КРАТКИЙ КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ
(II-Й КУРС, ОСЕННИЙ СЕМЕСТР)
ЛЕКТОР С.В. ШАПОШНИКОВ

«Снова нас ведут куда-то,
И не ясен нам маршрут.
Видно, горы виноваты -
Не сидим ни там, ни тут.
Снова в горы и по тропам
С рюкзаками за спиной.
Груз под силу лишь циклопам!
Мама, я хочу домой!»
Ю.Визбор и М.Левин   Мама, я хочу домой.

## 1. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ И БЕСКОНЕЧНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ.

Пусть $\{a_n\}$ – числовая последовательность. Выражение $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называют числовым рядом. Сумму первых $N$ слагаемых $S_N = a_1 + \ldots + a_N$ называют частичной суммой ряда. Если существует конечный предел

$$\lim_{N\to\infty} S_N,$$

то говорят, что ряд сходится и этот предел называют суммой ряда и обозначают через $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Если указанный предел равен бесконечности или не существует, то говорят, что ряд расходится.

**Предложение 1.1.** *Если ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится, то* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

*Доказательство.* Пусть $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. По определению $a_N = S_N - S_{N-1} \to S - S = 0$. □

**Предложение 1.2.** (i) *Отбрасывание конечного числа слагаемых не влияет на сходимость ряда.*

(ii) *Пусть $n_k$ – возрастающая последовательность натуральных чисел. Если ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится, то сходится сгруппированный ряд*

$$\sum_k \Big( \sum_{s=n_k+1}^{n_{k+1}} a_s \Big).$$

(iii) *Пусть $n_k$ – возрастающая последовательность натуральных чисел, причем*

$$n_k - n_{k-1} \leqslant L$$

*для всех $k$ и некоторого $L$. Если $a_n \to 0$ и сгруппированный ряд* $\sum_k \Big( \sum_{s=n_k+1}^{n_{k+1}} a_s \Big)$ *сходится, то ряд* $\sum_n a_n$ *сходится.*

*Доказательство.* Докажем только (iii). Пусть $n_k \leqslant N < n_{k+1}$. Тогда

$$S_N = a_1 + \ldots + a_N = \sum_{i=1}^{k} \Big( \sum_{s=n_i+1}^{n_{i+1}} a_s \Big) - (a_{N+1} + \ldots + a_{n_{k+1}}).$$

Число слагаемых с номерами от $N+1$ до $n_{k+1}$ не превосходит $L$. Если $N$ столь велико, что $|a_n| < \varepsilon$ при $n > N$, то

$$|a_{N+1} + \ldots + a_{n_{k+1}}| < \varepsilon L.$$

Следовательно, предел $S_N$ при $N \to \infty$ совпадает с пределом частичных сумм сгруппированного ряда. □

Заметим, что в утверждении пункта (iii) нельзя убрать условие $a_n \to 0$. Действительно, из сходимости ряда $(1-1)+(1-1)+\ldots$ не следует сходимость ряда $1+(-1)+1+(-1)+\ldots$. Кроме того, нельзя убрать условие $n_k - n_{k-1} \leqslant L$. Рассмотрим ряд

$$1+\frac{1}{2}+\frac{-1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{-1}{4}+\frac{-1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots$$

Этот ряд не сходится так как $S_N$ для сколь угодно больших $N$ может равняться 0 и может равняться 1/2. Ясно, что разрешив группировку произвольного числа слагаемых, можно составить ряд из нулей.

**Предложение 1.3.** (Критерий Коши) *Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится тогда и только тогда, когда для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $N$ такое, что для всех $n, m > N$*

$$\Big|S_n - S_m\Big| = \Big|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\Big| < \varepsilon.$$

*Доказательство.* Это просто переформулировка критерия Коши сходимости числовой последовательности. □

Ряд $\sum_n a_n$ сходится абсолютно, если сходится ряд $\sum_n |a_n|$.

**Следствие 1.1.** *Если ряд сходится абсолютно, то ряд сходится.*

Если ряд сходится, но не сходится абсолютно, то говорят, что он сходится условно.

Особенно просто исследовать сходимость числовых рядов в случае неотрицательных слагаемых.

**Предложение 1.4.** *Пусть $a_n \geqslant 0$. Ряд $\sum_n a_n$ сходится тогда и только тогда, когда последовательность его частичных сумм ограничена.*

*Доказательство.* Утверждение следует из теоремы Вейерштрасса о сходимости монотонной и ограниченной последовательности. □

**Следствие 1.2.** *Пусть $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$. Из сходимости ряда $\sum_n b_n$ следует сходимость ряда $\sum_n a_n$, а из расходимости ряда $\sum_n a_n$ следует расходимость ряда $\sum_n b_n$.*

Если сравнивать числовой ряд с суммой бесконечной геометрической прогрессии $\sum_n q^n$, то несложно получить следующие признаки сходимости.

**Предложение 1.5.** (i) (Признак Коши) *Пусть $a_n \geqslant 0$ и $\limsup \sqrt[n]{a_n} = q$. Если $q < 1$, то ряд $\sum_n a_n$ сходится. Если $q > 1$, то ряд $\sum_n a_n$ расходится.*

(ii) (Признак Даламбера) *Пусть $a_n > 0$. Если $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, то ряд $\sum_n a_n$ сходится. Если $\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, то ряд $\sum_n a_n$ расходится.*

Путь $\{b_n\}$ – числовая последовательность. Выражение

$$\prod_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots$$

называют бесконечным произведением. Произведение первых $N$ множителей

$$\Pi_N = \prod_{n=1}^{N} b_n$$

называют частичным произведением. Если существует конечный и отличный от нуля предел

$$\lim_{N\to\infty} \Pi_N,$$

то говорят, что произведение сходится, а сам предел обозначают через $\prod_{n=1}^{\infty} b_n$. В остальных случаях говорят, что произведение расходится.

**Предложение 1.6.** *Если произведение сходится, то $b_n \to 1$ при $n \to \infty$.*

*Доказательство.*

$$b_N = \frac{\Pi_N}{\Pi_{N-1}} \to 1.$$

□

**Предложение 1.7.** *Пусть $b_n > 0$. Произведение $\prod_n b_n$ сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд $\sum_n \ln b_n$ и в случае сходимости*

$$e^{\sum_n \ln b_n} = \prod_n b_n.$$

*Доказательство.* Достаточно заметить, что

$$e^{\sum_{n=1}^{N} \ln b_n} = \Pi_N, \quad \sum_{n=1}^{N} \ln b_n = \ln \Pi_N$$

и воспользоваться непрерывностью экспоненты и логарифма. □

Необходимым условием сходимости произведения является стремление множителей к единице, что можно записать так

$$b_n = 1 + \beta_n, \quad \beta_n \to 0.$$

Вспомним теперь, что $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$. Следовательно, из сходимости ряда $\sum_n |\beta_n|$ следует сходимость ряда $\sum_n \ln(1+\beta_n)$ и, значит, сходимость произведения $\prod_n b_n$. Если все числа $\beta_n$ одного знака (все $\geqslant 0$ или все $\leqslant 0$), то из сходимости произведения следует сходимость ряда $\sum_n \beta_n$.

## 2. Признак Гаусса и формула Стирлинга.

**Лемма 2.1.** *Пусть $b_n > 0$ и*

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = 1 + \beta_n.$$

*Если сходится ряд $\sum_n |\beta_n|$, то существует предел $\lim b_n$.*

*Доказательство.* Достаточно заметить, что

$$b_n = b_1 \frac{b_2}{b_1} \frac{b_3}{b_2} \cdots \frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{b_1}{\prod_{k=1}^{n-1} (1+\beta_n)}.$$

□

**Теорема 2.1.** (Признак Гаусса) *Если $a_n > 0$ и*

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 - \frac{p}{n} + \alpha_n, \quad \sum_n |\alpha_n| < \infty,$$

*то для некоторого $C \neq 0$*

$$a_n \sim \frac{C}{n^p},$$

*в частности, ряд $\sum_n a_n$ сходится тогда и только тогда, когда $p > 1$.*

*Доказательство.* Достаточно применить лемму с $b_n = a_n n^{-p}$:

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = \left(1 - \frac{p}{n} + \alpha_n\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right)^p = 1 + \beta_n, \quad \sum_n |\beta_n| < \infty.$$

□

Аналогичные рассуждения позволяют установить формулу Стирлинга, описывающую поведение $n!$. Сначала заметим, что

$$\ln n! = \ln 2 + \ldots + \ln n = \frac{1}{2}(\ln 1 + \ln 2) + \frac{1}{2}(\ln 2 + \ln 3) + \ldots + \frac{1}{2}(\ln(n-1) + \ln n) + \frac{1}{2}\ln n.$$

Число $\frac{1}{2}(\ln(k-1) + \ln k)$ равно площади трапеции под графиком $y = \ln x$, образованной хордой, которая соединяет точки $(k-1, \ln(k-1))$ и $(k, \ln k)$. Сумма площадей этих трапеций оценивается сверху площадью под графиком:

$$\frac{1}{2}(\ln 1 + \ln 2) + \frac{1}{2}(\ln 2 + \ln 3) + \ldots + \frac{1}{2}(\ln(n-1) + \ln n) \leqslant \int_1^n \ln x\, dx = n\ln n - n + 1.$$

Следовательно, приходим к оценке $\ln n! \leqslant n\ln n - n + 1 + \frac{1}{2}\ln n$ и

$$n! \leqslant n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n+1}.$$

Оказывается, что эта оценка достаточно точно описывает поведение $n!$.

**Предложение 2.1.** *Существует конечный отличный от нуля предел*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}}.$$

*Доказательство.* Положим

$$b_n = \frac{n!}{n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}}.$$

Имеем

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^{n+1/2} e^{-1} = 1 + \frac{1}{12n^2} + o(\frac{1}{n^2}).$$

Следовательно, выполняются условия леммы и у последовательности $b_n$ существует конечный предел. □

Итак, мы установили, что

$$n! \sim C n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}.$$

Теперь вычислим константу $C$. Для этого получим формулу Валлиса. Рассмотрим выражение

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x\, dx.$$

Несложно видеть, что

$$I_n = -\int_0^{\pi/2} \sin^{n-1} x\, d\cos x = (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x (1 - \sin^2 x)\, dx.$$

Следовательно, верно равенство

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

Полагая $I_0 = \pi/2$ и $I_1 = 1$ выводим формулы

$$I_{2n} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}, \quad I_{2n+1} = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}.$$

Так как $I_{2n-1} \leqslant I_{2n} \leqslant I_{2n+1}$, то

$$\frac{(2^{n-1}(n-1)!)^2}{(2n-1)!} \leqslant \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \leqslant \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}.$$

Последние неравенства можно переписать так

$$1 + \frac{1}{2n} \leqslant \frac{\pi}{2} \cdot \Big(\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\Big)^2 (2n+1) \leqslant 1.$$

Таким образом, мы вывели формулу Валлиса:
$$\lim_{n\to\infty}\Big(\frac{(2^n n!)^2}{(2n)!}\Big)^2\frac{1}{2n+1}=\frac{\pi}{2}.$$
Подставляя в эту формулу выражение для факториала с неизвестной константой $C$, находим
$$C=\sqrt{2\pi}.$$
Теперь мы можем окончательно выписать формулу Стирлинга:
$$n!=\sqrt{2\pi n}n^n e^{-n+\varepsilon_n},\quad \varepsilon_n\to 0.$$
Можно уточнить (но мы этого уже делать не будем), что $\varepsilon_n=\frac{\theta_n}{12n}$, где $0<\theta_n<1$.

## 3. Разложение $\sin x$ в произведение.

**Теорема 3.1.** (Эйлер) *При всех $x\neq \pi n$, $n\in\mathbb{Z}$, имеет место равенство*
$$\sin x = x\prod_{n=1}^{\infty}\Big(1-\frac{x^2}{\pi^2 n^2}\Big).$$

*Доказательство.* Заметим, что $\sin(2N+1)t=\sin t P(\sin^2 t)$, где $P$ – многочлен степени $N$. Вычисляя корни $P$ и раскладывая его на множители, приходим к равенству
$$\sin(2N+1)t=(2N+1)\sin t\prod_{k=1}^{N}\Big(1-\frac{\sin^2 t}{\sin^2\frac{\pi k}{2N+1}}\Big).$$
Сделаем замену $t=x/(2N+1)$:
$$\sin x=(2N+1)\sin\frac{x}{2N+1}\prod_{k=1}^{N}\Big(1-\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{\pi k}{2N+1}}\Big).$$
Пусть $J$ такое натуральное число, что $(J+1)\pi>|x|$. При фиксированном $J$
$$\lim_{N\to\infty}\prod_{k=1}^{J}\Big(1-\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{\pi k}{2N+1}}\Big)=\prod_{k=1}^{J}\Big(1-\frac{x^2}{\pi^2 k^2}\Big).$$
Кроме того, существует предел
$$R_J=\lim_{N\to\infty}\prod_{k=J+1}^{N}\Big(1-\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{\pi k}{2N+1}}\Big).$$
Заметим, что
$$\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{\pi k}{2N+1}}\leqslant\frac{x^2}{4k^2}.$$
Следовательно,
$$\prod_{k=J+1}^{N}\Big(1-\frac{x^2}{4k^2}\Big)\leqslant\prod_{k=J+1}^{N}\Big(1-\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{\pi k}{2N+1}}\Big)\leqslant 1$$
и
$$\prod_{k=J+1}^{N}\Big(1-\frac{x^2}{4k^2}\Big)\leqslant R_J\leqslant 1.$$
Значит $R_J\to 1$ при $J\to\infty$ и мы получаем требуемое разложение. □

**Следствие 3.1.** *Имеет место равенство*
$$\cos x=\prod_{n=1}^{\infty}\Big(1-\frac{4x^2}{(2n-1)^2\pi^2}\Big).$$

## 4. Преобразование Абеля. Признаки Абеля и Дирихле.

Рассмотрим сумму $\sum_{k=n}^{m} a_k b_k$. Положим $B_N = b_1 + \ldots + b_N$ и $B_0 = 0$.

