Условный экстремум
И.Х. Сабитов

1. Сначала напомним, как решается задача на исследование экстремума функции двух переменных во внутренних точках области задания функции. Пусть функция $z = f(x,y)$ задана в некоторой области $D \subset \mathbf{R^2}$ и $f(x,y) \in C^1(D)$. Тогда в предполагаемой внутренней точке $M_0(x_0,y_0) \in D$ локального экстремума функции ее частные производные необходимо равняются нулю:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(M_0) = 0,\ \frac{\partial f}{\partial y}(M_0) = 0 \tag{1}$$

(здесь желательно вспомить определение локального экстремума функции и аналог леммы Ферма о необходимом признаке экстремума).

Выполение условий (1) необходимо, но вовсе не достаточно для того, чтобы точка M_0 оказалась точкой кстремума (используя известный пример $y = x^3$ из теории функций одной переменной, постройте пример функции двух переменых, у которой точка с выполнением условий (1) не является точкой экстремума). У точек с выполнением условия (1) есть общее название *критические* или *стационарные* точки. Значит, эти точки являются *кандидатами* в точки экстремума.

Формулировка и проверка достаточности условий экстремума требуют уже предположения принадлежности рассматриваемой функции $f(x,y)$ классу C^2. Тогда приращение $\Delta f = f(M) - f(M_0) = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)$ можно представить в виде

$$\Delta f = df(M_0) + \frac{1}{2}d^2 f(M_0) + \alpha(x_0,y_0,\Delta x,\Delta y), \tag{2}$$

где норма остаточного члена α имеет оценку $||\alpha|| = o(\rho^2)$ при $\rho^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 \to 0$. Так как в критической точке $df(M_0) = 0$, то равенство (2) принимает вид

$$\Delta f = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M_0)dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(M_0)dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(M_0)dy^2\right) + o(\rho^2) \tag{3}$$

и знак приращения Δf при достаточно малых значениях ρ определяется знаком второго дифференциала $d^2 f(M_0)$. Для независимых переменных (x,y) дифференциалы dx и dy можно считать равными соответственно Δx и Δy, и поэтому второй дифференциал можно представить как *квадратичную* форму относительно свободных переменных $\Delta x, \Delta y$:

$$d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M_0)(\Delta x)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(M_0)\Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(M_0)(\Delta y)^2. \tag{4}$$

Из алгебры известно, что квадратичные формы бывают знакопостоянные и знакопеременные (или неопределенные). Вспомните определение знакопостоянства квадратичной формы и соответствующий критерий Сильвестра (справедливый для любого числа переменных!). Если второй дифференциал представляет собой положительно определенную форму, тогда знак Δf при достаточно малых $\Delta x, \Delta y$ будет положительным, т.е. значения $f(M)$ в близких к M_0 точках M будут больше чем в M_0, следовательное, в точке M_0 имеем *минимум.* Если же форма будет знакоотрицательной, тогда в точке M_0 имеем *максимум.* Если же второй дифференциал заведомо будет знакопеременной формой, тогда экстремума нет, а если он является положительно или отрицательно полуопределенной, тогда для проверки наличия или отсутствия экстремума требуется дополнительное исследование.

Задание 1. Покажите, что при знакопостоянстве формы второго дифференциала знак Δf при достаточно малых $\Delta x, \Delta y$ действительно совпадает со знаком второго дифференциала.

Задание 2. Приведите примеры, когда при каждом виде полуопределенности формы второго дифференциала в критической точке могут быть все три случая: 1) в точке M_0 имеем минимум; 2) в точке M_0 имеем максимум; 3) в точке M_0 нет экстремума.

Задание 3. Бывают еще случаи *нестрогого минимуима* и *нестрогого максимума.* Дайте определение этих понятий и подумайте, какие могут быть варианты для установления существования этих явлений.

Задание 4. Проведите аналогичное исследование строгих экстремумов для функций произвольного числа переменных.

