И.Х. Сабитов

Конспекты семинаров по курсу математического анализа

Тема 1. Эскизы графиков (Рисунки студента Константина Гордеева)

1) Построить графики функций: 1) $y = x^a$ $(x \geq 0)$ в зависимости от значений параметра $a > 0$ (Рис. 1). Отметьте главное качественное отличие: при значениях $a > 1$ график касается оси Ox, а при $0 < a < 1$ график касается оси Oy. Сравните поведение графиков функций $y = x^a$ и $y = x^b$ с разными положительными $a \neq b$ (Рис. 2); 2) $y = x^a$ при $a < 0, x > 0$ и тоже провести сравнение графиков функций $y = x^a$ и $y = x^b$ с разными отрицательными $a \neq b$; 3) $y = x^a$ при $x < 0$ и целых значениях a. При каких рациональных значениях $a = \frac{m}{n}$ функция x^a существует при всех отрицательных x? 4) $y = a^x$ в зависимости от значений параметра $a > 0$ $(a \neq 1)$ (Рис. 3) и сравнить расположения графиков функций $y = a^x$ и $y = b^x$ с разными $a \neq b$ (Рис. 4). Обратите внимание, что взаимное расположение этих графиков зависит не только от соотношений между параметрами, но и от значений x. *Общее наблюдение:* вид графика функций зависит не только от значений аргумента x, но и от значений параметров, входящих в исследуемую функцию.

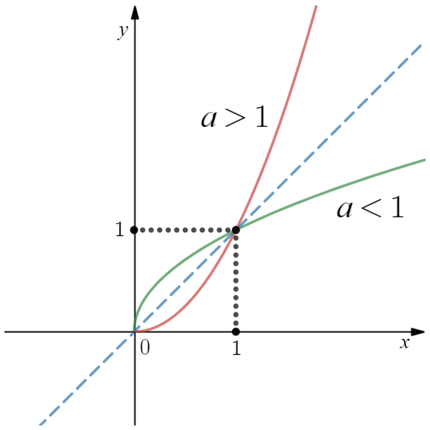


Рис. 1 - $y = x^a$ $(x \geq 0)$

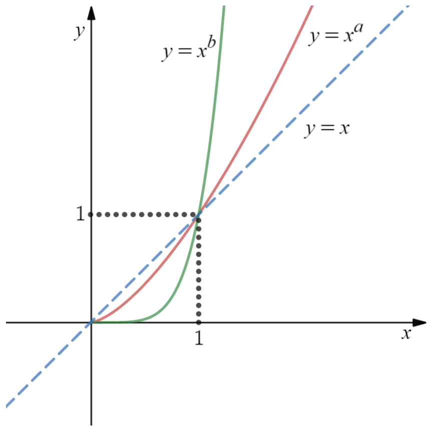


Рис. 2 - $y = x^b$ $(1 < a < b)$

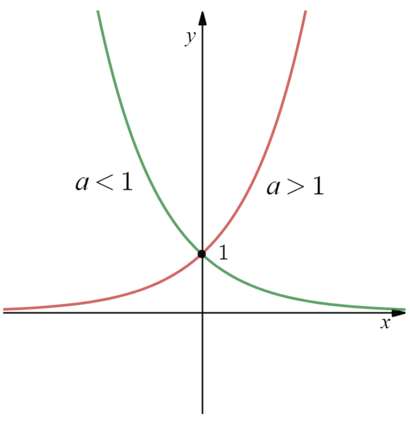


Рис. 3 - $y = a^x$ $(a > 0)$

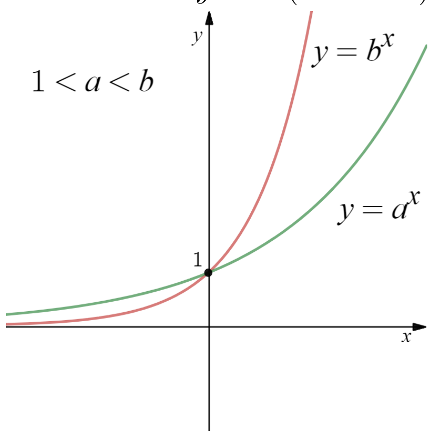


Рис. 4 - $y = a^x$ $(1 < a < b)$

2) Преобразования графиков. 1) Дан график Γ некоторой функции $y = f(x)$. Как получить график функции $y = \varphi(x) = f(x + a)$ в зависимости от значения параметра a. *Ответ:* сдвинуть (употребляют также термин "перенести") график исходной функции на $|a|$ налево (направо), если $a > 0$ $(a < 0)$.

Указание для доказательства. Пусть известна точка $(0, f(0))$ графика Γ. Тогда у графика функции $\varphi(x)$ в точке $x = -a$ будет такая же ордината $f(0)$, что и у графика Γ, так как

$\varphi(-a) = f(0)$. А точка $x = -a$ находится слева (справа) от нуля на расстоянии $|a|$, если $a > 0$ ($a < 0$). (Рис. 5)

Задание. 1) Докажите это правило сдвига, рассуждая с произвольным значением $x = x_0$. 2) Как построить искомый график, не изменяя его расположение, но изменяя положение оси Oy? 3) Каково будет правило переноса для графика функции $y = f(x-a)$? 4) С учетом полученного правила построить графики функций $y = (x \pm x_0)^a$ и $a^{(x \pm x_0)}$ при разных значениях x_0 и a, где $x_0 \neq 0$ - произвольная фиксированная точка на оси Ox. .

2) Дан график Г некоторой функции $y = f(x)$. Построить график функции $y = \varphi(x) = f(ax)$ в зависимости от значений параметра $a > 0, a \neq 1$. Очевидно, над точкой $x = 0$ график останется на месте. То, что было над точкой $x = x_0$, теперь будет над значением $x = x_0/a$: $\varphi(x_0/a) = f(x_0)$. Значит, если $a > 1$, то график сожмется в a раз к оси Oy, причем как со стороны $x > 0$, так и со стороны $x < 0$; если $0 < a < 1$, то будет растяжение графика в $\dfrac{1}{a}$ раз в сторону от оси Oy. Для описания этой операции будем использовать рис. 6.

Задание. Нарисуйте графики функций $y = \sin 2x$ и $y = \sin(x/2)$.

3) Дан график Г некоторой функции $y = f(x)$. Построить график функции $y = \varphi(x) = f(ax + b)$ в зависимости от значений параметров $a > 0$ и b. Введем функцию $g(x) = f(ax)$. График этой функции мы умеем рисовать. Рассмотрим функцию $h(x) = g(x + b/a)$ — ее график мы тоже умеем рисовать. Но имеем $h(x) = g(x + b/a) = f(a(x + b/a)) = f(ax + b) = \varphi(x)$ - пришли к искомому графику. Значит, выполняем такие действия: 1) сжимаем (или растягиваем) график данной функции $f(x)$ с учетом значения a; 2) Для полученного графика используем соответствующий перенос.

Теперь интересно найти искомый график, изменяя порядок действий - сначала сдвиг, а затем сжатие (или растяжение). Имеем последовательность действий: вводим функцию $\psi(x) = f(x + b/a)$ - перенос, затем функцию $\psi(ax) = f(a(x + b/a)) = f(ax + b) = \varphi(x)$ - сжатие или растяжение. (Рис. 7)

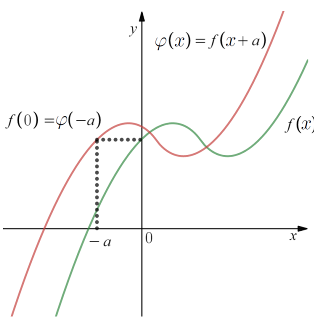


Рис. 5 - Сдвиг на $-a$

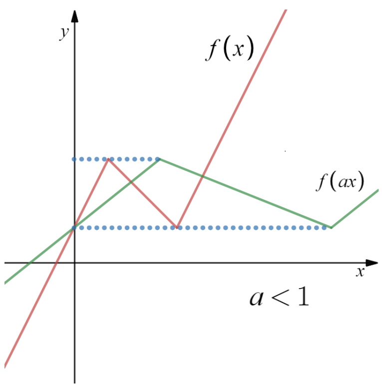


Рис. 6 - Растяжение в $\dfrac{1}{a}$ раз

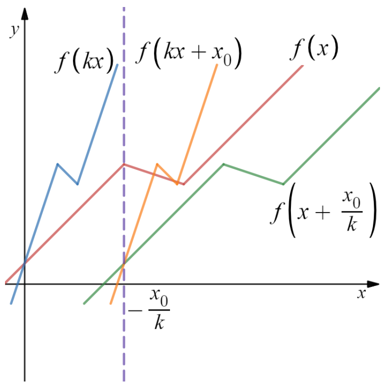


Рис. 7 - Последовательные преобразования графика

Задание. Исходя из графика функции $y = f(x) = x^2 - 4$, нарисуйте график функций $y = f(2x + 1)$ указанными выше двумя способами и убедитесь, что получатся одинаковые графики.

