Краткий конспект лекций по математическому анализу
(II-й курс, весенний семестр)
С.В.Шапошников

1. Кратный интеграл Римана.

Множество вида $I = \Delta_1 \times \Delta_2 \times \ldots \times \Delta_n$, где Δ_i – отрезок, интервал или полуинтервал, будем называть брусом или параллелепипедом. Объём I определяется формулой

$$|I| = |\Delta_1| \cdots |\Delta_n|,$$

где $|\Delta_i|$ – длина промежутка Δ_i. Если все Δ_i – отрезки, то такой брус будем называть замкнутым. Пусть I – замкнутый брус, являющийся произведением отрезков $[a_k, b_k]$. Разобьем каждый отрезок $[a_k, b_k]$ на отрезки $\Delta_i^k = [x_i^{k-1}, x_i^k]$. Тогда I разбивается на замкнутые бруски $\Delta_{i_1}^1 \times \cdots \times \Delta_{i_n}^n$. Легко проверить, что объем исходного бруса равен сумме объемов брусков, на которые он разбит. Действительно, раскрываем скобки

$$(\Delta_1^1 + \ldots + \Delta_{m_1}^1) \cdots (\Delta_1^n + \ldots + \Delta_{m_n}^n) = \ldots$$

Набор получившихся замкнутых брусков $\{I_j\}$ называем разбиением бруса I и обозначаем через $\mathbb{T}$. Кроме того, вместе с разбиением $\{I_j\}$ мы будем рассматривать разбиение $\{\widetilde{I}_i\}$, которое состоит из брусков $\widetilde{\Delta}_{i_1}^1 \times \cdots \times \widetilde{\Delta}_{i_n}^n$, где $\Delta_i^k = [x_i^{k-1}, x_i^k)$ при $x_i^k \neq b_i$ и $\Delta_i^k = [x_i^{k-1}, x_i^k]$ при $x_i^k = b_i$. Отметим, что бруски $\widetilde{I}_i$ попарно не пересекаются.

Диаметр $d(I_i)$ одного бруса I_i равен $\sup_{x,y \in I_i} \|x - y\|$. Если разбиение $\mathbb{T}$ состоит из брусков $\{I_i\}$, то диаметр разбиения

$$\lambda(\mathbb{T}) = \max_i d(I_i).$$

Если задано разбиение $\mathbb{T} = \{I_i\}$ замкнутого бруса I и в каждом замкнутом брусе I_i выбрана точка ξ_i, то говорят, что задано отмеченной разбиение $(\mathbb{T}, \xi)$.

Пусть $f\colon I \to \mathbb{R}$ и $(\mathbb{T}, \xi)$ – отмеченное разбиение бруса I. Выражение

$$\sigma(f, \mathbb{T}, \xi) = \sum_i f(\xi_i)|I_i|$$

называется интегральной суммой Римана.

Число A называется интегралом Римана по брусу I от функции f, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для всех отмеченных разбиений $(\mathbb{T}, \xi)$ с диаметром $\lambda(\mathbb{T}) < \delta$ выполняется

$$\Big|A - \sigma(f, \mathbb{T}, \xi)\Big| < \varepsilon.$$

Интеграл от f по I обозначают через

$$\int_I f(x)\,dx \quad \text{или} \quad \int_I f(x_1, \ldots, x_n)\,dx_1 \ldots dx_n.$$

Определение интеграла по брусу практически дословно повторяет определение интеграла по отрезку.

Предложение 1.1. *Пусть I – замкнутый брус и $J \subset I$ – произвольный брус. Тогда индикатор J, т. е. такая функция χ_J, что $\chi_J(x) = 1$ при $x \in J$ и $\chi_J(x) = 0$ при $x \notin J$, интегрируем по Риману и*

$$\int_I \chi_J(x)\,dx = |J|.$$

Предложение 1.2. (i) *Если f интегрируема по Риману на брусе I, то f ограничена.*

(ii) *Если f и g интегрируемы по Риману на I, то для всяких чисел α, β функция $\alpha f + \beta g$ интегрируема по Риману на I и*

$$\int_I (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx = \alpha \int_I f(x)\, dx + \beta \int_I g(x)\, dx.$$

(iii) *Если f и g интегрируемы по Риману на I и $f \geqslant g$, то*

$$\int_I f(x)\, dx \geqslant \int_I g(x)\, dx.$$

Доказательство. Обоснование дословно повторяет рассуждения для интеграла по отрезку. □

Используя свойство линейности интеграла немедленно выводим следующее утверждение.

Следствие 1.1. *Если J_k – произвольные бруски в I, то всякая ступенчатая функция $f(x) = \sum_k c_k \chi_{J_k}(x)$ интегрируема и верно равенство*

$$\int_I f(x)\, dx = \sum_k c_k |J_k|.$$

Используя это следствие легко показать, что если брус J покрыт конечным набором брусков J_k, то $|J| \leqslant \sum_k |J_k|$.

Следствие 1.2. *Пусть f интегрируема на I. Тогда верна оценка*

$$\Big| \int_I f(x)\, dx \Big| \leqslant \sup_I |f| |I|.$$

Теорема 1.1. *Если f_n интегрируемы на брусе I и последовательность f_n равномерно сходится к функции f на I, то f интегрируема на I и*

$$\lim_{n\to\infty} \int_I f_n(x)\, dx = \int_I f(x)\, dx.$$

Доказательство. Обоснование дословно повторяет рассуждения для случая интеграла по отрезку. □

Следствие 1.3. *Если функция f непрерывна на I, то f интегрируема на I.*

Доказательство. Пусть $(\mathbb{T}_N, \xi_N)$ – последовательность разбиений бруса I на попарно не пересекающиеся бруски I_m^N с отмеченными точками $\xi_m^N \in I_m^N$, причем $\lambda(\mathbb{T}_N) \to 0$. Напомним, что $\widetilde{I}_m^N$ – попарно непересекающиеся бруски, отличающиеся от I_m^N только границей. Последовательность ступенчатых функций

$$f_N(x) = \sum_m f(\xi_m^N) \chi_{\widetilde{I}_m^N}(x)$$

равномерно сходится к функции f в силу равномерной непрерывности f на I. □

Легко (в отличии от одномерного случая) привести пример интегрируемой функции, которую нельзя приблизить равномерно ступенчатыми функциями. Например, индикатор треугольника является такой функцией.

