Программа коллоквиума по курсу математического анализа
II курс, осенний семестр 2018 года
лектор С.В.Шапошников

(1) Числовой ряд. Признаки Даламбера и Коши. Критерий Коши. Абсолютная и условная сходимость числового ряда. Ряд Лейбница.
(2) Бесконечные произведения. Необходимые и достаточные условия сходимости. Разложение синуса и косинуса в бесконечные произведения.
(3) Признак Гаусса сходимости ряда и формула Стирлинга.
(4) Преобразование Абеля. Признаки Абеля и Дирихле сходимости числового ряда.
(5) Перестановка членов ряда. Теорема Римана и теорема Коши.
(6) Теорема Коши, теорема Мертенса и теорема Абеля о произведении рядов.
(7) Несобственный интеграл Римана. Свойства несобственного интеграла Римана. Интегральный признак сходимости ряда. Формула Эйлера.
(8) Критерий Коши. Абсолютная и условная сходимость несобственного интеграла. Интегрирование по частям. Признаки Абеля и Дирихле.
(9) Гамма и бета функции Эйлера и их свойства: формулы понижения, формула Эйлера-Гаусса, формула дополнения, формула, выражающая бета функцию через гамма функцию. Вычисление интеграла Пуассона.
(10) Метод Лапласа. Асимптотика интеграла Лапласа. Асимптотика гамма функции.
(11) Поточечная и равномерная сходимость функциональных последовательностей: простейшие свойства и критерий Коши.
(12) Перестановочность пределов. Непрерывность равномерного предела непрерывных функций. Полнота пространства непрерывных и ограниченных функций.
(13) Конечная ε-сеть. Критерий компактности Хаусдорфа. Критерий компактности в пространстве ограниченных функций.
(14) Теорема Асколи–Арцела. Теорема Шаудера(без доказательства). Теорема Пеано о существовании решения дифференциального уравнения с непрерывной и ограниченной правой частью.
(15) Перестановочность равномерного предела и интеграла. Теорема Арцела о переходе к пределу под знаком интеграла в случае поточечно сходящейся последовательности функций.
(16) Равномерная сходимость дифференцируемых функций в случае равномерной сходимости их производных.
(17) Равномерная сходимость функциональных рядов. Необходимое условие. Критерий Коши. Признак Вейерштрасса.
(18) Признак Дини. Равномерная сходимость рядов вида $\sum_n a_n(x)b_n(x)$. Признаки Абеля–Дирихле.
(19) Степенные ряды. Формула Коши–Адамара. Равномерная сходимость внутри круга сходимости. Теорема Абеля. Интегрирование и дифференцирование степенных рядов.
(20) Методы суммирования Пуассона–Абеля и Чезаро.

Задачи

1. Пусть p_n – последовательно занумерованные простые числа. Докажите, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{n=1}^{\infty}\Big(1 - \frac{1}{p_n^s}\Big)^{-1}.$$

2. Пусть числа a_n^m таковы, что $A_m = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n^m| < \infty$ и для всякой ограниченной последовательности b_n величины $B_m = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^m b_n$ стремятся к нулю при $m \to \infty$. Докажите, что $A_m \to 0$ при $m \to \infty$.

3. Пусть 1-периодическая функция f интегрируема по Риману на $[0,1]$. Докажите, что последовательность функций $f_n(x) = n^{-1}\sum_{k=1}^{n} f(x + k/n)$ сходится равномерно на $[0,1]$ к константе, равной интегралу от f по отрезку $[0,1]$.

4. Предположим, что $\{a_n\}$ – монотонно убывающая последовательность положительных чисел. Докажите, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx)$ сходится на $\mathbb{R}$ равномерно тогда и только тогда, когда $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$.

5. Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится равномерно на отрезке $[0,1]$. Верно ли, что найдутся такие функции $a_n(x)$ и $b_n(x)$, что $f_n(x) = a_n(x)b_n(x)$, $a_n(x)$ равномерно стремится к нулю и при каждом $x \in [0,1]$ является монотонной последовательностью, частичные суммы $\sum_{n=1}^{N} b_n(x)$ равномерно ограничены?

6. (Теорема Таубера) Пусть ряд $\sum_n a_n$ суммируем методом Пуассона–Абеля к A и

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \ldots + na_n}{n} = 0.$$

Докажите, что $\sum_n a_n = A$.

7. Выведите с помощью метода Лапласа равенство:

$$\Gamma(\lambda+1) = \sqrt{2\pi\lambda}\Big(\frac{\lambda}{e}\Big)^{\lambda}\Big(1 + \frac{1}{12\lambda} + O(\lambda^{-2})\Big), \quad \lambda \to +\infty,$$

где Γ – гамма функция Эйлера.