4) Сжатие (растяжение) графика относительно вертикальной $x = x_0$. Рассмотрим функцию $\varphi(x) = f(k(x - x_0) + x_0)$. Над точкой $x = x_0$ график остается на месте, так как $\varphi(x_0) = f(x_0)$. Значениям $f(x_1)$ в точках $x = x_1 > x_0$, отстоящих от точки x_0 на расстоянии $d_1 = x_1 - x_0$, соответствуют значения $\varphi(x_2)$ в точках $x = x_2 > x_0$, отстоящих от точки $x = x_0$ на расстоянии $d_2 = \dfrac{d_1}{k}$. Действительно, $x_2 = x_0 + d_2 = (1 - \frac{1}{k})x_0 + \frac{x_1}{k}$, поэтому $\varphi(x_2) = f(k(x_2 - x_0) + x_0) = f(kd_2 + x_0) = f(d_1 + x_0) = f(x_1)$. Значит, график функции $f(x)$ сжимается в k раз в направлении к точке $x = x_0$, если $k > 1$, и растягивается в $\frac{1}{k}$ раз, если $0 < k < 1$.

Задания. 1) Определить, относительно какой точки сжимается (растягивается) (с $a \neq 1$) график функции $y = f(x)$ при переходе к графику функции $y = f(ax+b)$, описать нужные преобразования и вывести отсюда, что при таком переходе на графике функции $y = f(x)$ всегда будет существовать единственная неподвижная точка. 2) Проделать все такие же рассуждения при отрицательных значениях параметров a и b.

Для быстрого построения графиков функций полезно знать, как рисуются графики функций $f(x)+C$, $Cf(x)$, $f(-x)$, $|f(x)|$ при известном графике функции $f(x)$ (где C - некоторое постоянное число).

3) Аси́мптоты кривой. Прямая L называется асимптотой графика функции $y = f(x)$, если она при "уходе в бесконечность" неограниченно близко приближается к графику. Знание асимптот позволяет представить график функции более точно.

Асимптоты бывают вертикальные, наклонные и горизонтальные. (Рис. 8) *Вертикальные* асимптоты имеют уравнение $x = x_0 = Const$, где значение $x = x_0$ определяется условием $f(x) \to \pm\infty$ при $x \to x_0$, причем возможны несколько вариантов: функция может стремиться к бесконечности одного знака при подходе x к x_0 с обеих сторон, бесконечности могут быть разных знаков при $x \to x_0 \pm 0$ (записи $x \to x_0 + 0$ ($x \to x_0 - 0$) или $x \to x_0+$ ($x \to x_0-$) означают, что x стремится к x_0, оставаясь справа (соответственно, слева) от x_0, т.е. будучи больше (соответственно, меньше) x_0); также может быть, что $f(x)$ стремится к бесконечности при подходе x к x_0 только с одной стороны — тогда говорят об *односторонней* вертикальной асимптоте.

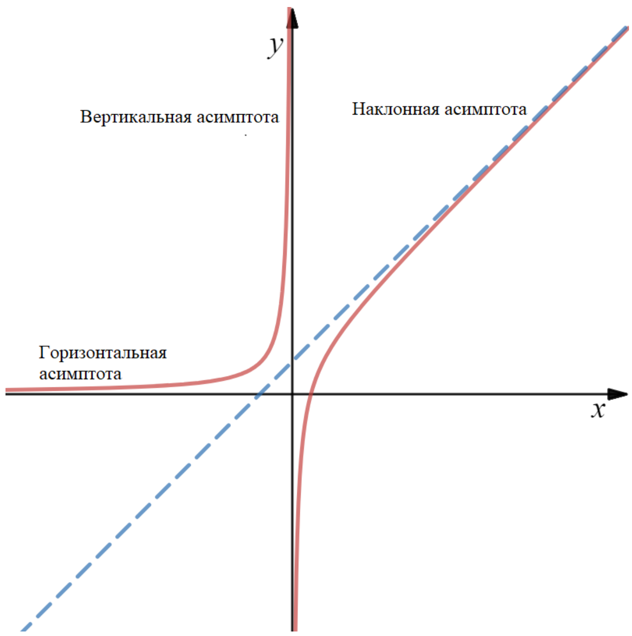


Рис. 8 - Виды асимптот

Задание: перечислите все возможные варианты взаимного расположения графика и его вертикальной асимптоты и проиллюстрируйте каждый вариант примером.

Наклонная асимптота имеет уравнение вида $y = kx + b$ ($k \neq 0$), удовлетворяющее условию $f(x) - (kx + b) \to 0$ при $x \to \pm\infty$, причем здесь тоже возможны несколько вариантов: коэффициенты $k \neq 0$ и b могут быть разными при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$, или же они существуют только при стремлении x к бесконечности определенного знака. Нахождение наклонной асимптоты осуществляется по одному из следующих алгоритмов: 1) Надо искать предел $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$; если он существует и конечен, то угловой коэффициент k искомой асимптоты равен значению этого предела. Затем ищем $\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)$. Если этот предел существует, то его значение b и найденное значение k определяют искомую асимптоту $y = kx + b$. Значит, если хотя бы один из рассмотренных пределов не существует (или равен бесконечности), то наклонной асимптоты нет. 2) Если удалось представить функцию в виде $f(x) = kx + b + g(x)$, где функция $g(x) \to 0$ при $x \to \pm\infty$, тогда прямая с уравнением $y = kx + b$ будет асимптотой графика при соответствующем поведении x. Второй способ более информативен, так как он позволяет исследовать расположение графика по отношению к асимптоте: там, где функция $g(x)$ больше (меньше) нуля, график расположен выше (ниже) асимптоты; в точках, где $g(x) = 0$, график пересекается с асимптотой.

Горизонтальную асимптоту $y = b$ на самом деле можно трактовать как частный случай наклонной асимптоты при значении $k = 0$; соответственно, она ищется точно по тому же алгоритму, как и наклонная асимптота.

Расположение графика по отношению к его асимптоте может быть самым разнообразным: график весь может располагаться по одну сторону от асимптоты, может ее пересекать в конечном или даже в бесконечном числе точек (проиллюстрируйте каждый из случаев схематическим рисунком).

Пример 1. Построим график функции $y = \dfrac{4x-1}{2x+4}$ (Рис. 9). Сделав тождественные преобразования

$$y = \frac{(4x+8)-9}{2x+4} = 2 - \frac{9}{2x+4} = 2 - y_1, y_1 = \frac{9}{2x+4}$$

искомый график получим, исходя из известного графика функции $\varphi(x) = \dfrac{1}{x}$, т.е. из гиперболы. Имеем последовательные преобразования $\varphi_1(x) = \varphi(2x+4)$, затем $\varphi_2(x) = 9\varphi_1(x) = y_1$, $\varphi_3(x) = -\varphi_2(x) = -y_1$, наконец, $y = 2 + \varphi_3(x)$ — все преобразования из числа изученных выше. Эти преобразования не единственные. Например, график функции $y_1(x)$ можно было преобразовывать так: $y_1 = \dfrac{9}{2}\dfrac{1}{x+2}$, Затем изменяем известный график функции $\varphi(x)$ так: положим $g_1(x) = \varphi(x+2)$ – сдвиг на 2 влево; далее, $y_1(x) = \dfrac{9}{2}g_1(x)$ – умножение на $\frac{9}{2}$, дальше будет умножение на (-1) и сложение с постоянным числом 2, т.е. подъем графика на 2 единицы.

