И.Х. Сабитов

Приложения определенных интегралов к задачам геометрии, механики и естествознания

1. Общая идея применения интегралов. Опишем идею сведения упомянутых в названии темы задач к вычислению определенных интегралов. Из школьной программы известны многие формулы геометрии и физики в случаях, когда объекты геометрии имеют простую форму или когда законы физики (в общем смысле) устанавливаются при постоянстве параметров рассматриваемых процессов (постоянная скорость, постоянные длины сторон, постоянное давление и т.д.). Например, если фигура - многоугольник, то в принципе можем вычислить его площадь, но если фигура ограничена какой-нибудь кривой, то, за исключением случая окружности и ее дуг, формул для площади уже нет; аналогично, если сила постоянна, то ее работу можем вычислить, если путь идет по отрезку прямой, но если силовое поле переменное или же путь идет по кривой линии, то как найти работу? Идея же применения интеграла к таким задачам следующая. Пусть параметр x, от значений которого зависит искомая величина Q, изменяется в пределах некоторого отрезка $[a,b]$. Введем разбиение T этого отрезка на малые отрезки точками $a = x_0 < x_1 < ... < x_{i-1} < x_i < ... < x_n = b$ и в пределах каждого отрезка $[x_{i-1}, x_i], 1 \leq i \leq n$, с длиной $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ вычисляем соответствующую этому отрезку часть ΔQ_i величины Q, считая параметры задачи постоянными. Пусть при таком подходе существуют максимально возможное $M_i = (\Delta Q_i)_{max}$ и минимально возможное $m_i = (\Delta Q_i)_{min}$ значения искомой величины ΔQ_i, такие, что $M_i - m_i = o(\Delta x_i)$ при $\Delta x_i \to 0$. Далее, пусть существует интегрируемая на $[a,b]$ функция $q(x)$, такая, что при любом выборе значения ΔQ_i между m_i и M_i его можно представить в виде

$$\Delta Q_i = q(x_i)\Delta x_i + o(\Delta x_i), \Delta x_i \to 0. \tag{1}$$

Тогда принимаем, что все $Q \approx \sum_{i=1}^{n} q(x_i)\Delta x_i$, причем, чем мельче разбиение T, тем больше это приближение считаем более точным. Следовательно, видим, что найденное приближенное значение Q есть не что иное, как интегральная сумма для функции $q(x)$, и поэтому естественно определить Q как предел суммы $\sum_{i=1}^{n} q(x_i)\Delta x_i$ при $\lambda(T) \to 0$, где $\lambda(T) = max|\Delta x_i|$ - диаметр разбиения T, т.е.

$$Q \overset{def}{=} \lim_{\lambda(T)\to 0} \sum_{i=1}^{n} q(x_i)\Delta x_i = \int_a^b q(x)dx. \tag{2}$$

Важно отметить, что у формулы (2) двойная роль: во-первых, она дает **определение** искомой величины Q, во-вторых, она дает **способ вычисления** этой величины.

Напомним, что записью $o(\Delta x_i)$ обозначается бесконечно малая (б.м.) величина более высокого порядка по сравнению с $\Delta x_i \to 0$. В другой записи это равносильно соотношению $o(\Delta x_i) = o(1)\Delta x_i$, где через $o(1)$ обозначается б.м. функция при $\Delta x_i \to 0$) в смысле ее общего определения. Кроме того, уточним, что все $o(\Delta x_i)$ должны быть б.м. более высокого порядка по сравнению с $\lambda(T) \to 0$, т.е. должно выполняться представление $o(\Delta x_i) = o(1)\lambda(T)$, где б.м. $o(1)$ не зависит ни от x_i, ни от Δx_i (про такие б.м. говорят, что они **равномерно** бесконечно малые; формально это понятие в нашем случае объясняется так: в записи $o(\Delta x_i) = \alpha_i \Delta x_i$ бесконечно малые α_i называются равномерно бесконечно малыми при $\lambda \to 0$, если для любого $\varepsilon > 0\ \exists \delta > 0:\ \forall T$ с диаметром $\lambda(T) < \delta$ для всех номеров i имеем $|\alpha_i| < \varepsilon$).