Ослабим условие равномерной сходимости.

2. Критерий интегрируемости.

Теорема 2.1. *Ограниченная функция f интегрируема на I тогда и только тогда, когда существуют две последовательности ступенчатых функций h_n и g_n такие, что $h_n(x) \leqslant h_{n+1}(x)$, $g_{n+1}(x) \leqslant g_n(x)$, $h_n(x) \leqslant f(x) \leqslant g_n(x)$ и*

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\int_I g_n(x)\,dx - \int_I h_n(x)\,dx\Big) = 0.$$

Доказательство. Обоснуем достаточность. Поскольку интегралы от h_n и от g_n образуют монотонные ограниченные последовательности, а разность интегралов от g_n и f_n стремится к нулю, то

$$\lim_{n\to\infty}\int_I h_n\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_I g_n\,dx = A.$$

Заметим, что для всякого разбиения $(\mathbb{T},\xi)$ имеют место неравенства

$$\sigma(h_n,\mathbb{T},\xi) \leqslant \sigma(f,\mathbb{T},\xi) \leqslant \sigma(g_n,\mathbb{T},\xi).$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Фиксируем номер n такой, что интегралы от h_n и g_n отличаются от A меньше чем на ε. Теперь выбираем масштаб разбиения столь малым, что римановы суммы для h_n и для g_n отличаются от интегралов h_n и g_n меньше чем на ε. Получаем, что для разбиений с таким масштабом $|\sigma(f,\mathbb{T},\xi) - A| \leqslant 2\varepsilon$.

Обоснуем необходимость. Пусть $\{I_m^N\}$ – последовательность разбиений бруса I на попарно непересекающиеся невырожденные бруски, причем разбиение $(N+1)$ получается из разбиения N следующим образом: каждый брусок I_m^N разбивается на попарно непересекающиеся бруски $J_{k,m}$, причем $\bigcup_k J_{k,m} = I_m^N$, набор брусков $J_{k,m}$ и составляет $(N+1)$-е разбиение. Положим

$$h_N(x) = \sum_m (\inf_{I_m^N} f)\chi_{I_m^N}(x), \quad g_N(x) = \sum_m (\sup_{I_m^N} f)\chi_{I_m^N}(x).$$

Ясно, что $h_N(x) \leqslant h_{N+1}(x)$ и $g_{N+1}(x) \leqslant g_N(x)$ и

$$\int_I g_N\,dx - \int_I h_N\,dx = \sum_m\Big(\sup_{I_m^N} f - \inf_{I_m^N} f\Big)|I_m^N|.$$

Если f интегрируема, то правая часть последнего равенства стремится к нулю. $\square$

Замечание 2.1. Фактически мы доказали, что в случае интегрируемой функции f имеют место равенства:

$$\lim_{n\to\infty}\int_I h_n\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_I g_n\,dx = \int_I f\,dx.$$

Замечание 2.2. Последовательности h_n и g_n, удовлетворяющие свойствам $h_n(x) \leqslant h_{n+1}(x)$, $g_{n+1}(x) \leqslant g_n(x)$, $h_n(x) \leqslant f(x) \leqslant g_n(x)$ всегда существуют, а именно, можно взять

$$h_N(x) = \sum_m (\inf_{I_m^N} f)\chi_{I_m^N}(x), \quad g_N(x) = \sum_m (\sup_{I_m^N} f)\chi_{I_m^N}(x).$$

Замечание 2.3. Интегрируемость ограниченной функции f равносильна тому, что

$$\lim_{N\to\infty}\sum_m\Big(\sup_{I_m^N} f - \inf_{I_m^N} f\Big)|I_m^N| = \lim_{N\to\infty}\sum_m \omega(f, I_m^N)|I_m^N| = 0.$$

Это фактически критерий Дарбу.

3. Теорема Фубини и формула интегрирования по частям

Пусть $I_x \subset \mathbb{R}^n$ и $I_y \subset \mathbb{R}^m$, $f\colon I_x \times I_y \to \mathbb{R}$.

Теорема 3.1. (Фубини) *Если f интегрируема по Риману на $I_x \times I_y$ и для каждого x функция $y \to f(x,y)$ интегрируема на I_y, то функция*

$$x \to \int_{I_y} f(x,y)\,dy$$

интегрируема по I_x и верно равенство

$$\int_{I_x\times I_y} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{I_x}\Big(\int_{I_y} f(x,y)\,dy\Big)\,dx.$$

Доказательство. Из определения объема бруса немедленно следует, что доказываемое утверждение верно для $f = \chi_J$, где J – брус в $I_x \times I_y$. Следовательно, в силу линейности интеграла, это утверждение верно для ступенчатой функции. Заметим, что интеграл от ступенчатой функции по I_y является ступенчатой функцией на I_x. Так как f интегрируема на $I_x \times I_y$, то существуют последовательности ступенчатых функций h_n и g_n такие, что $h_n(x,y) \leqslant h_{n+1}(x,y)$, $g_{n+1}(x,y) \leqslant g_n(x,y)$, $h_n(x,y) \leqslant f(x,y) \leqslant g_n(x,y)$ и

$$\lim_{n\to\infty}\int_{I_x\times I_y} h_n\,dxdy = \lim_{n\to\infty}\int_{I_x\times I_y} g_n\,dxdy = \int_{I_x\times I_y} f\,dxdy.$$

Кроме того,

$$H_n(x) = \int_{I_y} h_n(x,y)\,dy \leqslant \int_{I_y} f(x,y)\,dy \leqslant \int_{I_y} g_n(x,y)\,dy = G_n(x),$$

причем H_n, G_n удовлетворяют всем условиям доказанного выше критерия интегрируемости.

$\square$

Следствие 3.1. (Формула интегрирования по частям) *Пусть f, g – непрерывно дифференцируемые функции на замкнутом брусе I, причем функция f равна нулю на ∂I. Тогда*

$$\int_I f(\partial_{x_i} g)\,dx = -\int_I (\partial_{x_i} f) g\,dx.$$

Доказательство. Достаточно проверить, что

$$\int_I \partial_{x_i}(fg)\,dx = 0.$$

Далее считаем, что $i = n$ и $I_{n-1} = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_{n-1}, b_{n-1}]$. Применяем теорему Фубини и формулу Ньютона–Лейбница:

$$\int_I \partial_{x_n}(fg)\,dx = \int_{I_{n-1}}\Big(\int_{a_n}^{b_n} \partial_{x_n}(fg)\,dx_n\Big)\,dx_1\ldots dx_{n-1} =$$

$$\int_{I_{n-1}} fg|_{a_n}^{b_n}\,dx_1\ldots dx_{n-1} = 0.$$

$\square$

4. Критерий Лебега.

