Программа коллоквиума по математическому анализу
I курс, весенний семестр 2018 года
лектор С.В.Шапошников

(1) Первообразная. Неопределенный интеграл и его свойства: линейность, формула интегрирования по частям и формула замены переменных.
(2) Таблица интегралов элементарных функций. Интегрирование рациональных функций и функций, сводящихся к рациональным.
(3) $\mathbb{R}^n$ – линейное, евклидово, нормированное и метрическое пространство. Неравенство Коши–Буняковского–Шварца.
(4) Метрические пространства. Предел последовательности. Сходимость последовательностей в $\mathbb{R}^n$: покоординатная сходимость и теорема Больцано.
(5) Нормированные пространства. Эквивалентность норм в $\mathbb{R}^n$.
(6) Полные пространства. Полнота $\mathbb{R}^n$ и пространства $B(X)$ ограниченных функций.
(7) Неметризуемость поточечной сходимости в $B[0,1]$.
(8) Равномерная сходимость. Признак Вейерштрасса. Полнота пространства непрерывных функций $C[a,b]$.
(9) Равномерная сходимость и дифференцируемость. Полнота пространства $C^k[a,b]$.
(10) Открытые и замкнутые множества и их свойства. Предельные и граничные точки. Равносильные определения замкнутости. Замкнутость конечномерного подпространства.
(11) Компакт в метрическом пространстве его свойства.
(12) Компактность бруса в $\mathbb{R}^n$. Критерий компактности в $\mathbb{R}^n$.
(13) Компактность шара в нормированном пространстве влечет конечномерность этого пространства.
(14) Предел функции, отображающей метрическое пространство в метрическое или нормированное пространство. Равносильность определений Коши и Гейне. Критерий Коши существования предела.
(15) Непрерывность функции, отображающей метрическое пространство в метрическое или нормированное пространство. Равносильные определения непрерывности. Непрерывность композиции непрерывных функций.
(16) Глобальные свойства непрерывных функций: прообраз открытого множества является открытым множеством, образ компакта является компактом.
(17) Теорема Вейерштрасса. Теорема Кантора о равномерной непрерывности.
(18) Связные множества в метрическом пространстве. Связность и теорема о промежуточном значении. Связные множества на числовой прямой.
(19) Линейно связные пространства. Линейная связность открытых связных множеств в нормированном пространстве.
(20) Непрерывность линейных отображений. Вид линейного отображения из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$.
(21) Дифференцируемые отображения нормированных пространств. Единственность дифференциала. Непрерывность дифференцируемого отображения.
(22) Дифференцируемые функции из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}$. Градиент функции. Частные производные. Достаточное условие дифференцируемости.
(23) Дифференцируемые отображения из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$ и матрица Якоби.
(24) Основные правила дифференцирования: линейность, правило Лейбница, дифференцирование сложной функции.
(25) Переформулировка теоремы о дифференцировании сложной функции для функций из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$. Случай $m = 1$ и инвариантность первого дифференциала. Производная вдоль вектора. Экстремальное свойство градиента функции.
(26) Дифференцирование обратной функции.
(27) Теорема о сжимающем отображении.

(28) Теорема об обратной функции.
(29) Теорема о неявной функции.
(30) Теорема о функциональной зависимости.

Задачи

(1) Пусть матрицы A и B симметричны, причем $\langle Ax, x\rangle \geq 0$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$. Докажите неравенство:
$$|\mathrm{tr}(AB)|^2 \leq \mathrm{tr} A\, \mathrm{tr}(AB^2).$$
(2) Пусть D – открытое связное множество (область) на плоскости и $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Известно, что $\frac{\partial f}{\partial x} \equiv 0$ в D. Можно ли утверждать, что f не зависит от x в D?
(3) Приведите пример такой функции $f(x, y)$, имеющей в точке $(0, 0)$ производные $\frac{\partial f}{\partial h}$ вдоль всякого вектора h, что отображение $h \mapsto \frac{\partial f}{\partial h}$ не является линейным.
(4) Пусть M_n – пространство вещественных матриц $n \times n$. Найдите дифференциалы следующих отображений из M_n в $\mathbb{R}$ или M_n:
(a) $X \mapsto \mathrm{tr}\, X$ (b) $X \mapsto \det X$, (c) $X \mapsto X^2$, (d) $X \mapsto X^{-1}$.
(5) Постройте пример полного метрического пространства (X, ϱ) и функции f из X в X таких, что $\varrho(f(x), f(y)) < \varrho(x, y)$, но у f нет неподвижной точки.
(6) Придайте смысл равенству
$$\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z} = -1$$
и обоснуйте его.
(7) Рассмотрим уравнение $x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \ldots + c_1 x + c_0 = 0$. Пусть U – множество в $\mathbb{R}^n$ таких векторов $(c_{n-1}, \ldots, c_0)$, что уравнение имеет n различных вещественных корней. Из теоремы Виета известно, что $c_k = c_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где x_i – корни уравнения. Докажите, что для каждой точки $a \in U$ найдется окрестность, в которой $x_i = x_i(c_0, \ldots, c_n)$, причем корни x_i гладко зависят от коэффициентов c_i. Докажите, что U является открытым множеством в $\mathbb{R}^n$.