

Листок 2

Задача 1. Сходится ли несобственный интеграл по $(-\infty, +\infty)$ от функции

$$f(x) = e^{-x^2} \int_0^x e^{s^2} ds?$$

Задача 2. Пусть $f \in C[0, 1]$ и $F(x) = \int_0^x f(t) dt$. Для всякого $p > 1$ докажите неравенство

$$\int_0^1 \frac{|F(x)|^p}{x^p} dx \leq \frac{p^p}{(1-p)^p} \int_0^1 |f(x)|^p dx.$$

Задача 3. Пусть $f \in C(\mathbb{R})$ и $f > 0$. Известно, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1 \quad \text{и} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{\varepsilon \left| \frac{f'(x)}{f(x)} \right|^2} dx < \infty$$

для некоторого $\varepsilon > 0$. Докажите, что найдутся числа $A, B > 0$ такие, что

$$f(x) \geq A e^{-B|x|^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Задача 4. Докажите, что из последовательности $f_n(x) = \sin nx$ на $[0, 1]$ нельзя выбрать поточечно сходящуюся подпоследовательность.

Задача 5.

(а) Докажите, что из равномерно ограниченной последовательности монотонных функций на $[0, 1]$ можно выбрать поточечно сходящуюся подпоследовательность.

(б) Докажите, что если последовательность монотонных функций на отрезке $[0, 1]$ сходится к непрерывной функции поточечно, то эта последовательность сходится равномерно.