

Листок 1

Задача 1. Пусть F_n – числа Фибоначчи т. е. $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, $F_0 = F_1 = 1$. Найдите сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} F_n 10^{-n}$.

Задача 2. Пусть $a_n \rightarrow 0$ и $\sum_n |a_n| = +\infty$. Докажите, что для всякого числа A существует такая последовательность w_n из 1 и 2, что $\sum_n (-1)^{w_n} a_n = A$.

Задача 3. Приведите пример ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ такого, что для всякого числа A существует возрастающая последовательность номеров n_k , для которой ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}} a_j \right)$$

сходится к числу A .

Задача 4. Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Верно ли, что

(а) сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$, (б) сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3$?

Задача 5. Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится и $a_n > 0$. Докажите, что найдется такая неубывающая последовательность c_n , что $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = +\infty$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n c_n$ сходится.