Множество $E \subset \mathbb{R}^n$ называется множеством меры нуль по Лебегу, если для всякого положительного ε найдется такой не более чем счетный набор брусков $\{I_n\}$, что

$$E \subset \bigcup_n I_n, \quad |E| \leqslant \sum_n |I_n|.$$

Не более чем счетный набор точек является множеством меры нуль по Лебегу, а брус положительного объёма не является множеством меры нуль по Лебегу. Более интересный пример множества меры нуль доставляет график непрерывной на брусе I функции:

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \colon x \in I\} \subset \mathbb{R}^{n+1}, \quad I \subset \mathbb{R}^n, \quad f \colon I \to \mathbb{R}.$$

Действительно, можно сделать такое разбиение $\{I_i\}$ бруса I, что на каждом бруске I_i колебание функции f будет меньше ε, т. е. ее график над этим бруском полностью лежит внутри бруса $I_i \times J_i$, где длина отрезка J_i меньше ε. Все вместе бруски $I_i \times J_i$ покрывают график, а их суммарный объём не превосходит $\varepsilon|I|$.

Предложение 4.1. (i) *Если E является множеством меры нуль по Лебегу, то и всякое его подмножество $D \subset E$ также является множеством меры нуль.*

(ii) *Не более чем счетное объединений множеств меры нуль является множеством меры нуль.*

Если некоторое свойство выполняется всюду за исключением точек множества меры нуль по Лебегу, то говорят, что оно выполнено почти всюду.

Теорема 4.1. (Критерий Лебега) *Функция f интегрируема по Риману на брусе I тогда и только тогда, когда f ограничена на I и непрерывна почти всюду на I.*

Доказательство. Пусть f – ограниченная функция на I. Пусть $\{I_m^N\}$ – последовательность разбиений бруса I на попарно непересекающиеся невырожденные бруски, причем разбиение $(N+1)$ получается из разбиения N следующим образом: каждый брусок I_m^N разбивается на попарно непересекающиеся бруски $J_{k,m}$, причем $\bigcup_k J_{k,m} = I_m^N$, набор брусков $J_{k,m}$ и составляет $(N+1)$-е разбиение. Положим

$$h_N(x) = \sum_m (\inf_{I_m^N} f)\chi_{I_m^N}(x), \quad g_N(x) = \sum_m (\sup_{I_m^N} f)\chi_{I_m^N}(x).$$

Мы уже знаем, что интегрируемость f равносильна равенству

$$\lim_{N\to\infty} \int_I (g_N(x) - h_N(x))\, dx = 0.$$

Заметим, что для всех точек $x \in I$, которые не принадлежат границам брусков I_m^N, выполнено

$$\lim_{N\to\infty} (g_N(x) - h_N(x)) = \omega_f(x),$$

где $\omega_f(x)$ – колебание функции f в точке x. Отметим, что объединение границ брусков I_m^N является множеством меры нуль. Используя теорему Лебега о предельном переходе в интеграле Лебега (будет подробно обсуждаться ниже) получаем

$$\lim_{N\to\infty} \int_I (g_N(x) - h_N(x))\, dx = \int_I \omega_f(x)\, dx.$$

Таким образом, интегрируемость f равносильна равенству

$$\int_I \omega_f(x)\, dx = 0,$$

которое в свою очередь равносильно тому, что $\omega_f(x) = 0$ почти всюду на I. $\square$

5. Интеграл по множеству

Пусть $A \subset \mathbb{R}^d$ – ограниченное множество и $f\colon A \to \mathbb{R}$. Доопределим f вне A нулем. Если для некоторого бруса $I \supset A$ функция f интегрируема на I, то и для всякого другого бруса $J \supset A$ функция f интегрируема на J. Действительно, ограниченность надо проверять только на A, а точки разрыва либо в A, либо на границе множества A (далее обозначаем через ∂A), т. е. множество точек разрыва содержится в замыкании A. Таким образом, интегрируемость полностью определяется значениями функции f на брусе $I \cap J \supset \overline{A}$. Пусть уже известно, что f интегрируема. Будем брать такие разбиения I и J, которые задают одно разбиение на $I \cap J$. Так как вне $I \cap J$ функция f равна нулю, то в интегральной сумме могут отличаться от нуля лишь слагаемые, соответствующие разбиению бруса $I \cap J$. Значит интегральные суммы для I и для J по таким разбиениям совпадают и, следовательно, совпадают интегралы. Итак, интегрируемость и значение интеграла для f не зависит от выбора $I \supset A$. Это позволяет определить интеграл по множеству A равенством:

$$\int_A f(x)\,dx = \int_{I \supset A} f(x)\,dx.$$

Рассмотрим важный пример: $f(x) = \chi_A(x)$ – индикатор множества $A \subset I$, т. е. $\chi_A(x) = 1$ при $x \in A$ и $\chi_A(x) = 0$ при $x \notin A$. Множество точек разрыва χ_A – граница множества A. По критерию Лебега χ_A интегрируема по Риману тогда и только тогда, когда ее граница является множеством меры нуль по Лебегу. Интересно обсудить интегрируемость этой функции с точки зрения критерия Дарбу. Пусть дано некоторое разбиение бруса I на бруски I_i. Нижняя сумма Дарбу для χ_A, соответствующая этому разбиению, равна сумме объёмов брусков I_i лежащих целиком внутри A, т. е. равна объёму фигуры, составленной из I_i и вписанной в A. Верхняя сумма Дарбу для χ_A, соответствующая этому разбиению, равна сумме объёмов брусков I_i, имеющих непустое пересечение с A, т. е. равна объёму фигуры, составленной из I_i и описанной вокруг A. Критерий Дарбу гласит, что χ_A интегрируема тогда и только тогда, когда верхняя грань объёмов вписанных фигур равна нижней грани объёмов описанных фигур. Соответственно, интеграл от χ_A естественно назвать объёмом множества A, если конечно такой интеграл существует.