Но вообще более быстрое построение графика функции вида $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, $c \neq 0$, $ad - bc \neq 0$ проводится так: мы уже знаем, что график представляет собой несколько измененный график "стандартной" гиперболы $y = \dfrac{1}{x}$. Найдем первым делом вертикальную и горизонтальную асимптоты соответственно с уравнениями $x = -\dfrac{d}{c}$ и $y = \dfrac{a}{c}$. Асимптоты разбивают плоскость на 4 квадранта и гипербола должна расположиться в двух вертикальных углах. Для определения этих углов достаточно посчитать координаты одной произвольной точки (x_0, y_0), не лежащей на асимптотах. Найдя эту точку, рисуем ветви гиперболы, имея уже нарисованные их асимптоты и зная квадранты, где должны расположиться эти ветви. Для большей точности графика можно указать точки его пересечения с осями координат если график с ними пересекается (когда нет такого пересечения?). Мы учитываем, что для эскизов графиков не нужна слишком большая точность, а достаточно уметь представить общий ход графика и несколько его "интересных" точек.

Пример 2. Изучим асимптоты графика функции $y = \dfrac{x^2-4x+3}{x+1}$ (Рис. 10). Во-первых, сразу замечаем, что есть вертикальная асимптота с уравнением $x = -1$. Поведение функции при подходе к этой точке следующее: в точке $x = -1$ числитель равен $8 > 0$, значит, около точки $x = -1$ знак дроби совпадает со знаком ее знаменателя. Имеем, что при $x \to -1 - 0$ (напомним, эта запись означает, что x стремится к -1, оставаясь слева от -1) знак знаменателя отрицательный, следовательно, функция стремится к $-\infty$; соответственно, при $x \to -1 + 0$ (x подходит к -1 справа, т.е. будучи больше -1) функция стремится к $+\infty$. Далее ищем наклонную асимптоту. По первому алгоритму находим

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-4x+3}{x(x+1)} = 1 = k.$$

Затем ищем $b = \lim_{x \to \pm\infty} (\dfrac{x^2 - 4x + 3}{x + 1} - x) = -5$. Значит, прямая $y = x - 5$ является асимптотой в обе стороны стремления x к бесконечности.

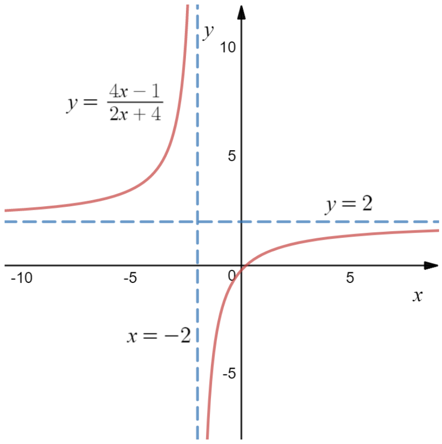


Рис. 9 - Пример 1

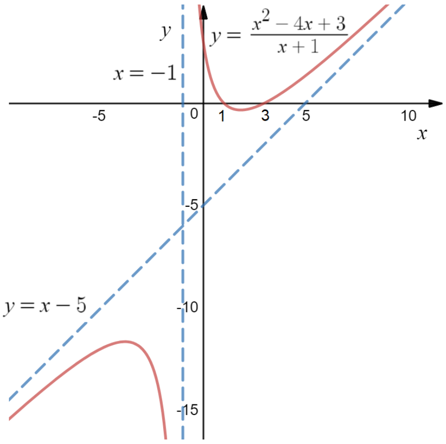


Рис. 10 - Пример 2

При использовании второго алгоритма путем "деления уголком" находим, что функция представляется в виде $y = x - 5 + g(x)$, где $g(x) = \dfrac{8}{x+1} \to 0$ при $x \to \pm\infty$, значит, снова получаем, что прямая $y = x - 5$ является наклонной асимптотой. Но теперь мы можем сказать больше про взаимное расположение графика и его наклонной асимптоты. Так как $g(x) \neq 0$, то график нигде не пересекается с асимптотой; на участке $x > -1$ график расположен выше асимптоты, а при $x < -1$ он расположен ниже асимптоты. Легко находим точки пересечения графика с осями координат. Пересечение с осью Oy происходит в точке $(0, 3)$, а с осью Ox пересечение происходит в точках $(1, 0)$ и $(3, 0)$. Полученной информации достаточно для рисования эскиза графика (пока искать точки минимума и максимума не надо).

Замечание. Функция, представленная отношением двух многочленов, называется *рациональной*. При работе с такой функцией $y = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, где многочлены $P(x) = a_0x^p + a_1x^{(p-1} + \ldots + a_{p-1}x + a_p$ и $Q(x) = b_0x^q + b_1x^{q-1} + \ldots + b_{q-1}x + b_q$ с $b_0 \neq 0$, при условии $p \geq q$ иногда бывает полезно выделить ее целую часть $Z(x)$ и остаток $R(x)$, которые находятся "делением уголком" многочлена $P(x)$ на многочлен $Q(x)$, в результате чего получается представление

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = Z(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

с некоторыми многочленами $Z(x)$ и $R(x)$ соответственно степеней $m = p - q$ и $n < q$ (предполагается, что $a_0 \neq 0$). Таким образом, рациональная функция при условии $p = q + 1$ имеет линейную целую часть $Z(x)$ и, тем самым, ее график тогда имеет наклонную асимптоту. В рассмотренном выше примере рациональной функции имеем $Z(x) = x - 5, R(x) = 8$.

4) Обобщения понятий четности и нечетности функций. Как известно, функция $y = f(x)$ называется четной, если она удовлетворяет равенству $f(x) = f(-x)$ (вопрос: обязательно ли для этого, чтобы функция была определена на всей оси Ox?). Нечетные функции определятся условием $f(x) = -f(-x)$. График четной функции симметричен относительно оси Oy, а для графика нечетной функции начало координат $(0, 0)$ является центром симметрии. Мы используем эти их геометрические свойства для обобщения понятий четности и нечетности.

Исследуем, когда для графика функции есть вертикальная ось симметрии с уравнением $x = a$? Пусть такая ось есть. Значит, в точках $x_1 = a + t$ $x_2 = a - t$, лежащих на одинаковом расстоянии от точки $x = a$, значения функции должны быть одинаковы, что приводит к равенству $f(a + t) = f(a - t)$ или к равенству

$$f(x) = f(2a - x) \tag{1}$$

(для всех точек, в которых функция одновременно определена в левой и правой части). Заметьте, что при $a = 0$ получаем определение четой функции. (Рис. 11)

Для обобщения понятия нечетной функции поступаем так: пусть график функции имеет некоторый центр симметрии $M_0(a, b)$. Пусть некоторая точка $M_1(x_1, y_1)$ $(y_1 = f(x_1))$ принадлежит графику. Тогда на прямой L, проходящей через точки M_0 и M_1, должна быть другая точка $M_2(x_2, y_2)$, лежащая на том же расстоянии от M_0, что и M_1, и принадлежащая графику, т.е. с $y_2 = f(x_2)$ (сделайте рисунок!). Значит, точка M_0 является серединой отрезка M_1M_2. Так как $a = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$, можно положить $x_1 = a + t, x_2 = a - t$, поэтому из равенства $y_0 = \dfrac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$ получаем соотношение $2b = f(a + t) + f(a - t)$ или

$$f(x) + f(2a - x) = 2b \tag{2}$$

(отметим, что при $(a, b) = (0, 0)$ получаем известное определение нечетной функции). (Рис. 12)

Вывод: для нахождения оси или центра симметрии, надо для функции записать уравнение (1) или, соответственно, уравнение (2) с неизвестными параметрами a и b и подбирать их с условием тождественного выполнения этих равенств при всех значениях x из области существования функции. Если таких значений параметров не существует, значит, искомой симметрии нет.

Вопросы. 1) Может ли быть, что функция одновременно является "четной" и "нечетной" в обобщенном смысле? 2) Существует ли функция, график которой имеет бесконечное множество осей или центров симметрии? 3) существует ли функция, для графика которой каждая его точка является центром симметрии?

Задание. Убедитесь, что в рассмотренном выше примере 2 точка пересечения асимптот $x = -1$ и $y = x - 5$ является центром симметрии графика. Покажите, что у графика любой функции вида $y = \dfrac{a_0x^2 + a_1x + a_2}{b_0x + b_1}$, $b_0 \neq 0$, точка пересечения асимптот всегда является центром симметрии.