Преобразование

$$\sum_{k=n}^{m} a_k b_k = \sum_{k=n}^{m} a_k (B_k - B_{k-1}) = \sum_{k=n}^{m} a_k B_k - \sum_{k=n}^{m} a_k B_{k-1} = a_m B_m - a_n B_{n-1} - \sum_{k=n}^{m} (a_{k+1} - a_k) B_k.$$

называется преобразованием Абеля и является дискретным аналогом интегрирования по частям.

**Предложение 4.1.** *Если существует конечный предел* $\lim_{n\to\infty} a_n B_n$, *то ряды*

$$\sum_n a_n b_n \quad \text{и} \quad \sum_n (a_{n+1} - a_n) B_n$$

*сходятся и расходятся одновременно.*

*Доказательство.* С помощью преобразования Абеля выводим равенство:

$$\sum_{n=1}^{N} a_n b_n = a_N B_N - \sum_{n=1}^{N} (a_{n+1} - a_n) B_n,$$

из которого немедленно следует наше утверждение. □

**Следствие 4.1.** (Признаки Абеля–Дирихле)

(i) *Если последовательность* $a_n$ *монотонно стремится к нулю, а последовательность* $B_n$ *ограниченна, то ряд* $\sum_n a_n b_n$ *сходится.*

(ii) *Если последовательность* $a_n$ *монотонна и ограниченна, а ряд* $\sum_n b_n$ *сходится, то ряд* $\sum_n a_n b_n$ *сходится.*

*Доказательство.* Обоснуем (i). По условию $a_n B_n \to 0$ и сходимость ряда $\sum_n a_n b_n$ равносильна сходимости ряда $\sum_n (a_{n+1} - a_n) B_n$, который сходится даже абсолютно. Будем считать, что последовательность $a_n$ не возрастает. Ряд $\sum_n |a_{n+1} - a_n|$ сходится, так как

$$\sum_{n=1}^{N} |a_{n+1} - a_n| = \sum_{n=1}^{N} (a_n - a_{n+1}) = a_1 - a_{N+1} \to a_1.$$

Остаётся заметить, что $|(a_{n+1} - a_n) B_n| \leqslant |a_{n+1} - a_n| \sup_n |B_n|$.

Пункт (ii) сводится к (i) переходом от $a_n$ к $a_n - a$, где $a = \lim_{n\to\infty} a_n$. □

Отметим, что признак Лейбница является частным случаем признака Абеля–Дирихле.

**Следствие 4.2.** (Признак Лейбница) *Если последовательность неотрицательных чисел* $a_n$ *не возрастает и стремится к нулю, то ряд* $\sum_n (-1)^n a_n$ *сходится.*

## 5. Перестановка членов ряда. Теорема Коши и теорема Римана.

Для конечных сумм еще со школы известно правило: от перестановки слагаемых сумма не меняется. В случае рядов это правило вообще говоря не работает.

Пусть $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ – биекция. Ряд $\sum_n a_{\varphi(n)}$ называется перестановкой ряда $\sum_n a_n$.

**Теорема 5.1.** (Риман) *Если ряд* $\sum_n a_n$ *сходится условно, то перестановкой его слагаемых можно получить всякую наперед заданную сумму, в том числе* $+\infty$ *и* $-\infty$.

*Доказательство.* Пусть $p_n$ – неотрицательные, а $q_n$ отрицательные слагаемые ряда. Поскольку ряд сходится условно, то $\sum_n p_n = +\infty$ и $\sum_n q_n = -\infty$. Пусть задано некоторое число $A$. Будем составлять новый ряд из $p_n$ и $q_n$ следующим образом. Сначала складываем

$p_1, p_2, \ldots$ до тех пор пока сумма первый раз не превысит $A$. Затем добавляем $q_i$ до тех пор пока сумма не станет меньше $A$ и т.д. Поскольку колебания суммы около числа $A$ каждый раз составляют не более $p_n$ или $q_n$, а $p_n, q_n \to 0$, то новый ряд сходится к $A$. □

Теперь покажем, что для абсолютно сходящихся рядов перестановка слагаемых не меняет суммы.

**Теорема 5.2.** (Коши) *Если ряд $\sum_n a_n$ сходится абсолютно, то для всякой перестановки $\varphi$ новый ряд $\sum_n a_{\varphi(n)}$ сходится абсолютно и $\sum_n a_n = \sum_n a_{\varphi(n)}$.*

*Доказательство.* Докажем сначала сходимость переставленного ряда. Имеет место неравенство:

$$\sum_{n=1}^{N} |a_{\varphi(n)}| \leqslant \sum_{k \leqslant \max_{n \leqslant N} \varphi(n)} |a_k| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|.$$

Следовательно, переставленный ряд сходится. Для всякого $\varepsilon > 0$ найдется номер $N_1$ такой, что

$$\sum_{n \geqslant N_1} |a_n| < \varepsilon.$$

Пусть $J_1$ такой номер, что $\{\varphi(1), \ldots, \varphi(J_1)\} \supset \{1, 2, \ldots, N_1\}$. Для всех $J > J_1$

$$\Big|\sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{k=1}^{J} a_{\varphi(k)}\Big| \leqslant \sum_{n > N_1} |a_n| < \varepsilon$$

□

В качестве применения последней теоремы покажем как перемножать абсолютно сходящиеся ряды.

**Теорема 5.3.** *Если ряды $\sum_n a_n$ и $\sum_n b_n$ сходятся абсолютно, то ряд составленный из всех возможных попарных произведений $a_i b_j$, взятых в произвольном порядке, сходится абсолютно и его сумма равна $(\sum_n a_n) \cdot (\sum_n b_n)$.*

*Доказательство.* Пусть имеется какая-то нумерация пар $(i, j)$. Так как

$$\sum_{n=1}^{N} |a_{i(n)} b_{j(n)}| \leqslant \Big(\sum_{k \leqslant \max_{n \leqslant N} i(n)} |a_k|\Big)\Big(\sum_{k \leqslant \max_{n \leqslant N} j(n)} |b_k|\Big),$$

то ряд из $a_{i(n)} b_{j(n)}$ сходится абсолютно. Следовательно, его сумма не зависит от перестановки слагаемых, т. е. от способа нумерации пар $(i, j)$. Занумеруем эти пары так, что пары $(i(n), j(n))$ при $n \leqslant N^2$ заполняют весь квадрат $\{1, 2, \ldots, N\} \times \{1, 2, \ldots, N\}$. Тогда

$$\sum_{n \leqslant N^2} a_{i(n)} b_{j(n)} = \Big(\sum_{k \leqslant N} a_k\Big)\Big(\sum_{k \leqslant N} b_k\Big),$$

что стремится к $(\sum_n a_n) \cdot (\sum_n b_n)$ при $N \to \infty$. □

## 6. Несобственный интеграл Римана. Признаки Абеля и Дирихле.

Пусть $f$ интегрируема по Риману на всяком отрезке $[a, c] \subset [a, b)$, где $b$ может быть $+\infty$. Положим

$$F(c) = \int_a^c f(x)\,dx.$$

Если существует конечный предел $\lim_{c \to b-} F(c)$, то его называют несобственным интегралом Римана от $f$ по $[a, b)$,обозначают через

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

и говорят, что несобственный интеграл сходится. Если предел $\lim_{c\to b-} F(c)$ не существует или равен бесконечности, то говорят, что несобственный интеграл расходится. Если $f$ интегрируема по Риману на $[a, b]$, то ее несобственный интеграл совпадает с интегралом Римана.

**Предложение 6.1.** (Критерий Коши) *Несобственный интеграл от $f$ по $[a, b)$ сходится тогда и только тогда, когда для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всех $c_1, c_2 \in (b - \delta, b)$*

$$\Bigl|\int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx\Bigr| < \varepsilon.$$

*Доказательство.* Это просто переформулировка критерия Коши существования конечного предела функции. □

Особенно просто исследовать сходимость несобственного интеграла в случае неотрицательной функции $f$.

**Предложение 6.2.** *Если $f \geqslant 0$ на $[a, b)$, то несобственный интеграл от $f$ на $[a, b)$ сходится тогда и только тогда, когда существует число $M > 0$ такое, что*

$$\int_a^c f(x)\,dx \leqslant M \quad \forall c \in [a, b).$$

*Доказательство.* Следует из теоремы Вейерштрасса о существовании предела у монотонной и ограниченной функции. □

**Следствие 6.1.** *Если $0 \leqslant f \leqslant g$ на $[a, b)$, то из сходимости несобственного интеграла от $g$ на $[a, b)$ следует сходимость несобственного интеграла от $f$, а из расходимости несобственного интеграла от $f$ следует расходимость интеграла от $g$.*

**Следствие 6.2.** *Пусть неотрицательная функция $f$ не возрастает на $[1, +\infty)$. Тогда ряд $\sum_n f(n)$ и*

$$\int_1^\infty f(x)\,dx$$

*сходятся и расходятся одновременно.*

*Доказательство.* Определим новые функции $h$ и $g$ следующим образом: на полуинтервале $[k, k+1)$ функция $h$ равна $f(k+1)$, а функция $g$ равна $f(k)$. Тогда $0 \leqslant h \leqslant f \leqslant g$ и

$$\int_1^N h(x)\,dx = \sum_{n=2}^N f(n), \quad \int_1^N g(x)\,dx = \sum_{n=1}^{N-1} f(n).$$

Теперь утверждение вытекает из предыдущего следствия. □

Следующее преобразование (интегрирование по частям) является аналогом преобразования Абеля, но для интегралов:

$$\int_a^c g(x)f(x)\,dx = g(c)\int_a^c f(x)\,dx - \int_a^c g'(x)\Bigl(\int_a^x f(t)\,dt\Bigr)\,dx.$$

**Предложение 6.3.** *Пусть $f \in C([a, b))$, $g \in C^1([a, b])$ и $g' \leqslant 0$. Если существует конечный предел*

$$\lim_{c\to b} g(c)\int_a^c f(t)\,dt,$$

*то интегралы*

$$\int_a^b g(x)f(x)\,dx \quad \text{и} \quad \int_a^b g'(x)\Bigl(\int_a^x f(t)\,dt\Bigr)\,dx$$

*сходятся и расходятся одновременно.*

**Следствие 6.3.** (Признаки Абеля–Дирихле) *Пусть* $f \in C([a,b))$, $g \in C^1([a,b))$ *и* $g' \leqslant 0$.

(i) *Если* $\lim_{c\to b} g(c) = 0$ *и существует число* $M$ *такое, что для всех* $c \in [a,b)$ *верна оценка*

$$\Big|\int_a^c f(x)\,dx\Big| \leqslant M,$$

*то несобственный интеграл от* $fg$ *по* $[a,b)$ *сходится.*

(ii) *Если* $g$ *ограничена на* $[a,b)$ *и несобственный интеграл от* $f$ *по* $[a,b)$ *сходится, то сходится несобственный интеграл от* $fg$ *по* $[a,b)$.

*Доказательство.* Обоснуем (i). По условию

$$\lim_{c\to b} g(c)\int_a^c f(x)\,dx = 0.$$

Следовательно, сходимость исходного интеграла равносильна сходимости интеграла

$$\int_a^b g'(x)\Big(\int_a^x f(t)\,dt\Big)\,dx,$$

который как мы покажем сходится абсолютно. Действительно,

$$\Big|g'(x)\Big(\int_a^x f(t)\,dt\Big)\Big| \leqslant M|g'(x)|$$

и

$$\lim_{c\to b}\int_a^c |g'(x)|\,dx = \lim_{c\to b}(g(a)-g(c)) = g(a).$$

Пункт (ii) сводится к (i) заменой $g$ на $g - \lim_{c\to b} g(c)$. □

## 7. Гамма и Бета функции Эйлера.

Функция

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt$$

называется гамма-функцией Эйлера, а функция

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt$$

называется бета-функцией Эйлера.