Итак, если A – ограниченное множество (лежит в некотором брусе I), граница которого является множеством меры нуль по Лебегу, то его называют допустимым или измеримым по Жордану, а число

$$|A| = \int_A 1\,dx = \int_{I \supset A} \chi_A(x)\,dx$$

называют мерой Жордана или объёмом A.

Если $|A| = 0$, то всякая ограниченная функция $f\colon A \to \mathbb{R}$ интегрируема на A и интеграл от f по A равен нулю. Действительно, равенство нулю объема означает, что для всякого $\varepsilon > 0$ множество A можно покрыть конечным числом замкнутых брусков, суммарный объем которых меньше ε. Эти бруски покрывают замыкание A. Следовательно, множество точек разрыва функции f имеет меру нуль по Лебегу и f интегрируема. Остаётся заметить, что при вычислении интегральной суммы в каждом бруске разбиения найдется точка, в которой f равна нулю.

Наконец заметим, что если интегрируемая на A функция почти всюду равна нулю, то ее интеграл равен нулю. Из этого следует, что если две интегрируемые функции отличаются на множестве меры нуль по Лебегу, то их интегралы совпадают.

6. Свойства интеграла Римана по множеству.

Предложение 6.1. *Если E_1 и E_2 – допустимые множества (ограниченные и граница является множеством меры нуль по Лебегу), то $E_1 \cap E_2$, $E_1 \cup E_2$ и $E_1 \setminus E_2$ являются допустимыми множествами.*

Доказательство. Достаточно заметить, что граница всех этих множеств является подмножеством $\partial E_1 \cup \partial E_2$. □

Теорема 6.1. *Пусть E, E_1 и E_2 – допустимые множества.*

(i) *Если f и g интегрируемы на E по Риману, то для всяких чисел α, β функция $\alpha f + \beta g$ интегрируема на E и*

$$\int_E (\alpha f + \beta g)\, dx = \alpha \int_E f\, dx + \beta \int_E g\, dx.$$

(ii) *Если f и g интегрируемы на E по Риману и $f \geqslant g$ на E, то*

$$\int_E f\, dx \geqslant \int_E g\, dx.$$

(i) *Функция f интегрируема по Риману на $E_1 \cup E_2$ тогда и только тогда, когда она интегрируема на E_1 и на E_2, и в случае интегрируемости*

$$\int_{E_1 \cup E_2} f\, dx = \int_{E_1} f\, dx + \int_{E_2} f\, dx - \int_{E_1 \cap E_2} f\, dx.$$

Если $|E_1 \cap E_2| = 0$, то

$$\int_{E_1 \cup E_2} f\, dx = \int_{E_1} f\, dx + \int_{E_2} f\, dx.$$

Доказательство. Пункты (i) и (ii) немедленно следуют из определения интеграла по множеству и аналогичных утверждений для бруса. Для доказательства пункта (iii) достаточно применить равенство:

$$\chi_{E_1 \cup E_2} = \chi_{E_1} + \chi_{E_2} - \chi_{E_1 \cap E_2}$$

и воспользоваться линейностью интеграла. □

Следствие 6.1. *Если f интегрируема на допустимом E, то $|f|$ интегрируема на E и*

$$\Big|\int_E f\, dx\Big| \leqslant \int_E |f|\, dx.$$

Доказательство. Интегрируемость следует из критерия Лебега, а оценка из неравенств $-|f| \leqslant f \leqslant |f|$. □

Следствие 6.2. (Теорема о среднем) *Если f интегрируема на допустимом E и $m = \inf_E f$, $M = \sup_E f$, то найдется число $\mu \in [m, M]$ такое, что*

$$\int_E f\, dx = \mu |E|.$$

Если E связно и f – непрерывная функция, то $\mu = f(c)$ для некоторого $c \in E$.

Теорема 6.2. *Пусть $E \subset I_x \times I_y$ – допустимое множество, причем при каждом $x \in I_x$ множество*

$$E_x = \{y \in I_y \colon (x, y) \in E\}$$

является допустимым. Тогда верно равенство

$$|E| = \int_{I_x} |E_x|\, dx.$$

Более того, если f интегрируема на E и для каждого x функция $y \to f(x,y)$ интегрируема на E_x, то

$$\int_E f(x,y)\,dx\,dy = \int_{I_x}\Big(\int_{E_x} f(x,y)\,dy\Big)\,dx.$$

Доказательство. Надо применить теорему Фубини к функции $f\chi_E$. □

7. Формула замены переменных.

Пусть Ω_x и Ω_y – открытые ограниченные множества в $\mathbb{R}^n$ и $\varphi\colon \Omega_x \to \Omega_y$ – диффеоморфизм, т. е. биективное и непрерывно дифференцируемое в обе стороны отображение.

Диффеоморфизм переводит множество меры нуль по Лебегу в множество меры нуль по Лебегу. Кроме того, при диффеоморфизме граница множества переходит в границу и, следовательно, образ допустимого множества является допустимым множеством.

Теорема 7.1. *Пусть E – допустимое множество, замыкание которого лежит в Ω_x, и $f\colon \varphi(E) \to \mathbb{R}$. Функция f интегрируема на $\varphi(E)$ тогда и только тогда, когда $f(\varphi(x))|\varphi'(x)|$, где $|\varphi'(x)|$ – определитель матрицы Якоби $\varphi'(x)$ отображения φ, интегрируемо на E. В случае интегрируемости имеет место равенство:*

$$\int_{\varphi(E)} f(y)\,dy = \int_E f(\varphi(x))|\varphi'(x)|\,dx.$$

Доказательство. 0. В силу линейности утверждения по f достаточно доказать для $f \geqslant 0$.

1. Достаточно доказать неравенство:

$$\int_{\varphi(E)} f(y)\,dy \leqslant \int_E f(\varphi(x))|\varphi'(x)|\,dx.$$

Действительно, сделав обратную замену координат в правой части получим противоположное неравенство и, значит, равенство.

2. Можно считать, что множество E столь мало, что существует замкнутый куб $I \subset \Omega_x$, содержащий множество E. Действительно, покроем E конечным набором кубов I_j таких, что они попарно либо не пересекаются либо пересекаются лишь по границе. Тогда

$$\int_{\varphi(E)} f(y)\,dy = \sum_j \int_{\varphi(E\cap I_j)} f(y)\,dy$$

и

$$\sum_j \int_{E\cap I_j} f(\varphi(x))|\varphi'(x)|\,dx = \int_E f(\varphi(x))|\varphi'(x)|\,dx.$$

Достаточно доказать неравенство для множеств $E \cap I_j$.