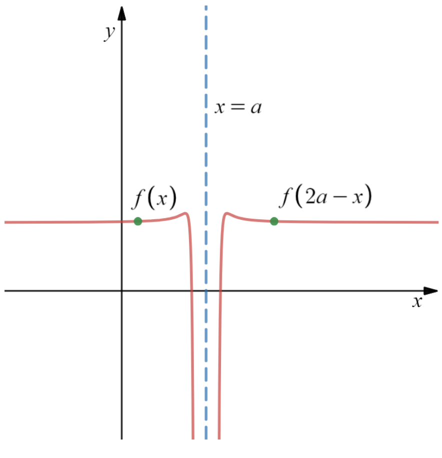


Рис. 11 - Обобщение четной функции

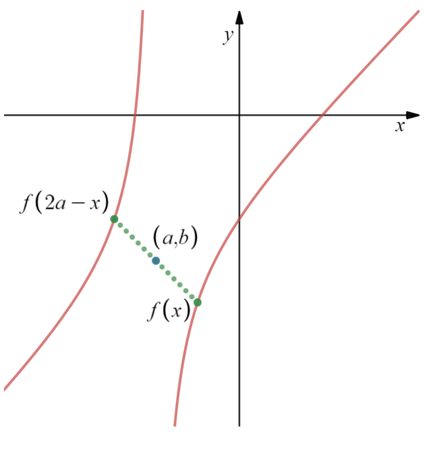


Рис. 12 - Обобщение нечетной функции

5) Обратные функции. Напомним, что функция *определяется* как отображение из одного множества X в некоторое другое множество Y (которое может совпадать с самим множеством X). Записывается это как $f : X \to Y$, и здесь под символом f понимают то правило, по которому элементам множества X сопоставляются элементы множества Y. Множество X называется *областью определения* или *существования* функции, а множество Y называется *областью значений.* Элементы x множества X называются также *значениями аргумента* или *независимой переменной*, а элементы y из Y, куда их переводит отображение f, называются *значениями функции* или *зависимой переменной.* Их связь записывают в виде $y = f(x)$ и y называют *образом* точки x, а x называют *прообразом* точки y. Если каждому аргументу $x \in X$ отображением $f : X \to Y$ сопоставляется *единственный* элемент y из Y, тогда функция f называется *однозначной*; если же хотя бы некоторым значениям x сопоставляется *более одного* значения y, функция называется *многозначной.* В начальном курсе анализа изучают, как правило, однозначные функции. Выделяют три вида однозначных функций.

1) Функция называется *биективной* или *биекцией*, если задающее ее отображение f : $X \to Y$ является взаимно-однозначным, т.е. *каждому* значению $x \in X$ сопоставляется единственный элемент $y \in Y$, и каждый элемент $y \in Y$ является образом некоторого единственного элемента $x \in X$. Примерами биекции являются функции: а) $y = \sqrt{x}$ $X = [0, 4], Y = [0, 2]$; б) $y = \dfrac{1}{1 - x^2}$ с $X = (1, +\infty), Y = (-\infty, 0)$; в) $y = tgx$ с $X = (-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}), Y = (-\infty, +\infty)$.

Если отображение $f : X \to Y$ взаимно-однозначно, то можно определить отображение $g : Y \to X$ по следующему правилу: $g(y)$ для $y \in Y$ равно единственному такому $x = g(y)$ из X, что $f(x) = y$ или $f(g(y)) = y$ для любого $y \in Y$ и записывается это как *тождественное* равенство

$$f(g(y)) \equiv y, y \in Y. \tag{3}$$

Таким образом определенную функцию $g(y)$ называют функцией, *обратной* к функции $f(x)$. Область ее определения - это множество Y. Отображение $g : Y \to X$ тоже является взаимно-однозначным. Действительно, каждому элементу $y \in Y$ по определению сопоставляется единственное $x \in X$, такое, что $f(x) = y$, и для каждого $x \in X$ существует единственный прообраз $y \in Y$, так как если бы прообразов было два, скажем, y_1 и y_2, тогда было бы равенство $g(y_1) = g(y_2) = x$ с $y_1 = f(x)$, $y_2 = f(x)$, что противоречит однозначности функции $f(x)$. Значит, для функции $x = g(y)$ тоже существует некоторая обратная функция $y = h(x)$, такая, что $g(h(x)) = x$. Мы утверждаем, что функция $h(x)$ тождественно совпадает с $f(x)$. На самом деле, пусть для некоторого $x_0 \in X$ значение $h(x_0) = y_0 : g(y_0) = x_0$. Но, по определению, $g(y_0) = x_1 : f(x_1) = y_0$. Следовательно, $x_1 = g(y_0) = x_0$, и поэтому $f(x_0) = f(x_1) = y_0 = h(x_0)$, что и утверждалось. Значит, $f(x) = h(x)$ является обратной к $g(y)$ и

$$g(f(x)) \equiv x, x \in X. \tag{4}$$

Функцию, обратную к $f(x)$, часто обозначают как $f^{-1}(y)$. Только что установленная взаимная обратность функций $y = f(x)$ и $x = g(y)$ приводит к справедливости записей $f^{-1}(f(x)) \equiv x$ (т.е. в полном соответствии с естественным взаимоуничтожением действий операции f и обратной операции f^{-1}) или $f\left(f^{-1}(y)\right) \equiv y$ и $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$ (последнее соотношение означает, что функция, обратная к обратной для функции f, совпадает с самой функцией f.)

Замечание. Ввиду такой взаимно-обратимости биекции при работе с обратными функциями для большей ясности изложения используют термины "прямая" и "обратная" функции.

Задание. Найдите функции, обратные к приведенным выше биекциям, и проверьте для них соотношения (3) и (4).

2) Функция называется *сюръективной* или *сюръекцией*, если задающее ее отображение $f : X \to Y$ таково, что каждый элемент $y \in Y$ является образом хотя бы одного $x \in X$. Такое отображение называют еще "наложением" или отображением "на". Примерами сюръекции являются функции: а) $y = x^2$ с $X = (-1, 2]$, $Y = [0, 4]$; б) $y = \sin x$ с $X = (-\infty, \infty)$, $Y = [-1, 1]$.

3) Функция называется *инъективной* или *инъекцией*, если задающее ее отображение $f : X \to Y$ таково, что разные элементы из X отображаются в разные элементы из Y или, по другому, два разных элемента из X не могут отобразиться в один элемент из Y. Это можно выразить соотношением $f(x_1) \neq f(x_2)$ при $x_1 \neq x_2$. Примерами инъективных функций являются функции: а) $y = x^2$ с $X = (0, 1]$, $Y = [0, 2)$; б) $y = \cos x$ с $X = [0, \pi], Y = [-1, 1]$.

Биективное отображение теперь можно охарактеризовать как *отображение, являющееся одновременно и инъективным, и сюръективным* (попробуйте это доказать). Использование этих же отображений поможет ответить на следующие вопросы. 1) Пусть для множеств X

и Y даны два отображения $f : X \to Y$ и $g : Y \to X$, удовлетворяющие соотношениям (3) и (4). Вытекает ли отсюда, что они являются взаимно-обратными? 2) Пусть дано выполнение только одного из них. Будет ли это достаточным для утверждения, что эти отображения являются взаимно-обратными? При каком дополнительном условии эти отображения являются взаимно-обратными?

Ответ на первый вопрос положительный. Покажем, что отображение f сюръективно. Допустим обратное. Тогда существует элемент y_0 такой, что для него нет ни одного $x \in X$, который отобразился бы в y_0. Для него равенство (3) дает, что $f(g(y_0)) = y_0$. Но $g(y_0)$ равно некоторому $x_0 \in X$, и мы имеем, что $f(x_0) = y_0$ - противоречие. Покажем, что f инъективно. Допустим обратное. Тогда существуют два неравных значения x_1 и x_2, для которых $f(x_1) = f(x_2)$. Но для этих значений соотношение (4) дает, что $g(f(x_1)) = x_1$, и $g(f(x_2)) = x_2$, т.е. $x_1 = x_2$ - противоречие. Значит, отображение f и инъективно, и сюръективно, поэтому оно биективно.