Отметим, что $\Gamma(x)$ определена при $x>0$, а $B(x,y)$ определена при $x>0$ и $y>0$.

**Теорема 7.1.** (Свойства бета-функции)

(i) $B(x,y) = B(y,x)$;

(ii) $B(x+1,y) = \frac{x}{x+y}B(x,y)$;

(iii) $B(x,y) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{s^{x-1}}{(1+s)^{x+y}}\,ds.$

*Доказательство.* Пункт (i) выводится с помощью замены $t \to 1-t$. Пункт (iii) выводится с помощью замены $t = s/(1+s)$. Наконец для вывода (ii) достаточно проинтегрировать по частям. □

Используя пункт (ii), несложно вывести равенство:

$$B(n,m) = \frac{(m-1)!(n-1)!}{(n+m-1)!}.$$

**Теорема 7.2.** (Свойства гамма-функции)

(i) $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$;

(ii) $\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^x(n-1)!}{x(x+1)\cdots(x+n-1)}$ *(формула Эйлера–Гаусса);*

(iii) $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$ *при* $0 < x < 1$ *(формула дополнения).*

*Доказательство.* Пункт (i) выводится с помощью интегрирования по частям. Докажем (ii). Сделаем замену $t = -\ln u$:

$$\Gamma(x) = \int_0^1 \ln^{x-1}(1/u)\,du.$$

Рассмотрим функцию $f(x) = n(1-e^{x/n}) + x$ на $[-a, 0]$. Так как $0 \leqslant f'(x) = 1 - e^{x/n} \leqslant |x|/n$ при $x \leqslant 0$, то по теореме Лагранжа $|f(-a)| = |f(-a) - f(0)| \leqslant |a|^2/n$. Следовательно,

$$|n(1-u^{1/n}) - \ln(1/u)| \leqslant n^{-1}\ln^2 u$$

для всех $u \in (0,1)$. Поэтому

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 n^{x-1}(1-u^{1/n})^{x-1}\,du = \lim_{n\to\infty} n^x B(n,x).$$

Отстается расписать $B(n,x)$ с помощью формулы понижения. Для получения пункта (iii) достаточно применить формулу Эйлера–Гаусса и сравнить результат с разложением синуса в произведение. □

Из пункта (i) следует, что $\Gamma(n+1) = n!$. Заметим также, что гамма-функция и бета-функция связаны следующим равенством

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)},$$

доказательство которого мы пока отложим.

Применяя формулу дополнения при $x = 1/2$ получаем

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}.$$

В свою очередь

$$\Gamma(1/2) = \int_0^{+\infty} t^{-1/2}e^{-t}\,dt = 2\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx.$$

Таким образом, найдено значение интеграла Пуассона

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} = \sqrt{\pi}.$$

## 8. Признаки равномерной сходимости функциональных последовательностей и рядов.

Пусть $X$ – некоторое непустое множество. Будем говорить, что последовательность функций $f_n\colon X \to \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$) сходится равномерно на множестве $X$ к функции $f\colon X \to \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$), если

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

Рассмотрим множество $B(X)$ ограниченных на $X$ функций. Это множество с метрикой

$$\varrho(f,g) = \sup_X |f(x) - g(x)|$$

является метрическим пространством, а сходимость по этой метрике равносильна равномерной сходимости. Однако, в определении равномерной сходимости мы не требуем ограниченности функций $f_n$ и $f$.

Говорят, что последовательность $f_n$ сходится к $f$ поточечно на $X$, если

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad \forall\, x \in X.$$

Ясно, что из равномерной сходимости следует поточечная, но обратное не имеет место.

**Предложение 8.1.** *Пусть $f_n$ сходится равномерно к $f$ и $g_n$ сходится равномерно к $g$ на множестве $X$. Тогда $f_n + g_n$ сходится равномерно к $f + g$ на $X$. Если дополнительно известно, что последовательности $g_n$ и $f_n$ равномерно ограниченны, то $f_n g_n$ сходится равномерно к $fg$ на $X$. Более того, если $g_n$ равномерно ограниченная последовательность и $f_n$ равномерно сходится к нулю, то $f_n g_n$ равномерно сходится к нулю.*

*Доказательство.* Утверждение следует из неравенств:

$$\sup_X |(f_n + g_n) - (f + g)| \leqslant \sup_X |f_n - f| + \sup_X |g_n - g|,$$

$$\sup_X |f_n g_n - fg| \leqslant \sup_X |g_n| \sup_X |f_n - f| + \sup_X |f| \sup_X |g_n - g|.$$

□

**Предложение 8.2.** (Критерий Коши) *Последовательность $f_n$ сходится к $f$ равномерно на $X$ тогда и только тогда, когда для всякого $\varepsilon > 0$ найдется номер $N$ такой, что для всех $n, m > N$ верно*

$$\sup_X |f_n(x) - f_m(x)| \leqslant \varepsilon.$$

*В частности, метрическое пространство $B(X)$ является полным.*

*Доказательство.* Пояснений требует лишь достаточность. Из условия следует, что для каждого $x \in X$ числовая последовательность $\{f_n(x)\}$ фундаментальна и существует предел $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$, который мы обозначаем через $f(x)$. Пусть $\varepsilon > 0$. Существует номер $N$ такой, что для всех $n, m > N$ и всех $x \in X$ выполняется неравенство $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$. Устремляя $m \to \infty$, получаем $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$ для всех $x \in X$ и всех $n > N$. Следовательно, $f_n$ сходится к $f$ равномерно на $X$. □

Вместе с последовательностями полезно рассматривать ряды. Будем говорить, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ равномерно сходится к $S(x)$ на $X$, если его частичные суммы $S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} f_n(x)$ сходятся равномерно к $S(x)$. Аналогично определяется поточечная сходимость. Если уже известна поточечная сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, то равномерная сходимость равносильна равенству

$$\lim_{N\to\infty} \sup_X \Bigl| \sum_{n=N}^{\infty} f_n(x) \Bigr| = 0.$$

Критерий Коши переформулируется следующим образом: ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится равномерно на $X$ тогда и только тогда, когда для всякого $\varepsilon > 0$ найдется номер $N$ такой, что для всех $n, m > N$ верно

$$\sup_X \Bigl| \sum_{k=m+1}^{n} f_k(x) \Bigr| < \varepsilon.$$

Необходимым условием равномерной сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ является равномерное стремление к нулю его слагаемых $f_n$.

**Теорема 8.1.** (Признак Вейерштрасса) *Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ сходится равномерно на $X$ и $|f_n(x)| \leqslant g_n(x)$ на $X$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится равномерно на $X$. В частности, если $|f_n(x)| \leqslant a_n$ и числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то ряд из $f_n$ сходится равномерно.*

*Доказательство.* Утверждение следует из неравенства

$$\sup_X\Big|\sum_{k=m+1}^n f_k(x)\Big| \leqslant \sup_X \sum_{k=m+1}^n g_k(x)$$

и критерия Коши. □

**Теорема 8.2.** (Признак Дини) *Пусть $X$ – компакт в метрическом пространстве и для всякого $x \in X$ числовая последовательность $|f_n(x) - f(x)|$ монотонно стремится к нулю, причем функции $f_n$ и $f$ непрерывны на $X$. Тогда последовательность $f_n$ равномерно сходится к $f$ на $X$.*

*Доказательство.* Положим $g_n(x) = |f_n(x) - f(x)|$. Пусть $\varepsilon > 0$. Для каждой точки $x_0 \in X$ найдем $N(x_0) > 0$ такое, что $g_N(x_0) < \varepsilon$. Используя непрерывность $g_N$ найдем $\delta(x_0) > 0$ такое, что $g_N(x) < 2\varepsilon$ для всех $x \in B_\delta(x_0)$. В силу монотонности $g_n(x) < 2\varepsilon$ для всех $n > N$ и всех $x \in B_\delta(x_0)$. Выбираем конечное подпокрытие $B_{\delta_i}(x_i)$ компакта $X$ положим $N = \max_i N_i$. Ясно, что для всех $n \geqslant N$ и всех $x \in X$ выполняется неравенство $g_n(x) < 2\varepsilon$. □

**Теорема 8.3.** (Признак Хелли) *Предположим, что задана последовательность вещественнозначных монотонных функций $f_n$ на отрезке $[a, b]$. Если $f_n$ поточечно сходится к монотонной и непрерывной функции $f$, то $f_n$ равномерно на $[a, b]$ сходится к $f$.*

*Доказательство.* Пусть $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Из-за монотонности для всякого $x \in [a, b]$ верна оценка

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant \max\{|f_n(x_i) - f(x_{i-1})|, |f_n(x_{i-1}) - f(x_i)|\}.$$

В силу непрерывности $f$ можно для всякого $\varepsilon > 0$ выбрать разбиение $\{x_i\}$ столь мелким, что $|f(x_i) - f(x_{i-1})| < \varepsilon$ для всех $i$. Получаем

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant \max_i |f_n(x_i) - f(x_i)| + \varepsilon.$$

Остается воспользоваться поточечной сходимостью. □

Таким образом, на отрезке для равномерной сходимости достаточно добавить к поточечной сходимости непрерывность и монотонность, причем можно требовать монотонность и по $x$ и по $n$.

Обсудим подробнее ряды вида $\sum_{n=1}^\infty a_n(x)b_n(x)$. Следующее утверждение отвечает на два вопроса. На что можно умножить слагаемые сходящегося ряда так, что новый ряд будет сходиться? На что нужно умножить слагаемые ряда с ограниченными частичными суммами так, что новый ряд будет сходиться? Кратко ответы можно сформулировать так: сходимость ряда не портит умножение на ограниченную последовательность, а улучшает сходимость ряда умножение на стремящуюся к нулю последовательность.

**Предложение 8.3.** *Для равномерной на $X$ сходимости ряда $\sum_{n=1}^\infty a_n(x)b_n(x)$ достаточно выполнения хотя бы одного из следующих условий:*

(i) *ряд $\sum_{n=1}^\infty |a_n(x)|$ равномерно сходится и $b_n(x)$ равномерно ограниченная последовательность;*

(ii) *частичные суммы $\sum_{n=1}^N |a_n(x)|$ равномерно ограничены и $b_n$ равномерно сходится к нулю.*

*Доказательство.* Пункт (i) немедленно следует из признака Вейерштрасса. Пункт (ii) следует из неравенства

$$\sum_{n=M}^N |a_n(x)||b_n(x)| \leqslant \max_{M\leqslant n\leqslant N} |b_n(x)| \sum_{n=M}^N |a_n(x)|$$

и критерия Коши. $\square$

Более тонкие признаки сходимости можно получить с помощью преобразования Абеля. Напомним, что преобразованием Абеля называется следующая цепочка равенств:

$$\sum_{k=n}^{m} a_k b_k = \sum_{k=n}^{m} a_k (B_k - B_{k-1}) = \sum_{k=n}^{m} a_k B_k - \sum_{k=n}^{m} a_k B_{k-1} = a_m B_m - a_n B_{n-1} - \sum_{k=n}^{m} (a_{k+1} - a_k) B_k,$$

где последовательность $B_k$ задана соотношениями $B_k = B_{k-1} + b_k$, $B_0 = 0$. Заметим, что для всякой функции $B(x)$ верно равенство:

$$\sum_{k=n}^{m} a_k b_k = a_m (B_m - B) - a_n (B_{n-1} - B) - \sum_{k=n}^{m} (a_{k+1} - a_k)(B_k - B).$$

Преобразование Абеля позволяет при исследовании равномерной сходимости заменить исходный ряд новым рядом, в котором усиливаются свойства $a_n$ и $b_n$. Если $a_n$ стремятся к нулю, то разности $a_{n+1} - a_n$ обычно стремятся быстрее. Если множитель $b_n$ не просто ограничен, но и меняет знак, то уже частичная сумма $B_n$ обычно оказывается ограниченной.

**Теорема 8.4.** *Пусть функции $a_n$ и $b_n$ определены на $X$. Предположим, что для некоторой функции $B$ последовательность $a_n(B_n - B)$ сходится равномерно на $X$, тогда ряды*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} - a_n)(B_n - B)$$

*одновременно сходятся равномерно и не сходятся равномерно на $X$.*

*Доказательство.* С помощью преобразования Абеля выводим равенство:

$$\sum_{n=1}^{N} a_n b_n = a_N (B_N - B) + a_1 B - \sum_{n=M}^{N} (a_{n+1} - a_n)(B_n - B),$$

из которого немедленно следует наше утверждение. $\square$

**Следствие 8.1.** (Признаки Абеля–Дирихле)

(i) *Если последовательность вещественнозначных функций $a_n(x)$ монотонно и равномерно на $X$ стремится к нулю, а последовательность $B_n(x)$ равномерно ограничена, т. е. $\sup_{n,x} |B_n(x)| < \infty$, то ряд $\sum_n a_n(x) b_n(x)$ равномерно сходится на $X$.*

(ii) *Если последовательность вещественнозначных функций $a_n(x)$ монотонна и равномерно ограничена на $X$, а ряд $\sum_n b_n(x)$ равномерно на $X$ сходится, то ряд $\sum_n a_n(x) b_n(x)$ равномерно сходится на $X$.*

*Доказательство.* Обоснуем (i). Применим доказанную выше теорему с $B \equiv 0$. Ясно, что $a_n B_n$ сходится равномерно к нулю. Так как ряд $\sum_n |a_{n+1} - a_n|$ сходится равномерно и $|B_n|$ равномерно ограничены, то ряд $\sum_n (a_{n+1} - a_n) B_n$ сходится равномерно.