Выясним связь между искомой величиной Q и «таинственной» функцией $q(x)$. Пусть мы ищем значение Q не на всем отрезке $[a,b]$, а на его части $[a,x]$. Тогда по формуле (1) имеем

$$Q(x) = \int_a^x q(t)dt,$$

т.е. функция $Q(x)$ представляется как интеграл с переменным верхним пределом. Если при этом функция $q(x)$ непрерывна, то $Q(x)$ оказывается дифференцируемой, и ее дифференциал равен $dQ = q(x)dx$, значит, по определению дифференцируемой функции, в представлении (1) величина $q(x_i)\Delta x_i$ является **главной частью** бесконечно малого приращения функции ΔQ. Это же верно и в случае кусочно-непрерывной функции, только тогда нужно говорить об односторонних производных и дифференциалах.

Замечание 1. Все геометрические и физические величины имеют размерность, поэтому всегда нужно проверять, совпадает ли размерность найденной величины с той, что требуется по смыслу задачи (а при этой проверке нужно учитывать размерности участвующих в задаче буквенных параметров).

Замечание 2. Формальное обоснование и использование такого подхода кажется очень сложным, на самом деле на практике выбор функции $q(x)$ происходит почти очевидным образом, так как эта функция оказывается в большинстве случаев непрерывной или кусочно-непрерывной, что автоматически означает ее интегрируемость. Это сразу же подтвердится ближайшим примером.

2. Площадь криволинейной трапеции. Пусть на плоскости нарисован график некоторой непрерывной функции $f(x) > 0, x \in [a, b], a < b$. Из точек $A(a, 0)$ и $B(b, 0)$ проведем прямолинейные отрезки до их пересечения с графиком соответственно в точках $C(a, f(a))$ и $D(b, f(b))$, получим некоторую фигуру F, ограниченную отрезками AB, BD, графиком функции $y = f(x)$ и отрезком CA, которую называют **криволинейной трапецией** (если графиком функции является прямолинейный отрезок, это будет обычная трапеция). Задача - вычислить площадь такой фигуры (рис.1).

Начнем с того, что формально **мы не знаем, что называть площадью** такой фигуры, так ее нет в списке «школьных» фигур. Поступаем по общей идее. Роль Q играет площадь S. Разобьем отрезок $[a, b]$ на малые отрезки точками деления $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{i-1} < x_i < ... < x_n = b$ и на каждом участке $[x_{i-1}, x_i]$ заменим, согласно общей идее, участок графика с переменной ординатой $f(x)$ некоторым постоянным значением $y = f(x)$ на $[x_{i-1}, x_i]$. Пусть H_i и h_i - соответственно максимальное и минимальное значения функции на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$. Тогда разность между максимальным значением M_i и минимальным значением m_i площади над отрезком $[x_{i-1}, x_i]$ имеет порядок $o(\Delta x_i)$, так как разность $H_i - h_i$ стремится к нулю при $\Delta x_i \to 0$. Тогда при замене дуги графика $y = f(x)$ на отрезок $y = f(x_i)$ получим представление $\Delta S_i = f(x_i)\Delta x_i + 0$, значит, работает описанная выше процедура с $q(x) = f(x)$. Так как непрерывная функция интегрируема, то по формуле (2) получаем

$$S \overset{def}{=} \int_a^b f(x)dx.$$

Если функция $f(x)$ знакопеременная, полученная формула дает так называемую **алгебраическую** площадь, т.е. ее значение может быть и положительным, и отрицательным, и нулем. Для получения же **геометрическойго** значения площади надо вычислять интеграл $\int_a^b |f(x)|dx$.

Пример. Пусть $f(x) = \sin x$. Если отрезок $[a, b] = [0, 2\pi]$, тогда алгебраическая площадь между осью Ox и графиком функции $y = \sin x$ равняется

$$\int_0^{2\pi} \sin x dx = 0,$$

а геометрическая площадь равна

$$\int_0^{2\pi} |\sin x| dx = \int_0^{\pi} \sin x dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx = 2\int_0^{\pi} \sin x dx = 4.$$

Задание. Найдите какой-нибудь отрезок, на котором алгебраическая площадь между осью Ox и графиком функции $y = \sin x$ отрицательна.

