha) = \int_0^\infty \frac{x}{1+x^\alpha}dx,\ \alpha > 2.$$

Так как подынтегральная функция положительна и при $x\to\infty$ имеет порядок $O(\frac{1}{x^p}), p > 1$, интеграл сходится. Однако его сходимость относительно α из области $\alpha > 2$ неравномерна. Докажем это с использованием следующего признака, который я для своих студентов называю "рабочим" признаком **неравномерной** сходимости. Сформулируем его для рядов.

Теорема 4. *Пусть функции $f_n(x,y) \in C[a,b\}$ и ряд $\sum_{n=1}^\infty f_n(x)$ сходится в $(a,b\}$ и расходится в точке $x = a$ (знак $\}$ после b означает, что неважно, включается точка b в рассматриваемую область или нет). Тогда сходимость ряд в области $(a,b\}$ неравномерная.*

Аналогичный признак имеет место и для неравномерной сходимости несобственных интегралов (сформулируйте его и докажите).

Используем теперь этот признак для нашего интеграла. В точке $\alpha = 2$ имеем интеграл $\int_0^\infty \frac{x}{1+x^2}dx$, который расходится. Значит, сходимость интеграла в области $\alpha > 2$ неравномерная, и теоремы "из учебников" для установления непрерывности $F(\alpha)$ неприменимы. Но вспомним, что непрерывность функции в данном множестве означает ее непрерывность в каждой точке множества. Возьмем произвольную точку $\alpha_0 > 2$. Положим $\alpha_0 - 2 = \epsilon > 0$. Тогда для подынтегральной функции в $\frac{\epsilon}{2}$-окрестности точки α_0 при $x > 1$ имеем оценку $|f(x,y)| < \frac{1}{x^{1+\frac{\epsilon}{2}}}$. Интеграл от правой части неравенства сходится, что по признаку Вейерштрасса дает равномерную сходимость исходного интеграла в окрестности точки α_0 и по следствию теоремы 3 получаем непрерывность функции $F(\alpha)$ в произвольно взятой точке $\alpha > 2$.

(Благодарю студента К.Гордеева за помощь в техническом оформлении записи диаграмм.)