Замечание 1. При установлении знакопостоянства квадратичной формы бывает следующая типичная ошибка. Пусть, например, для функции четырех переменных x, y, z, t получился такой второй дифференциал

$$d^2 f = 2dx^2 + 5dz^2 + 3dt^2.$$

Многие студенты радостно сообщают, что имеем положительно определенную форму, так как в сумме одни квадраты с положительными коэффициентами. Но это неверно. Действительно, существует набор переменных $(0, 1, 0, 0) \neq (0, 0, 0, 0)$, для которого $d^2 f = 0$, а для положительной определенности формы для любого ненулевого набора переменных всегда должно быть $d^2 f > 0$.

2. Теперь перейдем к задаче исследования условного экстремума, когда экстремум ищется не при всех значениях функции в окрестности рассматриваемой точки, а лишь для точек, связанных некоторым дополнительным условием. Рассмотрим такой пример. Пусть дана функция $z = x + y + 1$. Она задана на всей плоскости и нигде не имеет ни максимума, ни минимума, и ее значения изменяются от $-\infty$ до $+\infty$. Теперь предположим, что надо найти ее минимум и максимум при условии, что переменные x и y связаны условием $x^2 + y^2 = 1$, которое называется условием или уравнением *связи.* Графиком функции $z = x+y+1$ является плоскость, а точки, лежащие над окружностью $x^2 + y^2 = 1$, заполняют на этой плоскости некоторый эллипс (сделайте рисунок). Очевидно, что аппликаты (т.е координаты z) точек на этом эллипсе имеют самое большое и самое маленькое значения. Значит, добавление условия связи полностью изменяет решение вопроса об экстремуме.

Сформулируем теперь постановку задачи в случае функций двух переменных. Пусть в некоторой области $D \subset bfR^2$ задана функция $z = f(x, y)$ и задано действующее в этой же области условие связи

$$\varphi(x, y) = 0. \tag{5}$$

Требуется исследовать задачу на нахождение экстремума функции $f(x, y)$ при условии, что точки $M(x, y)$ имеют координаты, удовлетворяющие уравнению (5), которое при простых естественных условиях задает некоторую кривую Γ.

Необходимые условия существования будут получены при условиях $f(x, y)$ и $\varphi(x, y)$ принадлежат классу C^1, а для установления достаточных условий потребуем их C^2- гладкости.

В первом способе мы можем свести залачу к исследованию экстремума некоторой функцми одной переменной. Именно, определим из уравнения связи переменную, скажем, y, как неявную функцию от x. Пусть получилась функция $y = y(x)$. Подставим эти значения y в функцию $f(x, y)$. Получим некоторую функцию $F(x) = f(x, y(x))$, зависящую только от одного аргумента, а исследовать такую функцию на экстремум мы уже умеем.

Этот способ, однако, весьма трудоемкий, и им обычно пользуются только в простых случаях. Чаще всего пользуются методом Лагранжа. Он состоит в следующем.

Вводим функцию трех переменных

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y), \tag{6}$$

называемую функцией Лагранжа. Эта функция замечательна тем, что на кривой Γ ее значения совпадают со значениями функции $f(x, y)$ (так как на ней $\varphi(x, y) = 0$). Значит, вдоль неё приращения Δf и ΔL тоже совпадают вместе с совпадением точек и значений их экстремумов. Выпишем необходимые условия экстремума функции L:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) = 0) \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) = 0) \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= \varphi(x,y) = 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Пусть система (7) имеет некоторое решение $M_0(x_0, y_0, \lambda_0)$. В силу последнего уравнения системы точка (x_0, y_0) удовлетворяет необходимому условию (5). Позже, рассматривая геометрический смысл функции Лагранжа, мы установим, что тем самым при определенных условиях решениями системы (7) мы находим *все* критические точки функции на кривой Γ.