Ответ на второй вопрос в общем случае отрицательный, что подтверждается примером функций $y = f(x) = \sin x$ и $x = g(y) = \arcsin y$ с $X = (-\infty, +\infty), Y = [-1, 1]$. Для них имеем $f(g(y)) = \sin(\arcsin y) \equiv y$, т.е. выполнено (3), но функция $\sin x$ заведомо не является инъективной даже на $[0, \pi]$ и тем более на всей оси. Мы выше показали, что при выполнении соотношения (3) отображение f является сюръективным. Значит, если мы дополнительно предположим, что f является инъективным, тогда одно только соотношение (3) даст, что отображение f является биекцией и соотношение (4) окажется выполненным автоматически.

Задание: 1) Исследовать такую же задачу при условии выполнения только соотношения (4). 2) Пусть X и Y — два конечных множества с числом элементов соответственно n и k. Найти число а) всевозможных отображений $f : X \to Y$; б) число возможных биекций; в) число возможных сюръекций из X в Y; г) число возможных инъекций X в Y (определив предварительно условия, когда они существуют).

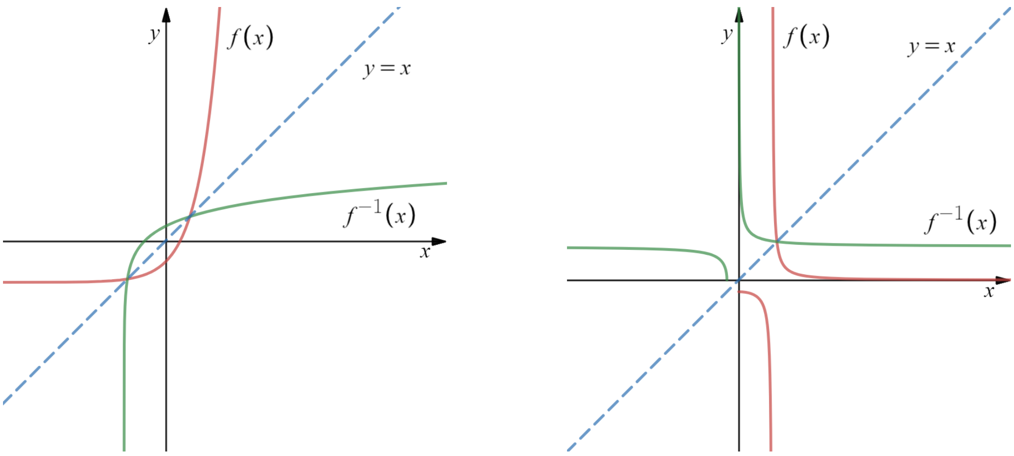


Рис. 13 - Примеры обратных функций

Построение графика обратной функции предполагает, что аргументу обратной функции, как обычно, соответствует ось Ox, а значения самой функции откладываются по оси Oy. Если $y = f(x)$ была "прямой" функцией, то обратная функция, которая задана на множестве Y, при обычных обозначениях независимой и зависимой переменных соответственно через x и y, будет даваться связью вида $x = f(y)$, и если удастся решить это уравнение относительно y, обратная функция запишется в виде $y = f^{-1}(x)$ (заметьте, каким удачным является введение обозначения f^{-1}: имеем $y = f^{-1}(x) = f^{-1}(f(y)) = y$, т.е. обозначение $f^{-1}(x)$ действительно соответствует его пониманию как решения уравнения $x = f(y)$ для неизвестного y), и речь идет о построении графика именно этой функции. Известный способ построения графика обратной функции при данном графике прямой функции состоит в следующем: если расположить зеркальце вдоль биссектрисы

1-го координатного угла лицевой стороной в сторону графика, тогда в зеркале можно увидеть график обратной функции и остается аккуратно перенести его на бумагу (только для быстрого правильного воспроизведения нужного графика желательно заранее как-то выделить положительную полуось оси Ox и помнить, что в зеркальной картинке она будет положительной полуосью Oy, а левая часть новой оси аргументов в зеркале будет смотреться как образ прежней отрицательной полуоси Oy). Заметьте, что ориентация осей остается без изменения: кратчайший поворот от положительной полуоси аргументов к положительной полуоси значений функций остается направленным против часовой стрелки. Этот способ дает преимущество девушкам (сообразите, почему?).

Есть еще два, менее известных, способа, которые позволяют обходиться без зеркала и без нового листа бумаги. Опишем эти способы. В первом вариант нарисуйте на отдельном листочке график данной прямой функции $y = f(x)$, как-то выделив положительную полуось Oy, например, особым цветом или жирной ориентирующей стрелкой. После этого поверните лист вокруг оси Ox на обратную сторону и держа лист на свету, поверните его против часовой стрелки на 90^o так, чтобы выделенная полуось y-ов пошла направо, как и положено будущей оси аргументов. Просвечивающий рисунок и будет графиком обратной функции $y = f^{-1}(x)$ со стандартным обозначением переменных и расположением осей. Остается обвести его на этой обратной стороне, обозначив оси как положено.

Во втором варианте на листе, где нарисован график функции $y = f(x)$, нарисуйте зеркальный относительно оси Oy образ этого графика (что равносильно рисованию графика функции $y = \varphi(x) = f(-x)$), затем поверните лист на 90^0 градусов по часовой стрелке и переобозначьте ось Oy в новом положении как ось Ox, а отрицательную полуось x-ов в ее новом положении обозначьте как ось Oy - и нарисованный ранее график функции $y = f(-x)$ станет в новом положении графиком обратной функции $y = f^{-1}(x)$ с стандартным обозначением аргумента через x и функции через y.

Задание: 1) Проверьте все три способа, работая с графиком какой-либо конкретной функции (например, с графиком функции $y = a^x$, обратной функцией к которой является функция $y = log_a x$). 2) Докажите, что при всех трех способах получается один и тот же нужный график. 3) Используя переход от связи $y = f(x)$ к связи $x = f^{-1}(y)$, найдите в приведенных выше примерах обратные функции y как функции от аргумента x.

6. Периодические функции. Функция $y = f(x)$, заданная на некотором множестве $D \in R$, называется *периодической* с некоторым периодом $T > 0$, если для любой точки $x \in D$ точка $x + T$ тоже принадлежит D и $f(x + T) = f(x)$. Таких чисел T может быть много; наименьшее из них называется *основным* или главным периодом. Например, для функции $y = \sin x$ все числа вида $2n\pi, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$, являются периодами, а основной период равен 2π. Следующие свойства периодических функций доказываются легко: 1) Если T - основной период, то все числа $nT, n > 0$ и целое, тоже являются периодами. 2) Любой другой период является кратным T. 3) Область D существования периодической функции содержит бесконечно много точек и неограничена сверху. Существуют периодические функции, у которых нет основного ненулевого периода. Например, для функции Дирихле

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & \text{для рациональных } x; \\ 0, & \text{для иррациональных } x. \end{cases}$$

любое рациональное число является периодом и наименьшего положительного периода нет.

В анализе широко используется метод периодического продолжения функции. Например, если функция $y = f(x)$ задана при $x \geq 0$ и периодическая с периодом T, то ее можно продолжить на значения $x < 0$, положив $f(x) = f(x + T), -T \leq x \leq 0$ и далее аналогично продолжая на следующие отрезки вида $[-nT, -(n-1)T]$.

Замечание. Иногда периодичность определяется условием $f(x) = f(x \pm T)$. Проведенное выше продолжение периодической функции приводит к функции, периодической в смысле нового определения.

Периодическое продолжение можно сделать с любого интервала или полуотрезка I. Для этого надо просто перенести график с I направо или налево на длину этого промежутка и повторить эту процедуру бесконечное число раз (подумайте, что сделать, если функция задана на отрезке и мы хотим получить функцию на всей оси периодическую с длиной периода, равного длине этого отрезка?).

Задание. 1) Определите основные периоды функций: а) $y = \sin ax$; б) $y = \operatorname{tg}(\pi x)$; в) $y = \cos(\cos x); y = \sin(\cos x); \cos(\sin x); \sin(\sin x)$ (заметьте, что периоды не всех этих функции одинаковы, хотя все они составлены из функций с одним и тем же периодом); г) $y = a \sin \frac{x}{2} + b \sin x + c \sin 2x$; д) $y = \cos x \sin x$. 2) Периодична ли функция $y = \sin x \cos \pi x$? 3) Может ли периодическая функция иметь область определения, состоящую а) из конечного числа отдельных отрезков; б) из бесконечного их числа? 4) Постройте график периодического продолжения на всю прямую функцию: а) $y = x^2$, заданную на отрезке $[-1, 1]$; б) $y = x$, заданную на отрезке $[-1, 2]$. Можно ли это сделать, если не изменять значения функции на концах отрезка, и сколькими способами это можно сделать, если позволяется изменять эти значения?