Обоснуем (ii). Примерим доказанную выше теорему с $B = \sum_n b_n$. По условию мы знаем, что $B_n - B$ равномерно стремится к нулю. Следовательно, $a_n(B_n - B)$ равномерно стремится к нулю. Так как частичные суммы $\sum_{n=1}^{N} |a_{n+1} - a_n|$ равномерно ограничены и $B_n - B$ равномерно стремится к нулю, то ряд $\sum_n (a_{n+1} - a_n)(B_n - B)$ сходится равномерно. $\square$

## 9. Свойства равномерной сходимости: непрерывность, интегрируемость, дифференцируемость.

Равномерный предел удобен тем, что он сохраняет многие важные свойства функций.

**Теорема 9.1.** *Пусть $X$ – подмножество метрического пространства и $a$ – предельная точка для $X$. Предположим, что последовательность функций $f_n$ сходится к функции $f$ равномерно на $X$. Если $b_n = \lim_{x\to a} f_n(x)$, то $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{x\to a} f(x)$, т. е.*

$$\lim_{n\to\infty}\Bigl(\lim_{x\to a} f_n(x)\Bigr) = \lim_{x\to a}\Bigl(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\Bigr).$$

*Доказательство.* Для всякого $\varepsilon > 0$ найдется номер $N$ такой, что для всяких $n, m > N$

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in X.$$

Устремляя в этом неравенстве $x \to a$ заключаем, что $b_n$ является фундаментальной последовательностью. Следовательно существует предел $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. Теперь утверждение следует из неравенства

$$|f(x) - b| \leqslant |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - b_n| + |b_n - b|.$$

□

**Следствие 9.1.** *Пусть $X$ – подмножество метрического пространства и $a \in X$. Если функции $f_n$ непрерывны в точке $a$ и $f_n$ сходятся к функции $f$ равномерно на $X$, то $f$ непрерывна в точке $a$.*

*Доказательство.* Если $a$ – изолированная точка $X$, то $f$ непрерывна в точке $a$ по определению. Если $a$ является предельной точкой $X$, то по предыдущей теореме

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}\Bigl(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\Bigr) = \lim_{n\to\infty}\Bigl(\lim_{x\to a} f_n(x)\Bigr) = \lim_{n\to\infty} f_n(a) = f(a).$$

□

**Следствие 9.2.** *Пусть $X$ – подмножество метрического пространства. Пространство непрерывных и ограниченных функций $C_b(X)$ с нормой*

$$\|f\| = \sup_X |f(x)|$$

*является банаховым пространством.*

**Теорема 9.2.** *Предположим, что последовательность интегрируемых по Риману на $[a, b]$ функций $f_n$ равномерно сходится к функции $f$. Тогда $f$ интегрируема по Риману на $[a, b]$ и верно равенство*

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n\,dx = \int_a^b f\,dx.$$

*Доказательство.* Так как

$$\Bigl|\int_a^b f_n\,dx - \int_a^b f_m\,dx\Bigr| \leqslant \sup_{[a,b]} |f_n - f_m||b - a|,$$

то последовательность $I_n$ интегралов от $f_n$ фундаментальна и сходится к некоторому числу $I$. Покажем, что суммы Римана функции $f$ сходятся к $I$. Пусть $(\mathbb{T}, \xi)$ – отмеченное разбиение $[a, b]$. Утверждение следует из неравенства

$$\Bigl|\sigma(\mathbb{T}, \xi, f) - I\Bigr| \leqslant |b - a|\sup_{[a,b]} |f - f_n| + \Bigl|\sigma(\mathbb{T}, \xi, f_n) - I_n\Bigr| + \Bigl|I_n - I\Bigr|.$$

□

Следующее утверждение логически сильно отличается от только что доказанных, а именно, не из сходимости функций следует сходимость производных, а из сходимости производных следует сходимость функций.

**Теорема 9.3.** *Пусть $B_r$ – шар радиуса $r$ в $\mathbb{R}^m$. Предположим, что функции $f_n$ дифференцируемы на $B_r$ и производные $f'_n$ (каждая частная производная) сходятся равномерно на $B_r$ к $g$. Если для некоторой точки $x_0 \in B_r$ последовательность $f_n(x_0)$ сходится, то существует такая дифференцируемая функция $f$, что $f' = g$ и $f_n$ сходится к $f$ равномерно.*

*Доказательство.* Так как
$$\sup_{B_r} |f_n(x) - f_k(x)| \leqslant |f_n(x_0) - f_k(x_0)| + 2r \sup_{B_r} |f'_n(x) - f'_k(x)|,$$
то последовательность $f_n$ сходится равномерно на $B_r$ к некоторой функции $f$. Фиксируем $x \in B_r$. Рассмотрим функции
$$F_n(h) = \frac{f_n(x+h) - f_n(x) - f'_n(x)h}{\|h\|}, \quad F(h) = \frac{f(x+h) - f(x) - g'(x)h}{\|h\|}.$$
Так как
$$|F_n(h) - F_k(h)| \leqslant 2 \sup |f'_n - f'_k|,$$
то $F_n$ равномерно сходится к $F$. Более того, $\lim_{h\to 0} F_n(h) = 0$ для всякого $n$. По теореме о перестановочности пределов заключаем
$$\lim_{h\to 0} F(h) = \lim_{h\to 0}\Bigl(\lim_{n\to\infty} F_n(h)\Bigr) = \lim_{n\to\infty}\Bigl(\lim_{h\to 0} F_n(h)\Bigr) = 0,$$
что означает дифференцируемость $f$ в точке $x$ и равенство $f' = g$. □

**Следствие 9.3.** *Пусть $U$ – открытое множество в $\mathbb{R}^m$. Пространство $C^k_b(U)$, состоящее из $k$-раз непрерывно дифференцируемых и ограниченных вместе с производными функций, с нормой*
$$\|f\| = \sup_U |f| + \sum_{i\leqslant k} \sup_U |f^{(i)}(x)|$$
*является банаховым пространством.*

## 10. Степенные ряды.

Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ называется степенным рядом. Здесь $c_n, z, z_0 \in \mathbb{C}$, точка $z_0$ называется центром ряда, а $c_n$ называются коэффициентами ряда. Поскольку всегда можно сделать замену $z \to z - z_0$, то далее всегда считаем $z_0 = 0$. Исследование степенных рядов естественно проводить именно на множестве комплексных числе, что демонстрирует следующий пример. Используя сумму геометрической прогрессии легко вывести равенство:
$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots$$
Этот ряд сходится только при $|x| < 1$, но сумма этого ряда является гладкой функцией на всей числовой прямой. Возникает естественный вопрос о свойстве суммы, которое является препятствием для сходимости этого ряда. Это свойство можно увидеть, если допустить комплексные $x$. В комплексной области функция $1/(1+x^2)$ имеет особенности $x = \pm i$.

**Предложение 10.1.** *Если в некоторой точке $z^* \neq 0$ ряд $\sum_n c_n z^n$ сходится абсолютно, то он сходится абсолютно для всякой точки $z$ такой, что $|z| < |z^*|$. Если в некоторой точке $z^*$ ряд $\sum_n c_n z^n$ расходится, то степенной ряд расходится для всякой точки $z$ такой, что $|z| > |z^*|$.*

*Доказательство.* Второе утверждение следует из первого. Докажем первое. Так как ряд с $z^*$ сходится, то последовательность $|c_n||z^*|^n$ стремится к нулю и ограничена, т. е. найдется такое число $C$, что $|c_n||z^*|^n \leqslant C$ для всех $n$. Сходимость ряда при $|z| < |z^*|$ следует из неравенств

$$|c_n||z|^n \leqslant C\left(\frac{|z|}{|z^*|}\right)^n, \quad \frac{|z|}{|z^*|} < 1.$$

□

Таким образом, степенный ряды сходятся на кругах. Следующее утверждение позволяет находить радиус самого большого круга сходимости.

**Теорема 10.1.** (Формула Коши–Адамара) *Пусть*

$$R = \frac{1}{\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}} \in [0, +\infty].$$

*Тогда ряд сходится абсолютно в каждой точке круга $|z| < R$ и расходится в каждой точке $|z| > R$.*

*Доказательство.* Так как

$$q = \overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n||z|^n} = |z|\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|},$$

то $q < 1$ при $|z| < R$ и ряд сходится по признаку Коши, $q > 1$ при $|z| > R$ и ряд расходится по признаку Коши. □

Число $R$ называется радиусом сходимости, а круг $|z| < R$ называется кругом сходимости. При $|z| = R$ степенной ряд может сходится и расходится.

**Теорема 10.2.** *Для всякого $R_1 < R$ ряд $\sum_n c_n z^n$ сходится равномерно на круге $|z| \leqslant R_1$.*

*Доказательство.* Так как ряд $\sum_n |c_n| R_1^n$ сходится и $|c_n||z|^n \leqslant |c_n|R_1^n$ при $|z| \leqslant R_1$, то по признаку Вейерштрасса ряд $\sum_n c_n z^n$ сходится равномерно при $|z| \leqslant R_1$. □

**Теорема 10.3.** (Абель) *Если в точке $z_0$ ряд $\sum_n c_n z^n$ сходится, то на отрезке $[0, z_0]$ ряд сходится равномерно.*

*Доказательство.* Надо доказать, что ряд $\sum_n t^n c_n z_0^n$ сходится равномерно на $[0, 1]$. Это следует из признака Абеля: ряд $\sum_n c_n z_0^n$ сходится и последовательность $t^n$ монотонна и равномерно ограничена. □

В качестве примера докажем, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \ln 2.$$

Заметим, что ряд $\sum_n z^n/n$ сходится в точке $z = -1$. Следовательно, этот ряд сходится равномерно на отрезке $[-1, 0]$, а на интервале $(-1, 0)$ он сходится к $\ln(1-x)$. Получаем

$$\ln 2 = \lim_{x\to -1} \ln(1-x) = \sum_n \lim_{x\to -1} \frac{x^n}{n} = \sum_n \frac{(-1)^n}{n}.$$

**Предложение 10.2.** *Радиусы сходимости рядов $\sum_n c_n z^n$ и $\sum_n n c_n z^{n-1}$ равны и второй ряд является производной первого ряда, т. е.*

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\sum_n c_n (z+\Delta z)^n - \sum_n c_n z^n}{\Delta z} = \sum_n n c_n z^{n-1}$$

*для всякой точки $z$ внутри круга сходимости. Более того, сумма степенного ряда является бесконечно гладкой функцией внутри круга сходимости.*

*Доказательство.* Утверждение следует из формулы Коши–Адамара и теоремы о перестановочности пределов. □

Из доказанного утверждения следует, что у суммы $f(z)$ степенного ряда $\sum_n c_n z^n$ есть первообразная

$$\int f(z)\,dz = C + \sum_n \frac{c_n z^{n+1}}{n+1}.$$

**Предложение 10.3.** *Предположим, что радиус сходимости ряда $\sum_n c_n z^n$ больше нуля, а сумма равна $f(z)$. Тогда*

$$c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

*Доказательство.* Проверяется прямым вычислением. □

Таким образом, степенной ряд является рядом Тейлора своей суммы.

## 11. Производящие функции.

Степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ называют производящей функцией последовательности $\{c_n\}$, причем не предполагается, что радиус сходимости положителен. С производящими функциями определены формальные операции сложения, умножения, дифференцирования и интегрирования:

$$\sum_n c_n z^n + \sum_n d_n z^n = \sum_n (c_n + d_n) z^n, \quad \sum_n c_n z^n \cdot \sum_n d_n z^n = \sum_n (c_0 d_n + c_1 d_{n-1} + \ldots + c_n d_0) z^n,$$

$$\Big(\sum_n c_n z^n\Big)' = \sum_n n c_n z^{n-1}, \quad \int \Big(\sum_n c_n z^n\Big)\,dz = \sum_n c_n \frac{z^{n+1}}{n+1}.$$

Если радиусы сходимости у исходных рядов положительны, то на общем круге сходимости эти формальные операции совпадают с обычными правилами сложения, умножения, дифференцирования и интегрирования степенных рядов.

Производящие функции позволяют решать многие задачи комбинаторики.