3. Другие случаи вычисления площадей.

a) Область ограничена графиками двух функций. Пусть над некоторым отрезком $[a, b]$ заданы две функции $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x) > f_1(x), x \in (a, b)$. Их графики, вместе с возможными вертикальными отрезками, соединяющими концевые точки графиков, ограничивают область плоскости (рис.2) (рисунок сделайте сами). Тогда ее площадь S очевидным образом представляется как разность площадей двух криволинейных трапеций, задаваемых двумя графиками. Значит, имеем формулу

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx. \tag{3}$$

Отметим, что в этом случае алгебраическая площадь совпадает с геометрической.

b) Область ограничена замкнутой кривой, заданной параметрически (рис.3). Пусть

замкнутая кривая задана параметрическими уравнениями

$$x = x(t), y = y(t), a \leq t \leq b, x(a) = x(b), y(a) = y(b)$$

Считаем, что кривая без самопересечений, тогда она ограничивает на плоскости некоторую область, площадь S которой вычисляется по формуле (предполагается, что при изменении параметра t от a к b обход кривой оставляет область слева)

$$S = -\int_a^b y(t)x'(t)dt = \int_a^b x(t)y'(t)dt = \frac{1}{2}\int_a^b (x(t)y'(t) - y(t)x'(t))dt \tag{4}$$

(доказательство в простом случае рисунка 3 получается разбиением кривой на две части точками M_1 и M_2 и применением формулы (3); в более сложном случае область разбивается на несколько областей вида как на рис. 2).

c) Область представлена сектором, ограниченным дугой кривой в полярных координатах (рис. 4). Пусть к концевым точкам M_1 и M_2 кривой с уравнением $r = r(\varphi)$ проведены два отрезка OM_1 и OM_2, соответствующие значениям полярного угла $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$. Получится область, аналогичная круговому сектору. Ее площадь S вычисляется по формуле

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)d\varphi. \qquad (5)$$

Доказательство этой формулы является хорошим упражнением, показывающим, что студент понял идею свед́ения задачи к вычислению некоторого интеграла. (Указание: в данной задаче полярный сектор надо разбить на круговые секторы с малыми растворами $\Delta\varphi_i = \varphi_i - \varphi_{i-1}$).

4. Длина кривой. Снова мы находимся в ситуации, когда еще не знаем даже, что это такое. Но мы знаем, что такое длина ломаной, и воспользуемся этим знанием, чтобы **определить** понятие **длины кривой**. Пусть на плоскости задана некоторая кривая L (не обязательно замкнутая) своим параметрическим представлением

$$L : x = x(t), y = y(t), a \le t \le b. \qquad (6)$$

Рассмотрим разбиения T отрезка $[a, b]$ на маленькие отрезки точками деления $a = t_0 < t_1 < ... < t_{i-1} < t_i < ... < t_n = b$. Им на кривой L соответствуют некоторые точки $M_0(x(t_0), y(t_0)), ..., M_{i-1}(x(t_{i-1}), y(t_{i-1}), M_i(x(t_i), y(t_i), ..., M_n(x(t_n), y(t_n))$. Соединим эти точки последовательно отрезками прямых, получим ломаную $L(T)$, вписанную в кривую L (рис 5.). Длина ломаной $L(T)$ нам известна как сумма длин ее звеньев. Обозначим ее как $p(T)$ (от слова perimeter). Каждому разбиению T соответствует своя длина $p(T)$, так что получаем некоторое бесконечное числовое множество P. Назовем кривую L **спрямляемой**, если это числовое множество имеет точную верхнюю грань $p < \infty$, и это число p **называем длиной** кривой L.

Теперь поставим задачу узнать, когда кривая спрямляема и как найти в этом случае ее длину. Предположим, что кривая **гладкая**. Тогда функции $x = x(t), y = y(t)$ имеют производные по $t \in [a, b]$.. Длина l_i звена $M_{i-1}M_i$ ломаной $L(T)$ вычисляется по формуле

$$l_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}.$$

По теореме Лагранжа существуют такие точки $\tau_i \in (t_{i-1}, t_i), \tau_i^* \in (t_{i-1}, t_i)$, для которых

$$\sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2} = \sqrt{x'^2(\tau_i) + y'^2(\tau_i^*)}\Delta t_i, \qquad (7)$$

где $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$.