3. Можно заменить E на куб I. Действительно, требуемое неравенство можно записать так

$$\int_{\varphi(I)} f(y)\chi_{\varphi(E)}(y)\,dy \leqslant \int_I f(\varphi(x))\chi_{\varphi(E)}(\varphi(x))|\varphi'(x)|\,dx,$$

т. е. надо перейти от функции f к функции $f\chi_{\varphi(E)}$.

4. Достаточно доказать, что

$$|\varphi(I)| \leqslant \int_I |\varphi'(x)|\,dx.$$

Действительно, разобъем I на бруски I_i. Тогда по аддитивности интеграла

$$\int_{\varphi(I)} f(y)\,dy = \sum_i \int_{\varphi(I_i)} f(y)\,dy \leqslant \sum_i \sup_{I_i} f(\varphi(x))|\varphi(I_i)|.$$

Предположим, что мы уже доказали, что

$$|\varphi(I_i)| \leqslant \int_{I_i} |J_\varphi(x)|\,dx$$

Тогда (мы уже считаем, что $f \geqslant 0$)

$$\int_{\varphi(I)} f(y)\,dy \leqslant \sum_i \sup_{I_i} f(\varphi(x)) \int_{I_i} |\varphi'(x)|\,dx.$$

Остается заметить, что правая часть при стремлении диаметра разбиения к нулю сходится к интегралу

$$\int_I f(\varphi(x))|\varphi'(x)|\,dx.$$

5. Для завершения доказательства нам осталось обосновать неравенство

$$|\varphi(I)| \leqslant \int_I |\varphi'(x)|\,dx.$$

Доказываем от противного. Предположим, что найдется число $q \in (0,1)$ такое, что

$$q|\varphi(I)| \geqslant \int_I |\varphi'(x)|\,dx.$$

Тогда существует последовательность вложенных кубов K_j таких, что длины ребер K_j стремятся к нулю и

$$q|\varphi(K_j)| \geqslant \int_{K_j} |\varphi'(x)|\,dx.$$

Пусть a – общая точка K_j. Пусть $\varepsilon > 0$. Существует окрестность $U(a)$ такая, что при $x \in U(a)$

$$\frac{|\varphi'(a)|}{|\varphi'(x)|} \leqslant 1 + \varepsilon$$

и

$$\|\varphi(x) - \varphi(a) - \varphi'(a)(x-a)\| \leqslant \varepsilon\|x - a\|.$$

Положим $L(x) = \varphi(a) + \varphi'(a)(x-a)$ и $\psi(x) = L^{-1} \circ \varphi(x)$. Заметим, что

$$\|\psi(x) - x\| \leqslant \varepsilon C\|x - a\|,$$

где число C зависит только от $\varphi'(a)$.

Пусть теперь $K_j \subset U(a)$ и θ_j – длина ребра K_j. Для всякой точки $x \in K_j$ верна оценка $\|\psi(x) - x\| \leqslant \varepsilon C\sqrt{n}\theta_j$. Тогда множество $\psi(K_j)$ лежит в кубе J_j, который получен из K_j удлинением ребер на $2\varepsilon C\sqrt{n}\theta_j$. В частности,

$$|J_j| = (1 + 2\varepsilon C\sqrt{n})^n |K_j|.$$

Так как

$$\varphi(K_j) = L(\psi(K_j)) \subset L(J_j),$$

то

$$|\varphi(K_j)| \leqslant |\varphi'(a)||J_j| = (1 + 2\varepsilon C\sqrt{n})^n |\varphi'(a)||K_j|.$$

Здесь мы считали уже известным то, как изменяется объем куба при сдвиге и линейном преобразовании. Заметим, что

$$|\varphi'(a)||K_j| \leqslant (1+\varepsilon)\int_{K_j} |\varphi'(x)|\,dx.$$

Окончательно получаем неравенство:

$$|\varphi(K_j)| \leqslant (1+\varepsilon)(1 + 2\varepsilon C\sqrt{n})^n \int_{K_j} |\varphi'(x)|\,dx,$$

которое при достаточно малом ε противоречит неравенству

$$q|\varphi(K_j)| \geqslant \int_{K_j} |\varphi'(x)|\,dx.$$

$\square$

Важным следствием доказанной теоремы является независимость объема (и интеграла) от выбора системы координат в $\mathbb{R}^n$.

8. Теорема Брауэра и теорема о «еже».

Теорема 8.1. (Брауэр) *Пусть $\overline{B}$ – замкнутый единичный шар и $f\colon \overline{B} \to \overline{B}$ – непрерывное отображение. Тогда существует неподвижная точка, т.е. такая точка $x \in \overline{B}$, что $f(x) = x$.*

Доказательство. 1. Можно считать, что f – гладкое отображение. Действительно, существует последовательность гладких отображений g_n таких, что $g_n(\overline{B}) \subset \overline{B}$ и g_n равномерно на $\overline{B}$ сходятся к f. Если для гладких отображений теорема Брауэра уже доказана, то мы уже знаем, что у g_n существуют неподвижные точки x_n. Переходя к подпоследовательности можно считать, что $x_n \to x$. Тогда

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} g_n(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x).$$

2. Если теорема Брауэра неверна, то существует гладкое в окрестности $\overline{B}$ отображение F такое, что $F\colon \overline{B} \to \partial\overline{B}$ и $F(x) = x$ на $\partial\overline{B}$. Действительно, если у f нет неподвижной точки в $\overline{B}$, то искомое отображение задается равенством

$$F(x) = x - \lambda(x)(x - f(x)),$$

где

$$\lambda(x) = \frac{-\langle x, x - f(x)\rangle + \sqrt{\langle x, x - f(x)\rangle^2 + (1 - \|x\|^2)\|x - f(x)\|^2}}{\|x - f(x)\|^2}.$$

3. Покажем, что не существует гладкое в окрестности $\overline{B}$ отображение F такое, что $F\colon \overline{B} \to \partial\overline{B}$ и $F(x) = x$ на $\partial\overline{B}$. Предположим противное. Пусть такое отображение F есть. При $t \in [0,1]$ определим отображение F_t равенством

$$F_t(x) = (1-t)x + tF(x).$$

Заметим, что при достаточно малом t отображение F_t инъективно и матрица Якоби $F_t'(x)$ невырождена. Следовательно, F_t диффеоморфно отображает некоторую окрестность U шара $\overline{B}$ на открытое множество $f(U)$. Более того, $F_t(B) = B$. Вложение $F_t(B) \subset B$ очевидно в силу неравенств $\|F_t(x)\| \leqslant (1-t)\|x\| + t\|F(x)\| \leqslant 1$. Кроме того, $F_t(B)$ – открытое и замкнутое множество в B.