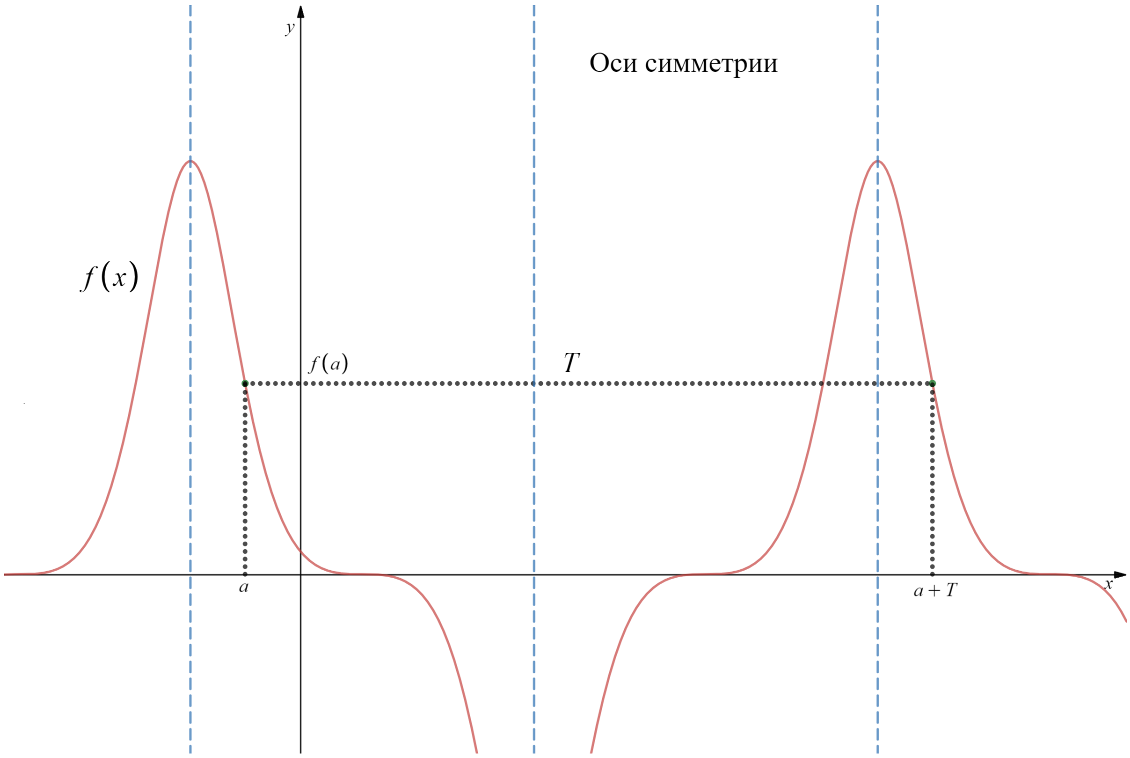


Рис. 14 - Пример периодической функции

Если график периодической функции имеет одну вертикальную ось симметрии, тогда он имеет бесконечное число вертикальных осей симметрии. Действительно, пусть есть ось симметрии $x = a$. Значение a удовлетворяет уравнению $f(a + x) = f(a - x)$. Если функция четная (т.е. $a = 0$), тогда каждая прямая $x = nT$ будет осью симметрии, так как имеем $f(x) = f(nT + x) = f(x - nT) = f(nT - x)$. Если же четности нет, тогда введем функцию $\varphi(x) = f(a + x)$. Нетрудно проверить, что функция $\varphi(x)$ периодическая с периодом T и она четная, так как $\varphi(-x) = f(a - x) = f(a + x) = \varphi(x)$. Значит, ее график имеет оси симметрии с уравнениями $x = nT$, что соответствует осям симметрии $x = a + nT$ для исходного графика.

Пример. График функции $y = \cos x$ имеет вертикальные оси симметрии $x = 2\pi n$, а график функции $y = \sin x$ имеет ось симметрии $x = \frac{3}{2}\pi$, значит, у него есть другие оси симметрии $x = \dfrac{2n + 1}{2}\pi$.

Задание. Приведите пример графика периодической функции, не имеющего ни одной вертикальной оси симметрии.

Более того, наличие у некоторой функции $y = f)x)$ графика с двумя вертикальными осями симметрии уже является признаком периодичности графика. Действительно, пусть у графика есть две оси симметрии $x = a$ и $x = b > a$. Тогда имеем равенства $f(a+x) = f(a-x)$, $f(b+x) = f(b-x)$, откуда $f(x+T) = f(b+x+T-b) = f(b-x-T+b) = f(a+2b-T-x-a) = f(a-2b+T+a+x) = f(x)$, если взять $T = 2(b-a)$.

Замечание. Существует простое геометрическое доказательство этого утверждения. Нарисуйте две вертикальные прямые $x = a$ и $x = b$. Возьмем левее прямой $x = a$ точку M_0 с координатами $(x_0, f(x_0))$ с условием $a - x_0 < b - a$. Для нее на графике функции есть симметричная ей точка M_1 с координатами $(2a-x_0, f(x_0))$, где $2a-x_0 < b$. В свою очередь, для точки M_1 на графике есть точка M_2 с координатами $(2b-2a+x_0)$. Мы видим, что независимо от выбора точки M_0 точка M_2 находится от нее на одном и том же расстоянии $T = 2b-2a$, имея ту же ординату $f(x_0)$. Это значит, что выполнено равенство $f(x_0+T) = f(x_0)$, что и нужно для периодичности.

7. Обратные тригонометрические функции. Рассмотрим функцию $y = \sin x$, рассматриваемую как отображение $f : X \to Y$ с $X = (-\infty, +\infty), Y = [-1, 1]$. Нарисуем ее график. Если мы попытаемся найти обратную к ней функцию $g(y)$, то, по определению, мы должны найти для данного значения $y \in [-1, 1]$ такое значение $x = g(y) \in X$, чтобы $f(x) = y$, т.е., чтобы было $\sin(g(y)) = y$. Графически это делается так: берем на оси Oy на отрезке $[-1, 1]$ точку с ординатой y и проводим через нее прямую L параллельно оси Ox. В каждой точке ее пересечения с графиком синуса мы имеем абсциссу x, такую, что $\sin x = y$. Следовательно, искомая функция $x = g(y)$ является многозначной, поэтому нам надо выделить на оси Ox участок, где пересечение прямой L с графиком синуса единственно. Очевидно, таких участков бесчисленное множество. Обычно выбирают отрезок $[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$ и значения $x = g(y)$ из этого отрезка обозначают как $\arcsin y$ и называют главным значением обратной функции, а все множество остальных соответствующих значений многозначной функции обозначают как $\mathrm{Arcsin} y$. Переходя к обычным обозначениям независимой и зависимой переменных, получаем однозначную функцию $y = \arcsin x$ с областью существования $X = [-1, 1]$ и областью значений $[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$. Значения многозначной функции $\mathrm{Arcsin} x$ и однозначной функции $\arcsin x$ связаны равенством

$$Arcsinx = (-1)^n \arcsin x + \pi n, n \in \mathbb{Z}, x \in [-1, 1] \tag{5}$$

(Рис. 15а) (это есть то, что в школе называют множество решений уравнения $\sin y = x$ относительно y). Если мы посмотрим на график обратной функции по описанному выше способу. то увидим, что график многозначной функции $\mathrm{Arcsin} x$ оказывается представленным графиком синуса, "вьющимся" вокруг оси Oy, и ее значения над точкой $x \in [-1, 1]$ соответствуют значениям ординат в точках пересечения графика с вертикальной прямой с постоянной абсциссой x; графику однозначной функции $\arcsin x$ соответствует участок со значениями $y \in [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$.

Задание. Нарисуйте график многозначной функции $\mathrm{Arcsin} x$ и выделите на нем участок, соответствующий однозначной функции $\arcsin x$.