Хорошо известна последовательность чисел Фибоначчи: $f_0 = f_1 = 1$, $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$. Найдем производящую функцию для этой последовательности. Заметим, что верны равенства $f_n + f_{n-1} - f_{n+1} = 0$ и

$$(1 - z - z^2)F(z) = f_0 + (f_1 - f_0)z + (f_2 - f_1 - f_0)z^2 + (f_3 - f_2 - f_1)z^3 + \ldots = f_0 = 1.$$

Следовательно,

$$F(z) = \frac{1}{1 - z - z^2}.$$

Раскладывая эту дробь на простейшие и используя разложение для геометрической прогрессии можно получить формулу $n$-го числа Фибоначчи:

$$f_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{5}}\bigg(\Big(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\Big)^{n+1} - \Big(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\Big)^{n+1}\bigg).$$

Оказывается линейные рекуррентные последовательности – это в точности те последовательности, у которых рациональные производящие функции.

**Теорема 11.1.** *Если последовательность $a_n$ удовлетворяет рекуррентному соотношению*

$$a_n = q_1 a_{n-1} + \ldots + q_k a_{n-k},$$

*то ее производящая функция является отношением двух многочленов $P/Q$, причем степень знаменателя равна $k$, а степень числителя не превосходит $k-1$. Более того, верно обратное: если производящая функция рациональна, то начиная с некоторого номера последовательность задается линейным рекуррентным соотношением.*

*Доказательство.* Достаточно заметить, что произведение $(q_1z+q_2z^2+\ldots+q_kz^k)$ и производящей функции $A(z)$ представляется в виде суммы некоторого многочлена и $A(z)$. $\square$

Рассмотрим еще один пример.

Сколькими способами можно разменять $n$ рублей на монеты достоинством в 1 и 5 рублей? Обозначим искомое количество способов через $a_n$ и найдем производящую функцию $A(z)$ для этой последовательности. Легко видеть, что раскрывая скобки и приводя подобные в выражении

$$(1+z+z^2+z^3+\ldots)(1+z^5+z^{10}+\ldots)$$

мы получим искомую производящую функцию. Используя формулу для геометрической прогрессии получаем

$$A(z)=\frac{1}{(1-z)(1-z^5)}=\frac{1}{1-z-z^5+z^6}.$$

Кроме того, имеет место рекуррентная формула $a_n=a_{n-1}+a_{n-5}+a_{n-6}$.

## 12. Функции Бесселя и многочлены Лежандра.

*Задача Бернулли*

Опишем колебания гибкой, тяжелой и однородной нити, верхний конец которой закреплен, а нижний свободен. Длина нити равна $L$. Направим ось OX вертикально через точку крепления нити, ось OY направим горизонтально, начало координат в конце покоящейся нити. В каждый момент времени функция $y=u(x,t)$ описывает форму нити. Пусть $\varrho$ – линейная плотность нити. Рассмотрим участок нити, соответствующий $[x,x+\Delta x]$. На концы этого участка действуют силы натяжения $T(x)$ и $T(x+\Delta x)$. Записывая второй закон Ньютона в проекции на ось OY, получаем

$$\varrho\Delta x\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=T(x+\Delta x)\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x}-T(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x}.$$

Делим на $\Delta x$ и устремляем $\Delta x$ к нулю. Получаем уравнение

$$\varrho\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x}\Big(T(x)\frac{\partial u}{\partial x}\Big).$$

Расписывая второй закон Ньютона в проекции на вертикальную ось можно приближенно считать, что $T(x)=g\varrho x$. Приходим к уравнению

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x}\Big(gx\frac{\partial u}{\partial x}\Big).$$

Будем искать решение в виде $u(x,t)=y(x)\sin(\omega t+\varphi_0)$. На функцию $y$ получаем уравнение

$$xy''(x)+y'(x)+\omega^2g^{-1}y(x)=0.$$

*Уравнение Лапласа в цилиндрических координатах*

В многих задачах теории колебаний, электростатики, теплоты приходится исследовать уравнение Лапласа $\Delta u=0$. Распишем это уравнение в цилиндрической системе координат $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, $z=z$:

$$u_{rr}+r^{-1}u_r+r^{-2}u_{\varphi\varphi}+u_{zz}=0.$$

Будем искать решение в виде $u(r,\varphi,z)=R(r)\Phi(\varphi)Z(z)$. Имеем

$$\frac{r\big(rR'\big)'}{R}+\frac{\Phi''}{\Phi}+\frac{r^2Z''}{Z}=0.$$

Следовательно для некоторых констант $-n^2$ и $\lambda^2$ верны равенства

$$\Phi''+n^2\Phi=0,\quad Z''-\lambda^2Z=0$$

и

$$r(rR')' + (\lambda^2 r^2 - n^2)R = 0.$$

Полагая $v = r\lambda$, приходим к уравнению на функцию $R(v)$:

$$v^2 R''(v) + vR'(v) + (v^2 - n^2)R(v) = 0,$$

которое называют уравнением Бесселя. Уравнение, полученное выше при решении задачи Бернулли, приводится заменой $x = gs^2/4\omega^2$ к уравнению Бесселя с $n = 0$.

Итак, представляет интерес поиск решений уравнения вида

$$x^2 y''(x) + xy'(x) + (x^2 - n^2)y(x) = 0.$$

Решение $J_n(x)$ этого уравнения с условием $J_n(0) = 1/2^n n!$, называется функцией Бесселя порядка $n$. Рассмотрим случай $n = 0$. Будем искать решение в виде степенного ряда $y = \sum_k c_k x^k$. Подставляя в уравнение, приходим к равенству

$$c_1 + \sum_{k=0}^{\infty} (k^2 c_k + c_{k-2}) x^{k-1} = 0.$$

Следовательно, $c_1 = 0$ и $k^2 c_k + c_{k-2} = 0$. Таким образом,

$$J_0(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(k!)^2 2^{2k}}.$$

*Закон всемирного тяготения и объемный потенциал.*

Согласно закону всемирного тяготения масса $m_0$, расположенная в точке $x_0$, притягивает массу $m$, расположенную в точке $x$, с силой

$$F = -\gamma m m_0 \frac{(x - x_0)}{|x - x_0|^3}$$

Сила, с которой массу $m$ в точке $x$ притягивает тело $Q$ с плотностью $\varrho$, выражается формулой

$$F(x) = -\gamma m \int_Q \frac{x - y}{|x - y|^3} \varrho(y)\, dy,$$

а потенциал этой силы равен $\gamma m U$, где

$$U(x) = \int_Q \frac{1}{|x - y|} \varrho(y)\, dy.$$

Выписанный интеграл называется объемный потенциалом и играет важную роль в различных разделах физики. Если точка $x$ находится на достаточно большом расстоянии от тела, то приближенно принимают $U(x) = M/|x - x_0|$, где $M$ – масса тела и $x_0$ – центр масс. Найдем точную асимптотику объемного потенциала. Пусть $r_1 = |x_0 - y|$, $r = |x_0 - x|$, $t = \cos\theta$, где $x_0$ – центр масс, $y$ – произвольная точка $Q$, $x$ – точка вне тела и $r > r_1$, $\theta$ – угол между $x_0 - x$ и $x_0 - y$. Тогда

$$|x - y| = \sqrt{r^2 + r_1^2 - 2rr_1 \cos\theta} = r\sqrt{1 + \alpha^2 - 2\alpha t}.$$

Разлагаем $1/|x - y|$ по степеням $\alpha$:

$$\frac{1}{|x - y|} = \frac{1}{r} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k P_k(t).$$

Следовательно, имеем

$$U(x) = \frac{1}{r} \int_Q \varrho\, dy + \frac{1}{r^2} \int_Q r_1 P_1(t) \varrho\, dy + \dots$$

Легко понять, что

$$(k+1)P_{k+1}(t) = (2k+1)tP_k(t) - kP_{k-1}(t), \quad P_0 = 1, P_1 = t.$$

Таким образом, $P_k(t)$ является многочленом степени $k$. Более того, имеет место формула Родрига

$$P_k(t) = \frac{1}{2^k k!}\frac{d^k}{dt^k}\Big(t^2-1\Big)^n.$$

Многочлены $P_k$ называются многочленами Лежандра и обладают многими замечательными свойствами.

## 13. Равномерный предел функций, зависящих от параметра.

Пусть $X$ – некоторое непустое множество и $Y$ – подмножество метрического пространства, причем $a$ – предельная точка $Y$. Пусть $f\colon X\times Y \to \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$) и $\varphi\colon X \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$. Будем говорить, что функция $f(x,y)$ сходится к $\varphi$ при $y\to a$ равномерно на $X$, если

$$\lim_{y\to a}\sup_X |f(x,y)-\varphi(x)| = 0.$$

**Предложение 13.1.** *Функция $f(x,y)$ сходится к $\varphi(x)$ при $y\to a$ равномерно на $X$ тогда и только тогда, когда для всякой последовательности $y_n\to a$, $y_n\neq a$ последовательность $f(x,y_n)$ сходится к $\varphi$ равномерно на $X$.*

*Доказательство.* Утверждение является переформулировкой теоремы об эквивалентности определений предела по Коши и по Гейне для функции $h(y)=\sup_X|f(x,y)-\varphi(x)|$. □

Доказанное предложение позволяет перенести все основные теоремы о перестановочности пределов, предела и дифференцирования, предела и интегрирования с последовательностей на эту более общую ситуацию.

**Предложение 13.2.** (Критерий Коши) *Функция $f(x,y)$ сходится при $y\to a$ равномерно на $X$ тогда и только тогда, когда для всякого $\varepsilon>0$ найдется $\delta>0$ такое, что для всех $y_1,y_2\in B'_\delta(a)$ верно $\sup_X|f(x,y_1)-f(x,y_2)|<\varepsilon$.*

*Доказательство.* Доказательство дословно повторяет доказательство критерия Коши для последовательности функций. □

Приведем важнейший пример, когда появляется такого рода равномерная сходимость.

**Предложение 13.3.** *Если функция $f$ непрерывна на прямоугольнике $\Pi=[a,b]\times[c,d]$, то для всякого $y_0\in[c,d]$ функции $f(x,y)$ сходятся к $f(x,y_0)$ при $y\to y_0$ равномерно на $[a,b]$.*

*Доказательство.* Следует из равномерной непрерывности непрерывной на компакте функции. □

## 14. Признаки равномерной сходимости несобственного интеграла с параметром.

Пусть $X$ – непустое множество. Предположим, что $f\colon X\times[a,b)\to\mathbb{R}$ при каждом $x$ интегрируема по Риману на $[a,c]$ для всякого $c\in[a,b)$. Тогда на $X\times[a,b)$ определена функция

$$F(x,c)=\int_a^c f(x,t)\,dt.$$

Если в каждой точке $x \in X$ существует конечный предел $\lim_{c\to b} F(x,c)$, то этот предел называют несобственным интегралом с параметром и обозначают через

$$\int_a^b f(x,t)\,dt.$$

Если $F(x,c)$ сходится к $\displaystyle\int_a^b f(x,t)\,dt$ при $c \to b$ равномерно на $X$, то говорят, что несобственный интеграл с параметром сходится равномерно на $X$. По определению равномерная сходимость равносильна равенству

$$\lim_{c\to b}\sup_X\Big|\int_c^b f(x,t)\,dt\Big| = 0.$$

Несобственные интегралы с параметром имеют много общего с функциональными рядами и исследование равномерной сходимости интегралов очень похоже на исследование сходимости рядов. Однако, надо иметь ввиду некоторые отличия, например, необходимым условием сходимости ряда является сходимость к нулю его слагаемых, а для сходимости интеграла этого не требуется.

**Предложение 14.1.** (Критерий Коши) *Интеграл* $\displaystyle\int_a^b f(x,t)\,dt$ *сходится равномерно тогда и только тогда, когда для всякого* $\varepsilon > 0$ *существует* $\delta > 0$ *такое, что для всех* $c_1, c_2 \in (b-\delta, b)$

$$\sup_X\Big|\int_{c_1}^{c_2} f(x,t)\,dt\Big| < \varepsilon.$$

*Доказательство.* Это переформулировка критерия Коши для функции $F(x,c)$. □

**Теорема 14.1.** (Признак Вейерштрасса) *Пусть* $\displaystyle\int_a^b g(x,t)\,dt$ *сходится равномерно и имеет место оценка* $|f(x,t)| \leqslant g(x,t)$ *на* $X \times [a,b)$. *Тогда* $\displaystyle\int_a^b f(x,t)\,dt$ *сходится равномерно. В частности, если* $|f(x,t)| \leqslant g(t)$ *и* $\displaystyle\int_a^b g(t)\,dt$ *сходится, то интеграл от* $f$ *сходится равномерно.*

*Доказательство.* Утверждение следует из неравенство

$$\sup_X\Big|\int_{c_1}^{c_2} f(x,t)\,dt\Big| \leqslant \sup_X\int_{c_1}^{c_2} g(x,t)\,dt$$

и критерия Коши. □

Обсудим сходимость интегралов от произведения $f(x,t)g(x,t)$.