По формуле замены переменных имеет место равенство:

$$|F_t(B)| = \int_B |F_t'(x)|\,dx.$$

Заметим, что интеграл от $|F_t'(x)|$ является некоторым многочленом $P(t)$. Мы показали, что при малых t этот многочлен совпадает с константой $|B|$. С другой стороны $P(1) = 0$ так как $|F'(x)| = 0$ для всех $x \in B$. Противоречие. □

Следствие 8.1. *Пусть K – компакт, гомеоморфный шару $\overline{B}$, и $f\colon K \to K$ – непрерывное отображение. Тогда существует точка $x \in K$ такая, что $f(x) = x$.*

Теорема 8.2. («О ЕЖЕ») *Пусть*

$$S^{2n} = \Big\{x \in \mathbb{R}^{2n+1}\colon\ x_1^2 + \ldots + x_{2n+1}^2 = 1\Big\}$$

и $V(x) = (V_1(x), \ldots, V_{2n+1}(x))$ – гладкое векторное поле на S^{2n}, т.е. V_i – гладкие в окрестности S^{2n} функции и $\langle V(x), x\rangle = 0$ при $x \in S^{2n}$. Тогда существует $x \in S^{2n}$ такое, что $V(x) = 0$.

Доказательство. Предположим противное. Тогда $V \neq 0$ на S^{2n} и можно рассмотреть новое векторное поле: $W(x) = V(x)/\|V(x)\|$. При $t \in [0,1]$ положим

$$F_t(x) = x + tg(x), \quad g(x) = \|x\| W(x/\|x\|).$$

Обозначим через S_r – сферу радиуса r и через $V_{a,b}$ – сферический слой $\{x\colon a < \|x\| < b\}$. Так как

$$\|F_t(x)\|^2 = \|x\|^2(1+t^2),$$

то $F_t(S_r) \subset S_{r\sqrt{1+t^2}}$. Кроме того, при достаточно малом t отображение F_t из $V_{a,b}$ в $F_t(V_{a,b})$ является диффеоморфизмом. Так как множество $F_t(S_r)$ одновременно открыто и замкнуто в $S_{r\sqrt{1+t^2}}$, то $F_t(S_r) = S_{r\sqrt{1+t^2}}$. Следовательно, $F_t(V_{a,b}) = V_{\sqrt{1+t^2}a,\sqrt{1+t^2}b}$. По формуле замены переменных

$$(1+t^2)^{(2n+1)/2}|V_{a,b}| = |V_{\sqrt{1+t^2}a,\sqrt{1+t^2}b}| = \int_{V_{a,b}} |F_t'(x)|\,dx.$$

Однако, последний интеграл является многочленом по t, что невозможно. □

9. Несобственный интеграл Римана.

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$ – произвольное множество, например может быть $E = \mathbb{R}^n$. Последовательность допустимых множеств $\{E_n\}$ называется исчерпанием E, если $E_n \subset E_{n+1}$ и $E = \bigcup_n E_n$.

Пусть $f\colon E \to \mathbb{R}$. Если для всякого исчерпания $\{E_n\}$ множества E такого, что f интегрируема на всяком множестве E_n, существует конечный предел

$$\lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f(x)\,dx$$

и значение этого предела не зависит от выбора исчерпания, то этот предел называют несобственным интегралом Римана, обозначают через

$$\int_E f(x)\,dx$$

и говорят, что f интегрируема по Риману в несобственном смысле на E.

Лемма 9.1. *Пусть E – допустимое множество, а $\{E_n\}$ – исчерпание E. Тогда*

$$\lim_{n\to\infty} |E_n| = |E|.$$

Теорема 9.1. *Если E – допустимое множество, f – интегрируема на E и $\{E_n\}$ – исчерпание E, то*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f(x)\,dx = \int_E f(x)\,dx.$$

Таким образом, в этом случае несобственный интеграл совпадает с обычным интегралом Римана по допустимому множеству.

Доказательство. Пусть $M = \sup_E |f|$. Имеем

$$\Big|\int_E f\,dx - \int_{E_n} f\,dx\Big| = \Big|\int_{E\setminus E_n} f\,dx\Big| \leqslant M(|E| - |E_n|) \to 0.$$

□

Для обоснования интегрируемости в несобственном смысле неотрицательной функции достаточно проверить лишь существование предела по одному исчерпанию.

Теорема 9.2. *Пусть $f \geqslant 0$ на E и для некоторого исчерпания $\{E_n\}$ множества E существует конечный предел*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f(x)\,dx.$$

Тогда f интегрируема на E.

Доказательство. Пусть $\{D_n\}$ – еще одно исчерпание множества E. Заметим, что для каждого m множества $D_m \cap E_n$ исчерпывают множество D_m и по доказанному выше

$$\int_{D_m} f\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_{D_m\cap E_n} f\,dx \leqslant \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f\,dx.$$

Последовательность интегралов f по D_m не убывает и ограниченная сверху. Следовательно,

$$\lim_{m\to\infty} \int_{D_m} f\,dx \leqslant \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f\,dx.$$

Меняя местами D_m и E_n получаем неравенство в другую сторону. Таким образом, по всякому исчерпанию предел существует и этот предел не зависит от исчерпания. □

Следствие 9.1. *Предположим, что у функций f и g одинаковый набор допустимых подмножеств E, на которых они интегрируемы, и $|f| \leqslant g$. Если несобственный интеграл от g по E сходится, то сходится несобственный интеграл от f и от $|f|$ по множеству E.*

Наконец отметим, что в случае, когда f и $|f|$ имеют одинаковый набор допустимых подмножеств E, на которых они интегрируемы, то f интегрируема в несобственном смысле по E тогда и только тогда, когда $|f|$ интегрируема в несобственном смысле по E.

10. Сигма-алгебра и мера.