Построение остальных обратных тригонометрических функций проводится аналогичным образом на основе графиков "прямых" тригонометрических функций $\cos x$, $\mathrm{tg} x$, $\mathrm{ctg} x$. Их многозначные обратные функции $\mathrm{Arccos} x$, $\mathrm{Arctg} x$, $\mathrm{Arcctg} x$ (Рис. 15 б-г) и соответствующие однозначные функции $\mathrm{arccos} x$, $\mathrm{arctg} x$, $\mathrm{arcctg} x$ связаны следующими соотношениями

$$Arccosx = \pm arccosx + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, x \in [-1, 1], 0 \leq arccosx \leq \pi \tag{6}$$

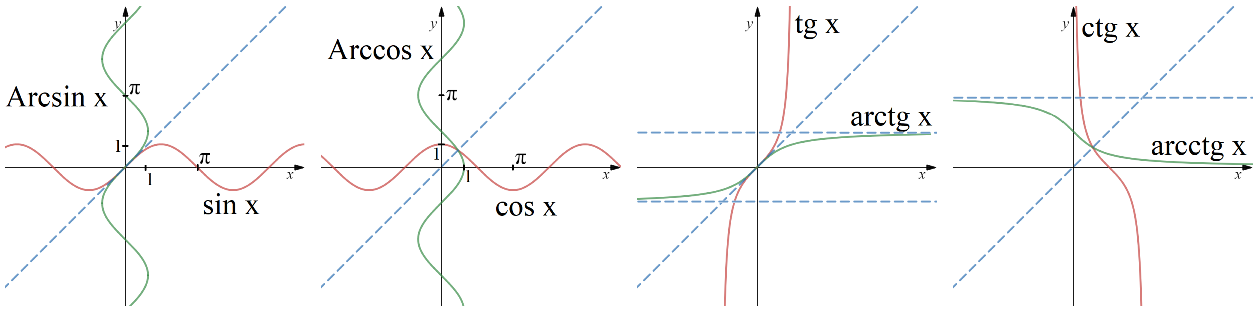
$$Arctgx = arctgx + \pi n, n \in \mathbb{Z}, x \in R, -\frac{\pi}{2} < arctgx < \frac{\pi}{2} \tag{7}$$

$$Arcctgx = arcctgx + \pi n\, n \in \mathbb{Z}, x \in R, 0 < arcctgx < \pi. \tag{8}$$

Задание. Полезно освежить в памяти из школьных знаний или вывести самим или посмотреть в справочниках всевозможные связи между обратными тригонометрическими функциями; например, верны формулы

$$arcsinx{+}arccosx{=}\frac{\pi}{2}, x \in [-1,1]; arcsinx{=}arccos\sqrt{1{-}x^2}, x \in [0,1]; \tag{9}$$

$$arctgx{+}arctgy{=}arctg\frac{x{+}y}{1{-}xy}, xy < 1. \tag{10}$$



а) б) в) г)

Рис. 15 - Обратные тригонометрические функции

8. Графики сложных функций. Пусть в функции $y = f(y_1)$ аргумент y_1 зависит от другого аргумента x по некоторому закону $y_1 = \varphi(x)$. Тогда получаем функцию $y = F(x) = f(\varphi(x))$, которая называются *сложной функцией* от x; при этом y_1 обычно называется *промежуточной* переменной. Построение графиков сложных функций использует знание графиков составляющих их функций по следующей схеме. Сначала на плоскости (y_1, y) строим график функции $y = f(y_1)$, а на плоскости (x, y_1) строим второй график - график функции $y_1 = \varphi(x)$. Затем для построения точек графика сложной функции $y = f(\varphi(x))$ по значению аргумента x на втором графике находим значение $y_1 = \varphi(x)$, а потом на первом графике по найденному значению y_1 находим значение $y = f(y_1)$. Конечно, при современных возможностях компьютерных технологий такие вычисления на первый взгляд кажутся бессмысленным занятием, но на самом деле при теоретических исследованиях с буквенными значениями переменных и параметров бывает важным быстро представить качественную картину поведения промежуточной переменной y_1 в зависимости от значений в различных интервалах изменения переменных и параметров. Обычно обращают внимание на поведение y_1 и $f(y_1)$ при подходе к асимптотам, к граничным точкам, в пересечениях с осями координат и т.д.

Пример. Рассмотрим в качестве примера функцию $y = \lg\frac{1+x}{x}$. Здесь $y = \lg y_1$, $y_1 = \frac{x+1}{x}$. Строим графики логарифмической функции $y = \lg y_1$ (Рис. 16а) и гиперболы $y_1 = \frac{x+1}{x}$ (Рис. 16б). Находим область, где $y_1 > 0$ - это области $D_1 : -\infty < x < -1$ и $D_2 : 0 < x < +\infty$. Исследуя поведение y_1 при подходе к границам этих областей, находим, что $y_1 \to 1 \pm 0$ при $x \to \pm\infty$, значит, $y = \lg y_1 \to 0 \pm 0$ при $x \to \pm\infty \Rightarrow y = 0$ - горизонтальная асимптота. Далее, исследуя поведение при $x \to -1 - 0$ получаем, что $y_1 \to 0 + 0 \Rightarrow y \to -\infty \Rightarrow x = -1$ - вертикальная асимптота. Аналогично показываем, что при $x \to 0 + 0$ имеем $y \to +\infty \Rightarrow x = 0$ - вертикальная асимптота. Пересечений с осями координат нет. Имея асимптоты и области существования, можем нарисовать эскиз графика (Рис. 16в).

Задание Нарисуйте эскизы графиков функций $y = \sin(x^2)$, $y = \sin\frac{1}{x}$.

Завершим этот пункт рекомендацией по построению графика функций вида $y = f(x)\sin x$. Сначала построим графики функций $y = f(x)$ и $y = -f(x)$. Отметим точки, в которых $\sin x = \pm 1$ - в них точки искомого графика совпадают соответственно с точками графика функции $\pm f(x)$. В точках, где $\sin x = 0$, график пересекается ось Ox. Так как $|y(x)| \le |f(x)|$, то график располагается между графиками функций $\pm f(x)$, переходя от одного графика к другому в соответствии с ходом функции $\sin x$.

Задание. Следуя предложенной рекомендации, нарисуйте графики функций $y = x\sin x, y = x^2 \sin x$, $y = \frac{1}{x}\sin x$, $y = e^{-x}\cos x$, $y = x\sin\frac{1}{x}$, $y = x^2\sin\frac{1}{x}$.