**Предложение 14.2.** *Для равномерной сходимости интеграла* $\displaystyle\int_a^b f(x,t)g(x,t)\,dt$ *достаточно выполнения хотя бы одного из следующих условий:*

(i) *интеграл* $\displaystyle\int_a^b |f(x,t)|\,dt$ *сходится равномерно и* $g$ *равномерно ограничена на* $X\times[a,b)$;

(ii) *интегралы* $\displaystyle\int_a^c |f(x,t)|\,dt$ *равномерно ограничены и* $g$ *равномерно стремится к нулю при* $t \to b$.

*Доказательство.* Первый пункт следует из признака Вейерштрасса. Второй пункт следует из неравенства

$$\int_{c_1}^{c_2} |f(x,t)||g(x,t)|\,dt \leqslant \sup_{t\in[c_1,c_2]}|g(x,t)|\int_{c_1}^{c_2}|f(x,t)|\,dt$$

и критерия Коши. □

Более тонкие признаки сходимости можно получить с помощью аналога преобразования Абеля:

$$\int_a^c g(x,t)f(x,t)\,dt = g(x,c)\Big(\int_a^c f(x,t)\,dt - h(x)\Big) + g(x,a)h(x) \\ - \int_a^c g_t'(x,t)\Big(\int_a^t f(x,s)\,ds - h(x)\Big)\,dt,$$

где $h$ – произвольная функция.

**Теорема 14.2.** *Предположим, что при каждом $x$ по переменной $t$ выполняются условия $f \in C([a,b))$, $g \in C^1([a,b])$. Если для некоторой функции $h$ функция*

$$g(x,c)\Big(\int_a^c f(x,t)\,dt - h(x)\Big)$$

*равномерно сходится при $c \to b$, то интегралы*

$$\int_a^b g(x,t)f(x,t)\,dt \quad \text{и} \quad \int_a^b g_t'(x,t)\Big(\int_a^t f(x,s)\,ds - h(x)\Big)\,dt$$

*одновременно сходятся равномерно или расходятся равномерно.*

*Доказательство.* Следует из выписанного выше равенства. □

**Следствие 14.1.** (Признаки Абеля–Дирихле) *Предположим, что при каждом $x$ по переменной $t$ выполняются условия $f \in C([a,b))$, $g \in C^1([a,b])$ и $g_t' \geqslant 0$.*

(i) *Если $g(x,t)$ равномерно стремится к нулю при $t \to b$ и интегралы $\Big|\int_a^c f(x,t)\,dt\Big|$ равномерно ограничены на $X \times [a,b)$, то несобственный интеграл от $fg$ по $[a,b)$ сходится равномерно на $X$.*

(ii) *Если $g$ равномерно ограничена на $X \times [a,b)$ и несобственный интеграл от $f$ по $[a,b)$ сходится равномерно на $X$, то сходится несобственный интеграл от $fg$ по $[a,b)$.*

*Доказательство.* Обоснуем (i). Применим доказанную выше теорему с $h \equiv 0$. Ясно, что $g(x,c)\int_a^c f(x,t)\,dt$ сходится равномерно к нулю. Так как $\int_a^b |g_t'(x,t)|\,dt$ сходится равномерно и интегралы $\Big|\int_a^c f(x,t)\,dt\Big|$ равномерно ограничены, то интеграл $\int_a^b g_t'(x,t)\Big(\int_a^t f(x,s)\,ds\Big)\,dt$ сходится равномерно.

Обоснуем (ii). Примерим доказанную выше теорему с $h(x) = \int_a^b f(x,t)\,dt$. По условию мы знаем, что $\int_a^c f(x,t)\,dt - h(x)$ равномерно стремится к нулю при $c \to b$. Следовательно, $g(x,c)\Big(\int_a^c f(x,t)\,dt - h(x)\Big)$ равномерно стремится к нулю. Так как интегралы $\int_a^c |g_t'(x,t)|\,dt$ равномерно ограничены и $\int_a^c f(x,t)\,dt - h(x)$ равномерно стремится к нулю, то интеграл $\int_a^b g_t'(x,t)\Big(\int_a^t f(x,s)\,ds - h(x)\Big)\,dt$ сходится равномерно. □

## 15. Свойства собственных интегралов с параметром: непрерывность, дифференцируемость и интегрируемость.

Пусть $f\colon X \times [a,b] \to \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$) и при каждом $x \in X$ функция $f$ интегрируема по Риману на $[a,b]$. Пусть $\alpha, \beta\colon X \to [a,b]$. Функцию

$$F(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,t)\,dt$$

называют интегралом с параметром.

**Предложение 15.1.** *Предположим, что $X$ является подмножеством метрического пространства и $x_0$ – его предельная точка. Если $f(x,t)$ сходится к $\varphi(t)$ при $x \to x_0$ равномерно на $[a,b]$, то $\varphi$ интегрируема по Риману на $[a,b]$ и верно равенство*

$$\lim_{x\to x_0}\int_a^b f(x,t)\,dt = \int_a^b \varphi(t)\,dt.$$

*Доказательство.* Пусть $x_n \to x_0$, $x_n \neq x_0$. По условию $f(x_n,t)$ равномерно сходится к $\varphi(t)$ и утверждение следует из аналогичного утверждения про последовательности. □

Далее $X=[c,d]$.

**Теорема 15.1.** *Если $f$ непрерывна на $[c,d]\times[a,b]$ и $\alpha,\beta$ – непрерывны на $[c,d]$, то $F$ является непрерывной функцией на $[c,d]$.*

*Доказательство.* Функция

$$\Phi(x,c)=\int_a^c f(x,t)\,dt$$

непрерывна на $[c,d]\times[a,b]$. Действительно,

$$|\Phi(x_1,c_1)-\Phi(x_2,c_2)| \leqslant \max|f||c_1-c_2| + (b-a)\max_t|f(x_1,t)-f(x_2,t)|,$$

где второе слагаемое стремится к нулю в силу равномерной непрерывности $f$. Отстается заметить, что функция

$$F(x)=\Phi(x,\beta(x))-\Phi(x,\alpha(x))$$

является непрерывной как композиция непрерывных функций. □

**Теорема 15.2.** *Если $f$ и $\frac{\partial f}{\partial x}$ непрерывны на $[c,d]\times[a,b]$ и $\alpha,\beta$ непрерывно дифференцируемы на $[c,d]$, то $F$ непрерывно дифференцируема и*

$$F'(x)=\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)}\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt + f(x,\beta(x))\beta'(x) - f(x,\alpha(x))\alpha'(x).$$

*Доказательство.* Проверяем, что $\Phi(x,c)$ непрерывно дифференцируема по $x$ (непрерывная дифференцируемость по $c$ очевидна). Имеем

$$\frac{\Phi(x+h,c)-\Phi(x,c)}{h}=\int_a^c\frac{f(x+h,t)-f(x,t)}{h}\,dt.$$

Так как $h^{-1}(f(x+h,t)-f(x,t))$ сходится к $f_x(x,t)$ равномерно, то предел интегралов равен интегралу от предельной функции. Остается заметить, что $F(x)$ есть композиция непрерывно дифференцируемых функций. □

**Теорема 15.3.** *Если $f$ непрерывна на $[c,d]\times[a,b]$, то*

$$F(x)=\int_a^b f(x,t)\,dt$$

*интегрируема на $[c,d]$ и верно равенство*

$$\int_c^d F(x)\,dx = \int_a^b\Big(\int_c^d f(x,t)\,dx\Big)\,dt.$$

*Доказательство.* Это частный случай теоремы Фубини, который можно доказать с помощью теоремы о дифференцируемости интеграла по параметру:

$$\frac{d}{dy}\left(\int_c^y\Big(\int_a^b f(x,t)\,dt\Big)\,dx - \int_a^b\Big(\int_c^y f(x,t)\,dx\Big)\,dt\right)=0.$$

□

## 16. Свойства несобственных интегралов с параметром: непрерывность, дифференцируемость и интегрируемость.

Пусть $f\colon X \times [a,b) \to \mathbb{R}$. Если для каждого $x \in X$ сходится несобственный интеграл от $f$ по $[a,b)$, то функцию

$$F(x) = \int_a^b f(x,t)\,dt,$$

называют несобственным интегралом с параметром.

**Предложение 16.1.** *Предположим, что $X$ является подмножеством метрического пространства и $x_0$ – его предельная точка. Если $f(x,t)$ сходится к $\varphi(t)$ при $x \to x_0$ равномерно на $[a,c]$ для всякого $c \in [a,b)$ и интеграл $\int_a^b f(x,t)\,dt$ сходится равномерно, то $\varphi$ интегрируема в несобственном смысле на $[a,b)$ и верно равенство*

$$\lim_{x\to x_0} \int_a^b f(x,t)\,dt = \int_a^b \varphi(t)\,dt.$$

*Доказательство.* Пусть $b_n \to b$, $b_n < b$. Рассмотрим последовательность функций

$$F_n(x) = \int_a^{b_n} f(x,t)\,dt.$$

Выполняются следующие условия: 1) $F_n$ сходится равномерно к $F$ 2) при каждом $n$

$$\lim_{x\to x_0} F_n(x) = \int_a^{b_n} \varphi(t)\,dt.$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^{b_n} \varphi(t)\,dt = \lim_{x\to x_0} \int_a^b f(x,t)\,dt.$$

□

Далее $X$ совпадает или с отрезком $[c,d]$ или с полуинтервалом $[c,d)$.

**Теорема 16.1.** *Если $f$ непрерывна на $[c,d]\times[a,b)$ и несобственный интеграл $\int_a^b f(x,t)\,dt$ сходится равномерно, то $F$ непрерывна на $[c,d]$.*

*Доказательство.* Пусть $c_n \to b$. Функции $F_n(x) = \int_a^{c_n} f(x,t)\,dt$ непрерывны и равномерно сходятся к $F$. Следовательно, $F$ непрерывна. □

**Теорема 16.2.** *Предположим, что $f$ и $f_x$ непрерывны на $[c,d]\times[a,b)$ и несобственный интеграл $\int_a^b f_x(x,t)\,dt$ сходится равномерно. Если для некоторого $x_0 \in [c,d]$ несобственный интеграл $\int_a^b f(x_0,t)\,dt$ сходится, то это интеграл сходится равномерно на $[c,d]$, задаваемая им функция $F(x)$ непрерывно дифференцируема и верно равенство*

$$F'(x) = \int_a^b f_x(x,t)\,dt.$$

*Доказательство.* Пусть $c_n \to b$. Последовательность $F_n(x) = \int_a^{c_n} f(x,t)\,dt$ удовлетворяет следующим условиям: 1) числовая последовательность $F_n(x_0)$ сходится, 2) функциональная последовательность $F_n'(x)$ сходится равномерно к $\int_a^b f_x(x,t)\,dt$. Утверждение следует из теоремы о перестановочности предела и дифференцирования. □

**Теорема 16.3.** *Предположим, что* $f$ *непрерывна на* $[c,d]\times[a,b)$ *и несобственный интеграл* $F(x)=\int_a^b f(x,t)\,dt$ *сходится равномерно. Тогда* $F(x)$ *интегрируема на* $[c,d]$ *и верно равенство*

$$\int_c^d F(x)\,dx=\int_a^b\Big(\int_c^d f(x,t)\,dx\Big)\,dt.$$

*Доказательство.* Пусть $b_n\to b$ и $F_n(x)=\int_a^{b_n} f(x,t)\,dt$. По условию $F_n$ равномерно сходится к $F$. Следовательно, верно равенство

$$\int_c^d F(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\int_c^d F_n(x)\,dx.$$

Остается заметить, что

$$\int_c^d F_n(x)\,dx=\int_a^{b_n}\Big(\int_c^d f(x,t)\,dx\Big)\,dt.$$

□

**Теорема 16.4.** *Пусть* $f$ *непрерывна на* $[c,d)\times[a,b)$. *Предположим, что интегралы*

$$\int_a^b f(x,t)\,dt,\qquad \int_c^d f(x,t)\,dx$$

*сходятся равномерно на всяком отрезке из* $[c,d)$ *и* $[a,b)$ *соответственно, сходится интеграл*

$$\int_a^b\Big(\int_c^d |f(x,t)|\,dx\Big)\,dt.$$

*Тогда верно равенство*

$$\int_c^d\Big(\int_a^b f(x,t)\,dt\Big)\,dx=\int_a^b\Big(\int_c^d f(x,t)\,dx\Big)\,dt.$$

*Доказательство.* Пусть $u<d$. Имеем

$$\int_c^u\Big(\int_a^b f(x,t)\,dt\Big)\,dx=\int_a^b\Big(\int_c^u f(x,t)\,dx\Big)\,dt.$$