Пусть X – непустое множество. Набор $\mathcal{A}$ подмножеств множества X, содержащий $\varnothing$, X и замкнутый относительно операции пересечения, объединения и разности, называется *алгеброй.* Если дополнительно $\mathcal{A}$ замкнуто относительно счетных пересечений и объединений, то $\mathcal{A}$ называется *σ-алгеброй.*

Примеры:

1) $\{\varnothing, X\}$, 2^X, $\{\varnothing, X, B, X\setminus B\}$ – сигма-алгебры.

2) { все конечные объединения промежутков, лежащих в отрезке $[a,b]$ }, { конечные подмножества и дополнения к конечным подмножествам $\mathbb{N}$ } – алгебры, но не сигма-алгебры.

Пусть S – некоторый набор подмножеств X. Наименьшая по включению сигма-алгебра, содержащая S, называется сигма-алгеброй, порожденной набором S, и обозначается через $\sigma(S)$. Например, если $S = \{B\}$, то $\sigma(S) = \{\varnothing, X, B, X\setminus B\}$.

Важнейшим примером сигма-алгебры является *борелевская* сигма-алгебра. Пусть X – метрическое пространство. Борелевской сигма-алгеброй $\mathcal{B}(X)$ называется сигма-алгебра, порожденная всеми открытыми множествами.

Полезно иметь ввиду, что $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ порождается также всеми открытыми шарами, всеми замкнутыми шарами, всеми открытыми кубами, всеми замкнутыми кубами, всеми компактами.

Пусть теперь на X задана сигма-алгебра $\mathcal{A}$.

Функция $\mu\colon \mathcal{A} \to [0,+\infty)$ такая, что

$$\mu(\bigcup_j A_j) = \sum_j \mu(A_j)$$

для всех $A_j \in \mathcal{A}$, $A_i \bigcap A_j = \varnothing$, называется сигма-аддитивной неотрицательной *мерой.* В некоторых случаях приходится допускать бесконечные значения μ. Каждый такой случай будет оговариваться отдельно, а без дополнительных указаний мы всегда считаем меру конечной.

Рассмотрим пример. Пусть $p_k \geqslant 0$ и $\sum_k p_k < \infty$. Для всякого $A \subset \mathbb{N}$ положим

$$\mu(A) = \sum_{k\in A} p_k.$$

Несложно проверить, что это сигма-аддитивная мера на $2^{\mathbb{N}}$. Другой простой пример – мера Дирака: $\delta_a(A) = 1$ при $a \in A$ и $\delta_a(A) = 0$ при $a \notin A$.

Предложение 10.1. *Если $A_k \in \mathcal{A}$, $A_k \subset A_{k+1}$ и $A = \cup_k A_k$, то*

$$\lim_{k\to\infty} \mu(A_k) = \mu(A).$$

Аналогичное утверждение верно для пересечения последовательности вложенных в друг друга множеств.

Доказательство. Пусть $C_1 = A_1$, $C_k = A_k \setminus A_{k-1}$.

$$\mu(A) = \sum_j \mu(C_j) = \lim_{k\to\infty} \sum_{j\leqslant k} \mu(C_j) = \lim_{k\to\infty} \mu(A_k).$$

□

Так как мы будем рассматривать в основном меры, определенные на борелевской сигма-алгебре, то полезно иметь ввиду следующее утверждение.

Теорема 10.1. *Пусть X – метрическое пространство и μ – сигма-аддитивная мера на борелевской сигма-алгебре $\mathcal{B}(X)$. Для всякого борелевского множества E и всякого $\varepsilon > 0$ существуют замкнутое множество F_ε и открытое множество U_ε такие, что*

$$F_\varepsilon \subset E \subset U_\varepsilon, \quad \mu(U_{\varepsilon\setminus F_\varepsilon}) < \varepsilon.$$

Доказательство. Это утверждение выполнено для замкнутого множества E. В этом случае $F_\varepsilon = E$, а для построения U_ε достаточно заметить, что $E^{1/n} = \bigcup_{x\in E} B(x, 1/n)$ – открытые множества и $\bigcap_n E^{1/n} = E$. Остается заметить, что семейство множеств, для которых выполняется условие теоремы, является сигма алгеброй и, следовательно, содержит все борелевские множества. □

Следствие 10.1. *Если две сигма аддитивные меры, определенные на борелевской сигма-алгебре, совпадают на открытых множествах, то они совпадают на всех борелевских множествах.*

Обсудим универсальный способ построения мер.

Функция $\nu\colon 2^X \to [0, +\infty]$ называется *внешней мерой*, если $\nu(\varnothing) = 0$, $A \subset B \Rightarrow \nu(A) \leqslant \nu(B)$ и $\nu(\bigcup_n A_n) \leqslant \sum_n \nu(A_n)$.

Множество E называется ν–измеримым, если для всякого множества A верно равенство

$$\nu(A \bigcap E) + \nu(A \setminus E) = \nu(A).$$

Набор измеримых множеств обозначаем через $\mathcal{A}_\nu$.

Теорема 10.2. *$\mathcal{A}_\nu$ является сигма-алгеброй и ν – сигма-аддитивная мера (возможно с бесконечными значениями) на $\mathcal{A}_\nu$. Кроме того, A_ν содержит все множества, внешняя мера которых равна нулю.*

Предложение 10.2. *Пусть X – метрическое пространство и ν – внешняя мера на X. Если для всяких множеств A и B таких, что $\inf_{x\in A, y\in B} |x - y| > 0$, верно равенство $\nu(A \cup B) = \nu(A) + \nu(B)$, то $\mathcal{A}_\nu$ содержит все борелевские множества.*

Рассмотрим два важных примера.

Мера Лебега

Пусть $X = \mathbb{R}^n$ с обычной евклидовой метрикой. Верхняя мера Лебега задается равенством

$$\lambda_n^*(A) = \inf\Bigl\{\sum_{j=1}^{\infty}|I_j|:\ A\subset\bigcup_{j=1}^{\infty}I_j\Bigr\},$$

где inf берется по всем покрывающим A конечным или счетным наборам параллелепипедов I_j с параллельными осям координат ребрами.