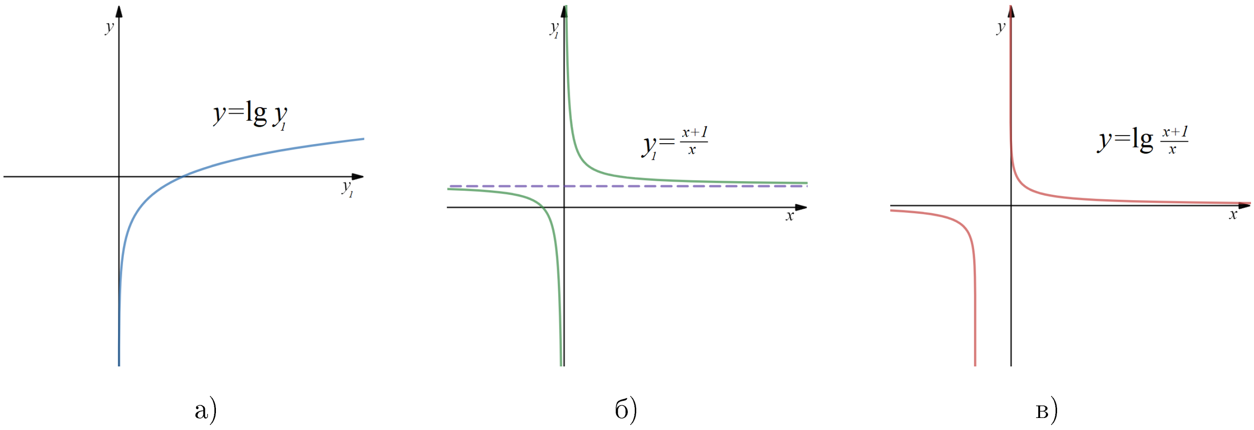


Рис. 16 - Пример сложной функции $y = \lg\frac{1+x}{x}$

9. Полярные координаты. Мы знаем, что на плоскости можно ввести много систем декартовых координат (например, за счет выбора разных начальных точек, разных масштабов, разных направлений осей координат и т.д.). Но есть и другие системы координат, принципиально отличающихся от разных вариантов декартовых координат. Вообще полезно иметь общее понимание системы координат, как способа описания положения точек с помощью чисел. Ввести на некотором множестве элементов систему координат - это значит предложить некоторый способ отличения (или, говорят, идентификации) этих элементов с помощью чисел. Имея в виду точки плоскости, можно говорить об описании положения или расположения точек с использованием чисел. Полярные координаты вводятся следующим образом. Выберем на плоскости произвольную точку O и назовем ее *полюсом.* Затем выпустим из полюса произвольно направленный луч и назовем его *полярной осью.* Выберем на этой оси отрезок с началом в полюсе и припишем ему длину, равную 1, и примем его за единицу измерения длин и расстояний. Рассмотрим теперь на плоскости произвольную точку M. Проведем отрезок OM и охарактеризуем положение точки двумя числами - длиной $r > 0$ отрезка OM и углом φ между полярной осью и направлением луча OM. Таким образом, мы припишем каждой точке плоскости два числа, называемые соответственно *полярным радиусом* и *полярным углом.* Эти числа полностью определяются расположением точки на плоскости. Обратно, если даны два числа $r > 0$ и φ, то выбрав направление луча из точки полюса, составляющего с полярной осью угол в φ радиан, и отложив на этом луче отрезок длины r, мы получим некоторую вполне определенную точку M. Тем самым мы получили возможность описания положения точек с помощью двух чисел r и φ. Правда, мы пока не имеем взаимно-однозначного соответствия между точками на плоскости и множеством упорядоченных пар чисел $r > 0$ и φ. Например, если взять два числа φ и $\varphi + 2\pi$, то паре чисел (r, φ) и $(r, \varphi + 2\pi)$ по нашему построению будет соответствовать одна и та же точка M. Поэтому обычно в качестве значения полярного угла φ выбирают так называемое *главное* его значение - или полагают $\varphi \in [0, 2\pi)$ или $\varphi \in (-\pi, \pi]$. Далее, полярные координаты самого полюса определяются только значением полярного радиуса $r = 0$ и никакого значения полярного угла полюсу не приписывается.

Важное значение имеет связь между полярными и декартовыми координатам точки. Пусть у декартовых координат (x, y) начало координат совпадает с полюсом полярных координат, а ось Ox направлена по полярной оси и единицы измерения длин одинаковы (такие системы полярных и декартовых координат называются *согласованными*), тогда имеем

$$x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi; r = \sqrt{x^2 + y^2}, tg\varphi = \frac{y}{x}. \tag{11}$$

Уравнение кривых в полярной системе координат обычно имеет вид $r = r(\varphi)$ или $\varphi = \varphi(r)$. Приведем несколько примеров построения графиков таких кривых.

Пример 1. Кривая с уравнением $r = R$ является, очевидно, окружностью радиуса R и с центром в полюсе.

Пример 2. Кривая с уравнением $r = \varphi$ (Рис. 17) строится так. По условию, $r > 0$, значит, $\varphi > 0$. Построим точку с координатами $\varphi = 1$, $r = 1$, затем начнем уменьшать φ. При этом уменьшается и полярный радиус и в пределе точка M кривой приходит к полюсу. Значит, кривая начинается в полюсе, касаясь полярной оси (так как полярный угол стремится к нулю и секущая OM стремится к полярной оси). Увеличивая φ от значения $\varphi = 1$, мы одновременно удаляемся от полюса и после полного оборота угла до значения $\varphi = 2\pi$ точка кривой оказывается на полярной оси на расстоянии 2π от полюса. Вот здесь мы *договариваемся* продолжать изменять φ непрерывно до бесконечности и в результате получаем кривую, называемую спиралью Архимеда. Этот пример показывает, что использование полярных координат иногда помогает описать простым уравнением кривые, уравнения которых в декартовых координатах имели бы довольно сложный вид.

Пример 3. Кривая с уравнением $r = \frac{1}{\varphi-1}$ (Рис. 18). При исследовании этого и других уравнений полезно иметь в виду, что переменные r и φ можно толковать двояко - как полярные координаты на плоскости $(x.y)$ и как декартовые на плоскости (φ, r). При втором толковании мы можем нарисовать график функции $r = \frac{1}{\varphi-1}$ как гиперболу на плоскости с декартовыми координатами (φ, r) и увидим, что $r > 0$ при $\varphi > 1$, $r \to 0$ при $\varphi \to +\infty$. и $r \to +\infty$ при $\varphi \to 1$. Первая информация показывает, что кривая на плоскости (x, y) (где координаты r, φ являются *полярными!*) стремится к полюсу, закручиваясь против часовой стрелки вокруг него. Вторая информация показывает, что кривая уходит в бесконечность, значит, есть смысл проверить, нет ли у нее асимптоты. Уравнение предполагаемой асимптоты $y = kx + b$. Ищем, вспоминая формулы (11), $k = \lim_{\varphi\to 1}\frac{y}{x} = \lim_{\varphi\to 1}\frac{r\sin\varphi}{r\cos\varphi} = tg1$. Ищем теперь $b = \lim_{\varphi\to 1}(y - kx) = \lim_{\varphi\to 1}(r\sin\varphi - rtg1\cos\varphi) = \lim_{\varphi\to 1}(\frac{\sin\varphi - tg1\cos\varphi}{\varphi-1} = \lim_{\varphi\to 1}\frac{\sin\varphi\cos 1 - \sin 1\cos\varphi}{(\varphi-1)\cos 1} = \lim_{\varphi\to 1}\frac{\sin(\varphi-1)}{(\varphi-1)\cos 1} = \frac{1}{\cos 1}$. Значит, прямая $y = xtg1 + \frac{1}{\cos 1}$ является асимптотой!

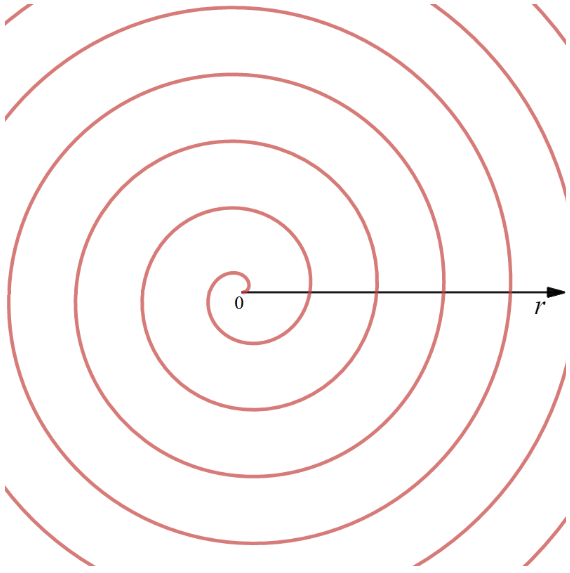


Рис. 17 - Пример 2. $r = \varphi$

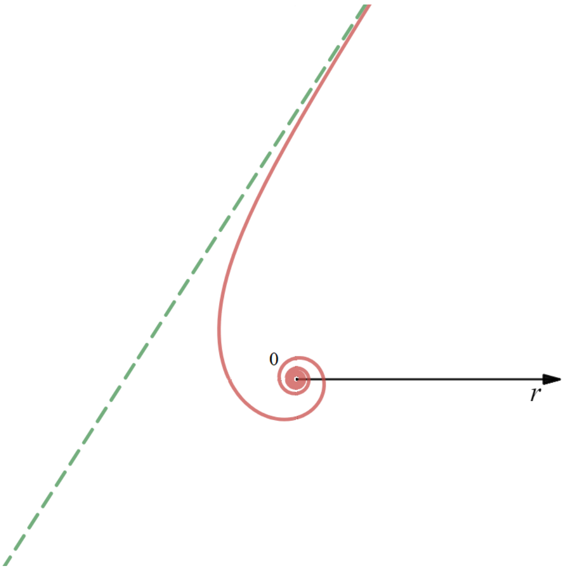


Рис. 18 - Пример 3. $r = \frac{1}{\varphi-1}$

Задание. Нарисуйте графики кривых: a) $r = \frac{\varphi}{\varphi-1}$; b) $r = \sin\varphi$; c)$r = \dfrac{c}{a\cos\varphi + b\sin\varphi}$ в зависимости от значений параметров a, b, c.