Осталось доказать, что в правой части можно перейти к пределу при $u\to d$. Положим

$$F(u,t)=\int_c^u f(x,t)\,dx.$$

Так как $|F(u,t)|\leqslant\int_c^d |f(x,t)|\,dx$, то по признаку Вейерштрасса интеграл $\int_a^b F(u,t)\,dt$ сходится равномерно. Кроме того, $F(u,t)$ равномерно сходится к $\int_c^d f(x,t)\,dx$. Следовательно, верно равенство

$$\lim_{u\to d}\int_a^b F(u,t)\,dt=\int_a^b\Big(\int_c^d f(x,t)\,dx\Big)\,dt.$$

□

## 17. Свертка функций и ее свойства. $\delta$-образные последовательности. Теорема Вейерштрасса.

Сверткой двух функций $f$ и $g$ называется выражение

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\,dt.$$

**Предложение 17.1.** *Пусть $f$ и $g$ определены на $\mathbb{R}$ и интегрируемы по Риману на всяком отрезке. Для существования свертки $f * g(x)$ достаточно выполнения хотя бы одного из следующих условий*

(i) *$f$ абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$ и $g$ ограничена;*

(ii) *$f^2$ и $g^2$ интегрируемы на $\mathbb{R}$;*

(iii) *хотя бы одна из функций $f$ и $g$ тождественно равна нулю вне некоторого отрезка (такую функцию называют финитной или функцией с компактным носителем).*

*Доказательство.* Пункты (i) и (ii) очевидны. Пункт (ii) следует из неравенства

$$2|fg| \leqslant f^2 + g^2.$$

□

**Предложение 17.2.** *Если существует $f*g(x)$, то существует $g*f(x)$ и $f*g(x) = g*f(x)$.*

*Доказательство.* Следует из формулы замены переменных. □

**Предложение 17.3.** *Если функция $f$ непрерывна и функция $g$ финитна и $k$-раз непрерывно дифференцируема, то $f * g$ является $k$-раз непрерывно дифференцируемой функцией и*

$$\Big(f * g\Big)^{(k)}(x) = f * (g^{(k)})(x).$$

*Доказательство.* Немедленно следует из теоремы о дифференцируемости интеграла с параметром. □

$\delta$-образной называется последовательность интегрируемых функций $\omega_n$, удовлетворяющая следующим свойствам:

(i) $\omega_n \geqslant 0$,

(ii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \omega_n\,dx = 1$,

(iii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{|x|>\delta} \omega_n\,dx = 0$ для всякого $\delta > 0$.

Примеры:

1) $\omega_n(x) = 0$ при $|x| > 1/(2n)$ и $\omega_n(x) = n$.

2) $\omega_n(x) = n\omega(nx)$, где $\omega \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\omega \geqslant 0$ и $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \omega\,dx = 1$.

3) $\omega_n(x) = (1-x^2)^n/c_n$, где $c_n = \displaystyle\int_0^1 (1-x^2)^n\,dx$, при $|x| \leqslant 1$ и $\omega_n(x) = 0$ при $|x| > 1$.

4) $\omega_n(x) = \cos^{2n} x/c_n$, где $c_n = \displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{2n} x\,dx$, при $|x| \leqslant \pi/2$ и $\omega_n(x) = 0$ при $|x| > \pi/2$.

**Предложение 17.4.** *Пусть функция $f$ непрерывна и ограничена на $\mathbb{R}$ и $\omega_n$ – $\delta$-образная последовательность. Тогда $f * \omega_n$ сходится к $f$ равномерно на всяком отрезке.*

*Доказательство.* Распишем разность $f * \omega_n$ и $f$:

$$|f * \omega_n(x) - f(x)| \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-t) - f(x)|\omega_n(t)\,dt.$$

Пусть $\sup|f| = M$ и $x \in [a,b]$. Тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-t) - f(x)|\omega_n(t)\,dt \leqslant 2M \int_{|t|>\delta} \omega_n(t)\,dt + \sup_{|t|<\delta} |f(x-t) - f(x)|.$$

Остается воспользоваться равномерной непрерывностью $f$ на отрезке. □

**Теорема 17.1.** (Вейерштрасс) *Пусть $f$ непрерывна на отрезке $[a,b]$. Для всякого $\varepsilon > 0$ существует многочлен $P_\varepsilon$ такой, что*

$$\sup_{[a,b]} |P_\varepsilon(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

*Более того, если непрерывная функция $f$ является $\tau$-периодической, то существует для всякого $\varepsilon > 0$ существует тригонометрический многочлен*

$$T_\varepsilon(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} [a_k \cos\Bigl(\frac{k\tau x}{2\pi}\Bigr) + b_k \sin\Bigl(\frac{k\tau x}{2\pi}\Bigr)$$

*такой, что*

$$\sup_{\mathbb{R}} |T_\varepsilon(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

*Доказательство.* Достаточно рассмотреть свертки с $\delta$-образными последовательностями из примеров 3) и 4). □

## 18. Критерий Вейля.

Будем говорить, что последовательность $\{x_n\}$ чисел из отрезка $[0,1]$ имеет *равномерное распределение*, если

$$\frac{L_n}{n} \to b - a,$$

где $L_n$ – количество чисел среди $x_1, \ldots, x_n$, принадлежащих $[a,b)$.

**Предложение 18.1.** *Последовательность $\{x_n\}$ имеет равномерное распределение тогда и только тогда, когда для всякой непрерывной функции $f$ на $[0,1]$ верно равенство*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_1) + \ldots + f(x_n)}{n} = \int_0^1 f(x)\,dx.$$

*Доказательство.* Предположим, что для всякой непрерывной функции $f$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_1) + \ldots + f(x_n)}{n} = \int_0^1 f(x)\,dx.$$

Достаточно показать, что это равенство верно для индикатора $f = \mathbb{I}_{[a,b)}$.

Найдем две непрерывные функции $g_\varepsilon$ и $h_\varepsilon$ такие, что

$$g_\varepsilon \leqslant \mathbb{I}_{[a,b)} \leqslant h_\varepsilon$$

и

$$(b-a) - \varepsilon \leqslant \int_0^1 g_\varepsilon\,dx \leqslant \int_0^1 h_\varepsilon\,dx \leqslant (b-a) + \varepsilon.$$

Для функций $g_\varepsilon$ и $h_\varepsilon$ пределы существуют и равны интегралам от них. Остается заметить, что

$$\frac{g_\varepsilon(x_1) + \ldots + g_\varepsilon(x_n)}{n} \leqslant \frac{\mathbb{I}_{[a,b)}(x_1) + \ldots + \mathbb{I}_{[a,b)}(x_n)}{n} \leqslant \frac{h_\varepsilon(x_1) + \ldots + h_\varepsilon(x_n)}{n}.$$

Предположим теперь, что $\{x_n\}$ имеет равномерное распределение. Пусть задано некоторое разбиение $[a,b)$ на полуинтервалы $\Delta_i$ и функция $f$ постоянна на каждом таком полуинтервале $\Delta_i$ и равна $m_i$. Пусть $L_n^i$ – количество элементов из набора $x_1,\dots,x_n$, которые попали в $\Delta_i$. Тогда

$$\frac{f(x_1)+\ldots+f(x_n)}{n}=\sum_i \frac{L_n^i}{n}\cdot m_i \to \sum_i m_i|\Delta_i| = \int_0^1 f(x)\,dx.$$

Для завершения доказательства достаточно заметить, что всякую непрерывную функцию можно равномерно приблизить кусочно постоянной функцией. □

Отметим, что в доказанном утверждении можно дополнительно требовать от функции $f$ условия $f(0)=f(1)$, т.е. считать, что $f$ непрерывная функция с периодом 1.

**Следствие 18.1.** (Критерий Вейля) *Последовательность* $\{x_n\}$ *имеет равномерное распределение тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{2\pi i m x_k}=0.$$

*для всякого целого* $m\neq 0$.

*Доказательство.* Это утверждение выводится из предыдущего с помощью теоремы Вейерштрасса о равномерном приближения произвольной непрерывной 1-периодической функции $f$ на $[0,1]$ тригонометрическим многочленом. □

Важный пример равномерно распределенной последовательности: $\{na\}$, где $a$ – иррациональное число. Для такой последовательности указанная в критерии Вейля сумма вычисляется очень просто – сумма геометрической прогрессии.

Рассмотрим пример: *распределение первых цифр степеней двойки.*

Может ли $2^n$ начинаться с 3? Каких степеней $2^n$ больше тех, которые начинаются с 3, или тех, которые начинаются с 7?

Число $2^n$ начинается с цифры $A$ тогда и только тогда, когда найдется такое целое неотрицательное число $k$, что

$$A10^k \leqslant 2^n < (A+1)10^k.$$

Эти неравенства можно переписать так $\log_{10} A \leqslant n\log_{10}2-k \leqslant \log_{10}(A+1)$ Так как последовательность $\{n\log_{10}2\}$ равномерно распределена, то частота выполнения этих неравенств стремится к $\log_{10}(1+1/A)$. В частности для тройки и семерки $\log_1 0(1+1/3) > \log_1 0(1+1/7)$ и, следовательно, степени двойки чаще начинаются с тройки.

## 19. Ортонормированные системы. Коэффициенты Фурье.

Пусть $E$ – линейное пространство над $\mathbb{R}$. Если задана функция $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle\colon E\times E\to\mathbb{R}$ такая, что

(i) $\langle x,x\rangle\geqslant 0$ и $\langle x,x\rangle=0$ тогда и только тогда, когда $x=0$,

(ii) $\langle x,y\rangle=\langle y,x\rangle$,

(iii) $\langle \alpha x+\beta y,z\rangle=\alpha\langle x,z\rangle+\beta\langle y,z\rangle$,

то $E$ называется евклидовым пространством. Если рассматривается линейное пространство на $\mathbb{C}$, то второе свойство надо заменить на равенство $\langle x,y\rangle=\overline{\langle y,x\rangle}$.

**Предложение 19.1.** *Верно неравенство Коши–Буняковского*

$$|\langle x,y\rangle|\leqslant\sqrt{\langle x,x\rangle}\sqrt{\langle y,y\rangle}.$$

*Доказательство.* Если ограничить это скалярное произведение на плоскость, натянутую на $x$ и $y$, то получим скалярное произведение на $\mathbb{R}^2$, про которое данное неравенство хорошо известно. $\square$

Евклидово пространство является нормированным с нормой $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

Векторы $x$ и $y$ ортогональны, если $\langle x, y\rangle = 0$.

**Предложение 19.2.** (Теорема Пифагора) *Если вектора $x$ и $y$ ортогональны, то* $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

Набор векторов $\{e_k\}_k$ называется *ортонормированной* системой векторов, если $\|e_i\| = 1$ и $\langle e_i, e_j\rangle = 0$ для всех $i$ и $j$. Для всякого вектора $x$ число $x_i = \langle x, e_i\rangle$ называется коэффициентом Фурье.

**Лемма 19.1.** *Пусть $L$ натянуто на ортонормированные векторы $e_1, e_2, \ldots, e_N$. Вектор $x - (x_1e_1 + \ldots + x_ne_n)$ ортогонален пространству $L$. Более того, верно равенство*

$$\|x - (x_1e_1 + \ldots + x_ne_n)\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2.$$

*Доказательство.* Достаточно заметить, что

$$\langle x - (x_1e_1 + \ldots + x_ne_n), e_i\rangle = x_i - x_i = 0.$$

$\square$

**Теорема 19.1.** *Пусть линейное пространство $L$ является линейной оболочкой ортонормированных векторов $e_1, e_2, \ldots, e_N$. Тогда*

$$\min_{y\in L} \|x - y\| = \|x - (x_1e_1 + \ldots + x_ne_n)\|.$$

*Доказательство.* Пусть $y = c_1e_1 + \ldots + c_ne_n$. Имеем

$$\|x - y\|^2 = \|x - (x_1e_1 + \ldots + x_ne_n)\|^2 + \sum_{i=1}^{n}(c_i - x_i)^2 \geqslant \|x - (x_1e_1 + \ldots + x_ne_n)\|^2.$$

$\square$

**Следствие 19.1.** (Неравенство Бесселя) *Пусть $\{e_k\}_k$ – ортонормированная система. Для всякого вектора $x$ верно неравенство*

$$\sum_k |x_k|^2 \leqslant \|x\|^2.$$

Пусть заданы векторы $v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots$ и $L$ – линейная оболочка этих векторов. Простым способом построения ортонормированных векторов с той же линейной оболочкой $L$ является процедура *ортогонализации Грама–Шмидта*. Полагаем $e_1 = v_1/\|v_1\|$. Если уже построены ортонормированные векторы $e_1, \ldots, e_n$ такие, что их линейная оболочка совпадает с линейной оболочкой $v_1, \ldots, v_n$, то $e_{n+1}$ строим следующим образом:

$$e_{n+1} = \lambda\Big(v_{n+1} - \sum_{i=1}^{n}\langle v_{n+1}, e_i\rangle e_i\Big),$$

где число $\lambda$ выбирается так, что $\|e_{n+1}\| = 1$.

## 20. Полнота и замкнутость системы векторов. Равенство Парсеваля.

Система векторов *полна*, если замыкание линейной оболочки этих векторов совпадает со всем пространством $E$. Система векторов *замкнута*, если единственным ортогональным вектором к этой системе является нулевой.