Перейдем теперь к нахождению достаточного признака условного экстремума. Выпишем представление ΔL в окрестности критической точки с использованием второго дифференциала d^2L:

$$\begin{aligned} \Delta L = \frac{1}{2}\Bigg(& \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(M_0)dx^2 + 2\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}(M_0)dxdy + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(M_0)dy^2 + \\ & + 2\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial \lambda}(M_0)dxd\lambda + 2\frac{\partial^2 L}{\partial y \partial \lambda}(M_0)dyd\lambda \Bigg) + o(\rho^2), \rho^2 \to 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Замечаем, что сумма $\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial \lambda}(M_0)dxd\lambda + 2\frac{\partial^2 L}{\partial y \partial \lambda}(M_0)dyd\lambda$ представима в виде

$$2(\frac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}dy)d\lambda,$$

что равно нулю, так как дифференцирование условия (5) дает

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}dy = 0. \tag{9}$$

Значит, второй дифференциал для L учетом условия связи сводится к выражению

$$d^2L = \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(M_0)dx^2 + 2\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}(M_0)dxdy + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(M_0)dy^2,$$

но определение его знака, а значит, и знака приращения $\Delta L = \Delta f$ на линии Γ теперь нужно делать в предположении, что дифференциалы dx и dy *не являются уже свободными*, а связаны равенством (9). В этом и заключается *существенное отличие* от задачи исследования экстремума без условия связи.

Пример. Исследовать функцию $z = x + y + 1$ на экстремум при условии связи

$$\varphi(x,y) = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0. \tag{10}$$

. Составим функцию Лагранжа

$$L = x + y + 1 + \lambda(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1.$$

Система (7) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= 1 + \frac{2\lambda x}{a^2} = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= 1 - \frac{2\lambda y}{b^2} = 0, \end{aligned} \tag{11}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0. \tag{12}$$

Решая эту систему, находим значения

$$2\lambda_1 = \sqrt{a^2-b^2} \text{при} a^2 > b^2, x_1 = -\frac{a^2}{\sqrt{a^2-b^2}}, y_1 = \frac{b^2}{\sqrt{a^2-b^2}};$$
$$2\lambda_2 = -\sqrt{a^2-b^2}, x_2 = \frac{a^2}{\sqrt{a^2-b^2}}, y_2 = -\frac{b^2}{\sqrt{a^2-b^2}}.$$

В соответствующей точке M_1 имеем

$$d^2L(M_1) = 2\lambda_1(a^2dx^2 - b^2dy^2).$$

Форма получилась знакопеременная, но у нас есть связь (9) между дифференциалами:

$$\frac{x_1}{a^2}dx = \frac{y_1}{b^2}dy,$$

с учетом которой второй дифференциал d^2L принимает вид $d^2L = 2\lambda_1 a^2(1 - \frac{a^2}{b^2})dx^2 < 0$, значит, в точке M_1 функция $x+y+1$ имеет максимум, равный $1-\sqrt{a^2-b^2}$. Аналогичные рассмотрения в точке M_2 дадут минимум, равный $1+\sqrt{a^2-b^2}$.

Замечание 2. Обратите внимание, что экстремумов всего два, и минимум получился больше максимума. Объясните, почему такое стало возможным.

3. Два важных частных случая. Есть случаи, когда можно обойтись без исследования знака второго дифференциала.

1) Условие связи дает компактное множество Γ. Мы знаем, что функция, непрерывная на компакте, достигает на нем своего минимального и максимального значения. Значит, если после решения системы (11) мы получили всего две критические точки, то обязательно в одной из них максимум исследуемой функции, а в другой - минимум. Если же критических точек больше двух, но конечное число, то вычисляем в них значения функции, и самое большое значение будет максимумом, а самое маленькое будет минимумом. Обратим внимание, что это будут *глобальные* экстремумы, а в остальных точках могут быть другие локальные экстремумы, которые уже нужно определять с исследованием знака второго дифференциала с учетом связи между дифференциалами переменных.

2) Второй дифференциал функции L оказался знакопостоянной квадратичной формой. В этом случае, конечно, нет необходимости учитывать связи между дифференциалами переменных, ответ будет в соответствии с общей теорией.