Введем функцию $F(t) = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}$. Тогда $F(\tau_i)\Delta t_i$ при $\Delta t_i \to 0$ будет отличаться от правой части формулы (7) на б.м. порядка $o(\Delta t_i)$ (в них первые слагаемые под знаком корня совпадают, а вторые слагаемые отличаются на б.м. величину ввиду непрерывности $y'(t)$). Значит, l_i можно представить в виде

$$l_i = F(\tau_i)\Delta t_i + o(\Delta t_i), \Delta t_i \to 0.$$

Мы находимся в условиях формулы (1) из общего введения. Тогда длина ломаной $L(T) = \sum_i l_i$ имеет свои пределом при диаметре $\lambda(T) \to 0$ интеграл $\int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt$.

Однако по определению длиной кривой L была названа точная верхняя грань множества длин всех вписанных в L ломаных. Но нетрудно показать, что найденный предел интегральных сумм является одновременно и точной верхней гранью множества длин ломаных. Следовательно, длина кривой L, заданной формулой (6), равна

$$p = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt. \qquad (8)$$

Замечание 3. Аналогичная формула

$$p = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}dt \qquad (9)$$

имеет место и в случае задания кривой в пространстве параметрическими уравнениями

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t), a \leq t \leq b.$$

Рассмотрим **важный частный случай**, когда кривая на плоскости задана уравнением $y = f(x)$, где $f(x)$ - гладкая функция на некотором отрезке $[a, b]$. Эту кривую можно считать заданной в параметрическом виде как $x = x, y = f(x)$ с параметром $t = x$. Тогда формула (8) для длины примет вид

$$p = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}dx.$$

Замечание 4. Если заданная кривая не гладкая, а кусочно-гладкая, тогда она разбивается на конечное число гладких дуг и ее длина считается как сумма длин этих гладких дуг.

5. Натуральное уравнение кривой. Рассмотрим на кривой с уравнением (6) произвольную дугу, соответствующую участку $[a, t]$. Длина s этой дуги вычисляется по формуле

$$s = \int_a^t \sqrt{x'^2(\tau) + y'^2(\tau)}d\tau. \tag{10}$$

Мы видим, что длина дуги представляется как интеграл с переменным верхним пределом от непрерывной функции. Следовательно, можно представить s как функцию $s = s(t)$. Производная этой функции равна $s'(t) = x'^2(t) + y'^2(t)$ и положительна, поэтому функция монотонна. Значит, на отрезке $[0, p]$ существует обратная функция $t = t(s)$ и координаты точек кривой можно представить как функции длины дуги:

$$x = x(s) = x(t(s)), y = y(s) = y(t(s)), 0 \leq s \leq p. \tag{11}$$

Такое представление кривой, когда роль параметра играет длина дуги, называется **натуральным уравнением** кривой, а сам параметр s называется натуральным параметром. Он имеет очень простое геометрическое содержание: значению s соответствует та точка кривой, до которой длина дуги от начала кривой равна именно s. Характерным признаком натурального параметра является выполнение равенства $x'^2(s) + y'^2(s) \equiv 1$.

Пример. Найдем натуральное уравнение окружности. Стандартное уравнение окружности радиуса R имеет вид

$$x = R\cos\varphi, y = R\sin\varphi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

По формуле (10) имеем

$$s = \int_0^\varphi R d\varphi = R\varphi,$$

значит, $\varphi = \frac{s}{R}$. Тогда параметрическое уравнение окружности в функции от длины дуги имеет вид

$$x = R\cos\frac{s}{R}, y = R\sin\frac{s}{R}, 0 \leq s \leq 2\pi R.$$

Задание. 1) Проверьте, что $x'^2(s) + y'^2(s) \equiv 1$. 2) Убедитесь, что длина дуги от начальной точки $(R, 0)$ окружности до ее точки со значением параметра s равно ровно s.