Листок 1

Задача 1. Прямоугольник разбили на конечное число прямоугольников меньшего размера, стороны которых параллельны сторонам исходного прямоугольника. Известно, что у каждого из прямоугольников разбиения хотя бы одна сторона имеет рациональную длину. Докажите, что у исходного прямоугольника хотя бы одна из сторон имеет рациональную длину.

Задача 2. Постройте такое подмножество единичного квадрата, что пересечение его с любой вертикалью и любой горизонталью состоит из не более чем одной точки, но его замыкание совпадает с квадратом.

Задача 3. Пусть $I = [0,1]^n$. Найдите

$$\int_I \min\{x_1, \ldots, x_n\}\, dx, \quad \int_I \max\{x_1, \ldots, x_n\}\, dx.$$

Задача 4. Пусть $B(0, \sqrt{n})$ – шар в $\mathbb{R}^n$ с центром в нуле и радиуса $\sqrt{n}$. Обозначим через $Q(t,n)$ часть шара $B(0,\sqrt{n})$, принадлежащую области $\{x\colon x_1 < t\}$. Найдите предел

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|Q(t,n)|}{|B(0,\sqrt{n})|}.$$

Задача 5. Пусть I – некоторый брус и $u \in C^3(I)$, причем $u = 0$ в окрестности ∂I. Докажите, что

$$\int_I \det(D^2 u)\, dx = 0.$$