**Теорема 20.1.** *Пусть $\{e_k\}$ – ортонормированная система векторов. Следующие утверждения эквивалентны:*

(i) $x = \sum_k x_k e_k$ *для всякого вектора $x$,*

(ii) $\{e_k\}$ – *полная система векторов,*

*Доказательство.* Пункт (ii) из пункта (i) следует так как всякий вектор $x$ приближается частичными суммами ряда $\sum_k x_k e_k$. Из (ii) выведем (i). Если $y$ лежит в линейной оболочке $e_1, \ldots, e_n$, то

$$\|x - (x_1e_1 + \ldots + x_ne_n)\| \leqslant \|x - y\|.$$

Следовательно, приближая такими $y$ вектор $x$ получаем сходимость частичных сумм ряда $\sum_k x_k e_k$. □

**Теорема 20.2.** *Если $x = \sum_k x_k e_k$ тогда и только тогда, когда $\|x\|^2 = \sum_k |x_k|^2$. Если $E$ полное пространство и числовая последовательность $c_k$ такова, что $\sum_k |c_k|^2 < \infty$, то ряд $\sum_k c_k e_k$ сходится к некоторому вектору $x$ и $c_k = x_k$.*

*Доказательство.* Первое утверждение следует из равенства

$$\|x - (x_1e_1 + \ldots + x_ne_n)\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |x_k|^2.$$

Второе утверждение следует из критерия Коши и равенства

$$\Big\| \sum_{k=m+1}^{n} c_k e_k \Big\|^2 = \sum_{k=m+1}^{n} |c_k|^2.$$

□

**Предложение 20.1.** *Из полноты следует замкнутость. Если пространство полное, то из замкнутости следует полнота.*

*Доказательство.* Пусть система векторов $\{e_k\}$ полна и $\langle x, e_k\rangle = 0$ для всех $k$. Тогда для всякого $y$ из линейной оболочки $\{e_k\}$ верно $\langle x, y\rangle = 0$. По условию найдется $y_n \to x$ и

$$\langle x, x\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle x, y_n\rangle = 0.$$

В случае, когда пространство полное, из замкнутости следует равенство $x = \sum_k x_k e_k$ для всякого $x$, так как $\langle x - \sum_k x_k e_k, e_m\rangle = 0$ для всех $m$. □

Полное евклидово пространство называется *гильбертовым.*

Выражение $\sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k$, где $x_k = \langle x, e_k\rangle$ и $\{e_k\}$ – ортонормированная система векторов, называется *рядом Фурье.* Равенство $\|x\|^2 = \sum_k |x_k|^2$ называется равенством Парсеваля.

Важным примером полной ортонормированной системы является система функций

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx$$

в евклидовом пространстве $R_2[0, 2\pi]$ интегрируемых по Риману функций на $[0, 2\pi]$ со скалярным произведением

$$\langle f, g\rangle = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)\,dx.$$

Традиционно ряд Фурье по этой системе записывают в виде

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\Big[a_k\cos kx+b_k\sin kx\Big],$$

где

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos kx\,dx,\quad b_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin kx\,dx.$$

**Теорема 20.3.** *Для всякой функции $f\in R_2[0,2\pi]$ ее ряд Фурье*

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\Big[a_k\cos kx+b_k\sin kx\Big]$$

*сходится к $f$ по норме* $\|f\|=\Big(\int_0^{2\pi}f^2(x)\,dx\Big)^{1/2}$.

*Доказательство.* По теореме Вейерштрасса система функций $1,\cos kx,\sin kx$ является полной. □

Другой важный пример ортонормированной системы доставляют полиномы Лежандра $P_n(t)$, которые можно получить с помощью ортогонализации Грама–Шмидта векторов $1,x,x^2,\ldots$ в евклидовом пространстве $R_2[-1,1]$.

## 21. Лемма Римана. Ядро Дирихле. Поточечная и равномерная сходимость тригонометрических рядов Фурье.

**Лемма 21.1.** (Риман) *Для всякой интегрируемой по Риману функции $f$ на $[a,b]$ верны равенства*

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\cos(\lambda x)\,dx=0,\quad \lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\sin(\lambda x)\,dx=0.$$

*Доказательство.* Так как

$$\Big|\int_a^b f(x)\cos(\lambda x)\,dx-\int_a^b g(x)\cos(\lambda x)\,dx\Big|\leqslant\int_a^b|f(x)-g(x)|\,dx,$$

то можно приблизить $f$ гладкой функцией и доказывать требуемое утверждение только для гладкой $f$. Интегрируя по частям, приходим к равенству

$$\int_a^b f(x)\cos(\lambda x)\,dx=\frac{f(b)\sin(\lambda b)-f(a)\sin(\lambda b)}{\lambda}-\frac{1}{\lambda}\int_a^b f'(x)\sin(\lambda x)\,dx.$$

Остается заметить, что правая часть оценивается сверху выражением

$$\frac{|f(a)|+|f(b)|}{\lambda}+\frac{1}{\lambda}\int_a^b|f'(x)|\,dx,$$

которое стремится к нулю при $\lambda\to\infty$. □

Пусть $f$ интегрируема на $[0,2\pi]$ и $a_k,b_k$ – коэффициенты Фурье $f$ по тригонометрической системе. Заметим, что

$$a_k\cos kx+b_k\sin kx=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\cos(k(x-t))\,dt$$

и

$$\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\ldots+\cos nx=\frac{\sin((n+1/2)x)}{2\sin x/2}.$$

Функция

$$D_n(x)=\frac{\sin((n+1/2)x)}{\sin x/2},\quad D_n(2\pi m)=2n+1,$$

называется ядром Дирихле. С помощью $D_n$ частичную сумму ряда Фурье можно записать в следующем виде

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)D_n(x-t)\,dt.$$

Легко проверить, что $D_n$ является $2\pi$ периодической функцией и

(i) $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} D_n(t)\,dt = 1$,

(ii) для всякого $\delta > 0$ выполнено $\displaystyle\int_\delta^\pi D_n(t)\,dt \to 0$ при $n\to\infty$.

Пусть теперь $f$ является $2\pi$ периодической функцией. Тогда

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}(f(x+t)+f(x-t))D_n(t)\,dt.$$

Отметим, что всегда можно продолжить функцию $f$ вне $[0, 2\pi]$ до периодической функции с периодом $2\pi$.

Далее в этом разделе всегда предполагаем функции $2\pi$ периодическими и интегрируемыми на $[0, 2\pi]$.

**Теорема 21.1.** (Принцип локализации) *Если функции $f$ и $g$ совпадают в некоторой окрестности точки $x_0$, то их тригонометрические ряды Фурье сходятся или расходятся в этой точке одновременно, а если сходятся, то суммы в точке $x_0$ совпадают.*

*Доказательство.* Следует из приведенного выше представления и леммы Римана. □

**Теорема 21.2.** (Достаточное условие сходимости в точке) *Предположим, что*

$$|f(x_0) - f(x)| \leqslant C|x_0 - x|^\gamma.$$

*Тогда тригонометрический ряд Фурье функции $f$ сходится к ней в точке $x_0$.*

*Доказательство.* Имеет место равенство

$$|S_n(x_0) - f(x_0)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_0^\pi (f(x_0+t)+f(x_0-t)-2f(x_0))\frac{\sin((n+1/2)t)}{\sin t/2}\,dt\right|.$$

Пусть $\delta > 0$. Правая часть оценивается сверху выражением

$$\frac{C}{\pi}\int_0^\delta \frac{t^\gamma}{\sin t/2}\,dt + \frac{1}{2\pi}\left|\int_\delta^\pi \Big(\frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)-2f(x_0)}{\sin t/2}\Big)\sin((n+1/2)t)\,dt\right|,$$

в котором первое слагаемое можно сделать сколь угодно малым с помощью выбора $\delta$, а второе слагаемое стремится к нулю при $n\to\infty$ по лемме Римана. □

Основная техническая трудность обоснования поточечной сходимости ряда Фурье связана с тем, что ядро Дирихле не является $\delta$-образной последовательностью. Функцию

$$F_n(t) = \frac{1}{n+1}\Big(D_0(t) + \ldots + D_n(t)\Big)$$

называют ядром Фейера. Замечательным образом оказывается, что функция $\omega_n(t) = (2\pi)^{-1}F_n(t)$ при $|t| \leqslant \pi$ и $\omega_n(t) = 0$ при $|t| > \pi$ является $\delta$-образной последовательностью. Так как

$$\Sigma_n(x) = \frac{1}{n+1}\Big(S_0(x) + \ldots + S_n(x)\Big) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)F_n(t)\,dt,$$

то для всякой непрерывной $2\pi$ периодической функции $f$ последовательность $\Sigma_n$ сходится равномерно к $f$.

**Лемма 21.2.** *Если $2\pi$ периодическая функция $f$ непрерывно дифференцируема, то*

$$a_n(f') = nb_n(f), \quad b_n(f') = -na_n(f)$$

*Доказательство.* Равенства следуют из интегрирования по частям. □

**Следствие 21.1.** *Если $2\pi$ периодическая функция $f$ $k$-раз непрерывно дифференцируема, то*

$$|a_n(f)| = \frac{\alpha_n}{n^k}, \quad |b_n(f)| = \frac{\beta_n}{n^k},$$

*причем* $\sum_n \alpha_n^2 < \infty$ *и* $\sum_n \beta_n^2 < \infty$.

*Доказательство.* Достаточно применить равенства из леммы и неравенство Бесселя. □

**Теорема 21.3.** *Если $2\pi$ периодическая функция $f$ $k$ раз непрерывно дифференцируема, то ряд Фурье $f$ на $[0, 2\pi]$ сходится к $f$ абсолютно и равномерно, причем*

$$\sup |f(x) - S_n(x)| \leqslant \frac{\gamma_n}{n^{k-1/2}}, \quad \gamma_n \to 0.$$

*Доказательство.* Поточечная сходимость очевидна. Равномерная сходимость следует из оценки

$$\sum_{m=n+1}^{\infty} \Big[m^{-k}|\alpha_m||\cos(mx)| + m^{-k}|\alpha_m||\sin(mx)|\Big] \leqslant \Big(\sum_{m=n+1}^{\infty} m^{-2k}\Big)^{1/2} \Big(\sum_{m=n+1}^{\infty} (|\alpha_n| + |\beta_n|)^2\Big)^{1/2}.$$

□

## 22. Преобразование Фурье быстро убывающих функций.

Выражение

$$\widehat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{ixy}\, dx$$

называется *преобразованием Фурье* функции $f$. Для существования преобразования Фурье достаточно абсолютной интегрируемости $f$ на $\mathbb{R}$. Однако далее мы обсуждаем лишь преобразование Фурье быстро убывающих функций. Обозначим через $S$ множество гладких функций $f$ (со значениями в $\mathbb{C}$) таких, что для всяких $m, k$

$$\sup_{\mathbb{R}} (1 + |x|^k)|f^{(m)}(x)| < \infty.$$

Множество $S$ называют пространством быстро убывающих функций.

Выражение

$$\check{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ixy}\, dx$$

называют *обратным преобразованием Фурье.*

**Теорема 22.1.** *Пусть $f, g \in S$. Тогда*

(i) $\widehat{f'}(y) = iy\widehat{f}(y)$,

(ii) $\widehat{f * g} = \sqrt{2\pi}\widehat{f} \cdot \widehat{g}$,

(iii) $\check{\widehat{f}} = f$,

(iv) *преобразование Фурье* $e^{-x^2/2}$ *равно* $e^{-x^2/2}$.

**Теорема 22.2.** *Преобразование Фурье является изометрией евклидова пространства $S$ со скалярным произведением*

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{g(x)}\, dx.$$

В качестве иллюстрации к преобразованию Фурье и рядам Фурье приведем классическую *формулу Пуассона.*

Для быстро убывающих функций $f$ имеет место равенство:

$$\sqrt{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x+2\pi n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n)e^{inx}.$$

Эта формула верна и при более слабых условиях на $f$, в частности для функции $f(x) = (a^2+x^2)^{-1}$, где $a>0$. Преобразование Фурье функции $(a^2+x^2)^{-1}$ равно

$$\sqrt{\frac{\pi}{2a^2}}e^{-|ax|}.$$

Следовательно, по формуле суммирования Пуассона при $x=0$

$$\frac{\sqrt{2\pi}}{a^2} + 2\sqrt{2\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{a^2+(2\pi n)^2} = \sqrt{\frac{\pi}{2a^2}} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{\pi}{2a^2}}e^{-an}.$$

Получаем равенство

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{a^2+(2\pi n)^2} = \frac{1}{4a} - \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{2a}\frac{e^{-a}}{1-e^{-a}}.$$

Если в этом равенстве устремить $a\to 0$, то получим $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

## Литература

1. Зорич В.А.Математический анализ. – М.:МЦНМО,2007.
2. Фихтенгольц Г.М.Курс дифференциального и интегрального исчисления. – М.:Наука, 1969.
3. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.:МГУ,Наука, 2004.
4. Ландо С.К. Лекции о производящих функциях. – М.:МЦНМО, 2007.