Задание 5. Исследуйте функцию $z = x+y+1$ на экстремум при условии связи $\varphi(x,y) = x^2+y^2-1 = 0$ и убедитесь, что ответ можно получить с использованием обоих описанных сейчас случаев.

Задание 6. Придумайте две задачи на условный экстремум, чтобы каждую из них можно было решить с применением рассуждений только одного из этих случаев.

4. Геометрическая интерпретация метода Лагранжа. Пусть градиенты обеих функций $f(x,y)$ и $\varphi(x,y)$ в критической точке на Γ отличны от нулевого вектора. Пусть

$$x = x(t), y = y(t)$$

- параметрическое представление кривой $\Gamma : \varphi(x,y) = 0$. Тогда значения функции $f(x,y)$ на Γ задают некоторую функцию $F(t) = f(x(t), y(t))$, критическим точкам которой отвечают значения параметра t, определяемые уравнением

$$F'(t) = f'_x x'(t) + f'_y y'(t) = 0, \text{значит, } grad\ f \perp \mathbf{r}'(t), \tag{13}$$

где $\mathbf{r}'(t)$ - вектор касательной к кривой Γ.

С другой стороны, кривая Γ является нулевой линией уровня функции $\varphi(x,y)$, а градиент функции в данной точке всегда ортогонален к линии уровня, проходящей через эту точку (докажите!). Значит, градиенты обеих функций $f(x,y)$ и $\varphi(x,y)$ ортогональны к одному же вектору касательной к Γ в критической точке, поэтому они коллинеарны и их координаты пропорциональны, что и записано в виде первых двух уравнений системы (7).

Рассмотрим вопрос об экстремуме функции при наличии двух уравнений связи. Пусть ищется экстремум функции $f(x, y, z)$ при наличии двух уравнений связи

$$\varphi_1(x, y) = 0, \text{и } \varphi_2(x, y) = 0. \tag{14}$$

Каждое уравнение $\varphi_i(x, y) = 0 > i = 1, 2$, задает поверхность, которые в общем положении пересекаясь, определяют кривую Γ с некоторым параметрическим представлением $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$. Как и выше, вводя функцию $F(t) = f(x(t), y(t), z(t))$, получаем, что в ее критической точке на Γ градиент функции $f(x, y, z)$ ортогонален к касательной к Γ. С другой стороны, градиенты функций $\varphi_i(x, y), i = 1, 2$, ортогональны к своим поверхностям уровней $\varphi_i(x, y) = 0, i = 1, 2$, поэтому они оба ортогональны к линии их пересечения, т.е. к Γ. Имеем, что в критической точке на Γ три вектора $grad\ f, grad\varphi_1$ и $grad\ \varphi_2$ ортогональны к одному вектору, касательному к Γ, т.е. все они лежат на одной плоскости. Но векторы $grad\varphi_1$ и $grad\ \varphi_2$ по условию не коллинеарны, значит, $grad\ f$ является их линейной комбинацией. Это и объясняет, почему Лагранж в этой задаче выбрал функцию

$$L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = f(x, y, z) + \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2,$$

уравнения для критических точек которой

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = 0,\\
\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} = 0,\\
\frac{\partial L}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} = 0\\
\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = \varphi_1(x, y, z) = 0,\\
\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = \varphi_2(x, y, z) = 0
\end{aligned}$$

как раз и соответствуют условию линейной зависимости градиента $f(x, y, z)$ от градиентов функций φ_1 и $grad\ \varphi_2$.

Задание 7. Дайте геометрическое обоснование выбора функции Лагранжа для задачи исследования условного экстремума функции трех переменных с одним уравнением связи $\varphi(x, y, z) = 0$.

Задание 8. Как записать и как обосновать геометрически выбор функции Лагранжа в общем случае в задаче поиска экстремума гладкой функции от n переменных с $k < n$ условиями связи, задающими k гладких поверхностей в общем положении?