Предложение 10.3. *Внешняя мера Лебега действительно является внешней мерой и для всяких множеств A и B таких, что $\inf_{x\in A, y\in B}|x-y|>0$, верно равенство $\nu(A\cup B)=\nu(A)+\nu(B)$.*

Доказательство. Пусть $d(A,B)=\delta>0$. Поскольку всякий параллелепипед можно разбить на параллелепипеды с диаметром меньше $\delta/2$ так, что сумма их объемов равна объему исходного параллелепипеда, то в определении λ^* можно рассматривать только покрытия параллелепипедами с диаметрами меньше $\delta/3$. Ясно, что всегда можно оставить лишь параллелепипеды, имеющие непустое пересечение с множеством, меру которого мы вычисляем. Остается заметить, что всякое покрытия множества $A\bigcup B$ распадается на два покрытия множеств A и B по отдельности. Действительно, один параллелепипед диаметра меньше $\delta/3$ не может пересекать A и B одновременно. Следовательно, $\lambda^*(A\bigcup B)\geqslant\lambda^*(A)+\lambda^*(B)$. Обратное неравенство очевидно. □

Таким образом, на сигма-алгебре измеримых множеств (по Лебегу), которые включают в себя все борелевские множества, внешняя мера Лебега является сигма-аддитивной мерой, которую уже называют просто мерой Лебега и обозначают через λ_n.

Отметим, что прямо из определения следует равенство $\lambda(I)=|I|$ для параллелепипеда I со сторонами, параллельными осям координат.

Предложение 10.4. *Всякое допустимое (измеримое по Жордану) множество E измеримо по Лебегу и $|E|=\lambda(E)$.*

Доказательство. Так как E есть объединение открытого множества своих внутренних точек и некоторого подмножества границы, т.е. некоторого множества меры нуль, то E – измеримое по Лебегу множество. Можно считать, что E замкнуто. Впишем E в некоторый брус I и устроим последовательность разбиений $\mathbb{T}_N=\{I_m^N\}$ таких, что $\mathbb{T}_{N+1}$ получается разбиением брусков из $\mathbb{T}_N$. Согласно критерию интегрируемости по Риману

$$|E|=\lim_{N\to\infty}\sum_m\sup_{I_m^N}\chi_E(x)|I_m^N|.$$

Пусть Q_N – объединение таких I_m^N, что $I_m^N\cap E\neq\varnothing$. Тогда $|E|=\lim_{N\to\infty}|Q_N|$. С другой стороны, $Q_{N+1}\subset Q_N$ и $E=\cap_N Q_N$. Следовательно, $\lambda_n(E)=\lim_{N\to\infty}\lambda_n(Q_N)$. Остается заметить, что $\lambda_n(Q_N)=|Q_N|$. □

Предложение 10.5. *Пусть $L(x)=Ax+b$. Тогда для всякого борелевского множества E имеет место равенство:*

$$\lambda_n(L(E))=|\mathrm{det}A|\lambda_n(E).$$

Доказательство. Пусть $\mathrm{det}A=0$. Тогда $L(E)$ лежит в плоскости, размерности меньше n, т.е. в множестве меры нуль по Лебегу. Пусть теперь $\mathrm{det}A\neq 0$. Заметим, что $L(E)$ – борелевское множество. Действительно, набор множеств E таких, что $L(E)$ – борелевское, является сигма-алгеброй (здесь важно, что $L(E_1\cap E_2)=L(E_1)\cap L(E_2)$, $L(E_1\cup E_2)=L(E_1)\cup L(E_2)$,

$L(E_1 \setminus E_2) = L(E_1) \setminus L(E_2))$. Так как меры $E \to \lambda_n(L(E))$ и $E \to \det A \lambda_n(E)$ совпадают на кубах и множествам меры нуль по Лебегу сопоставляют нуль, то эти меры совпадают на всех открытых множествах. Следовательно, они совпадают на всех борелевских множествах. □

Мера Хаусдорфа

Пусть $n \in \mathbb{N}$. Зафиксируем число $\alpha \in (0, n]$. Для всякого множества A в $\mathbb{R}^n$ его внешняя α-мера Хаусдорфа $H^\alpha(A)$ задается так. Сначала при фиксированном $\delta > 0$ положим

$$H^\alpha_\delta(A) = \inf\Big\{\sum_{k=1}^\infty |\mathrm{diam}\, F_k|^\alpha,\ A \subset \bigcup_{k=1}^\infty F_k,\ \mathrm{diam}\, F_k \leqslant \delta\Big\},$$

где inf берется по всем счетным покрытиям A замкнутыми множествами диаметра не более δ. Существует (возможно, бесконечный) предел

$$H^\alpha(A) := \lim_{\delta \to 0} H^\alpha_\delta(A).$$

Предложение 10.6. *H^s – является внешней мерой, все борелевские множества измеримы относительно этой меры и эта мера инвариантна относительно сдвигов и ортогональных преобразований.*

Меру H^s называют мерой Хаусдорфа. Из определения очевидно, что в одномерном случае мера Хаусдорфа H^1 совпадает с λ_1.

Предложение 10.7. (i) *$H^n(E) = 0$ тогда и только тогда, когда $\lambda_n(E) = 0$.*
(ii) *$0 < H^n([0,1]^n) < \infty$.*

Следствие 10.2. *На борелевской сигма–алгебре H^n и λ_n пропорциональны.*

Доказательство. Выбираем число C так, что $H^n([0,1]^n) = C\lambda_n([0,1]^n)$. Так как обе меры не меняются при ортогональных преобразованиях и сдвигах, то они совпадают на всех кубах с рациональными координатами вершин. Следовательно, они совпадают на всех открытых множествах. □

Можно показать (но это довольно трудно), что константа C равна $\omega_n 2^n$, где ω_n – объем единичного шара. Далее считаем, что H^α умножена на число

$$\frac{\pi^{\alpha/2}}{2^\alpha \Gamma(1 + \alpha/2)}.$$

Предложение 10.8. *Пусть $L(x) = Ax$ – линейное отображение из $\mathbb{R}^k$ в $\mathbb{R}^n$, причем $\mathrm{rk} A = k \leqslant n$. Для всякого борелевского множества B верно равенство:*

$$H^k(L(B)) = \sqrt{\det(A^*A)}\lambda_k(B).$$

Доказательство. Достаточно заметить, что $L(x) = (UC_kS)x$, где S – симметричная, положительно определенная матрица $k\times k$, причем $\det S = \sqrt{\det(A^*A)}$, $C_k(x) = (x_1, \ldots, x_k, 0, 0, \ldots, 0)$, U – ортогональная матрица. □