Парковка автомобиля к тротуару

В.А.Зорич

11.04.2016 (Фрагмент для слушателей спецкурса
«Математические аспекты термодинамики»)

1. Задача и её конкретизация.

В качестве иллюстрации применения того геометрического аппарата, который мы описали в связи с вопросами классической термодинамики, рассмотрим в математическом аспекте задачу парковки автомобиля к тротуару.

Нетривиальность вопроса состоит в том, что автомобиль, даже будучи расположен параллельно тротуару, но не вплотную к нему, не может просто параллельно самому себе (поперёк себя) придвинуться к тротуару. Для этого автомобиль, как хорошо известно, совершает некоторые нетривиальные движения, итогом которых и является желаемая парковка к тротуару.

Чтобы перейти к математическому описанию задачи сделаем некоторые исходные предположения и допущения.

Длина автомобиля считается известной. Шириной автомобиля пренебрежём. Кроме того, для определённости будем считать, что ведущими являются передние колёса автомобиля.

В нашем распоряжении следующие управления: можно менять угол передних колёс по отношению к оси автомобиля, и можно заставлять передние колёса вращаться в ту или иную сторону, приводя автомобиль в движение и переводя его в новое положение.

Вот, собственно, и всё.

2. Параметры состояния и управления.

Положение автомобиля длиной l в плоскости (x, y), с учётом текущего расположения передних колёс автомобиля, опишем следующими параметрами:

(x, y) — координаты передней точки (точки закрепления передних колёс) автомобиля;

θ — угол, который составляет направление оси автомобиля с осью x — тротуаром.

ϕ — угол, на который в данный момент повёрнуты передние колёса по отношению к направлению оси автомобиля.

При таком описании движение автомобиля интерпретируется движением точки (x, y, θ, ϕ) в четырёхмерном пространстве $\mathbb{R}^4$ (с учётом естественных ограничений на допустимые углы).

3. Описание неголономных связей.

Опишем возможные направления вектора скорости $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\theta}, \dot{\phi})$ и ограничения, накладываемые условиями движения.

В любом состоянии (x, y, θ, ϕ) мы, работая рулём, вправе менять положение передних колёс, поэтому смещение из состояния (x, y, θ, ϕ) в направлении $(0, 0, 0, 1)$, то есть по вектору $\partial_\phi = \frac{\partial}{\partial \phi}$ допустимо. Для краткости назовём такое движение (управление) *руль*.

Из фиксированного состояния (x, y, θ, ϕ) можно выйти вторым доступным нам способом, включив вращение передних колёс. Назовём это движение (управление) *ход*.

Будем считать, что мы включаем *ход* на скорости 1. Ясно, что, если при передние колёса смотрят не вдоль оси автомобиля, то будут меняться не только координаты (x, y), но и угол θ.

Подсчитав, получим: $\dot{x} = 1 \cos\phi cos\theta, \quad \dot{y} = 1 \cos\phi \sin\theta \quad \dot{\theta} = \frac{1}{l}\sin\phi.$

Таким образом, результирующий вектор скорости движения *ход* имеет вид: $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\theta}, \dot{\phi}) = \cos\phi\cos\theta\ \partial_x + \cos\phi\sin\theta\ \partial_y + \frac{\sin\phi}{l}\ \partial_\theta + 0\ \partial_\phi.$

4. Скобки Ли и соединимость состояний.

Итак, в четырёхмерном пространстве мы имеем распределение двумерных плоскостей, порождённое двумя векторными полями, соответствующими движениям (управлениям) *руль* и *ход*.

Теперь, чтобы убедиться в возможности перевести автомобиль из данного состояния в любое другое, достаточно подсчитать последовательные скобки Ли полей, задающих распределение и проверить, что они линейно порождают всё касательное пространство.

Прямой подсчёт первой скобки [руль, ход] , которую мы назовём *парк*, даёт поле $-\sin\phi\cos\theta\ \partial_x - \sin\phi\sin\theta\ \partial_y + \frac{\cos\phi}{l}\ \partial_\theta$.

Если подсчитать вторую скобку [ход, [руль, ход]] = [ход, парк], то получим $\frac{1}{l}(\sin\theta\ \partial_x - \cos\theta\ \partial_y)$.

Заметим, что этот вектор направлен перпендикулярно направлению корпуса автомобиля, поэтому, если автомобиль стоял параллельно тротуару, то мы уже имеем возможности его параллельной парковки.

Два вектора управления $(0,0,0,1)$, $(\cos\phi\cos\theta, \cos\phi\sin\theta, \frac{\sin\phi}{l}, 0)$ и их повторные скобки $(-\sin\phi\cos\theta, \sin\phi\sin\theta, \frac{\cos\phi}{l}, 0)$ $(\frac{1}{l}\sin\theta, \frac{1}{l}\cos\theta, 0, 0)$ линейно независимы ибо, как можно проверить, определитель составленной из них матрицы не равен нулю, точнее, он равен $\frac{1}{l}$. В соответствием с общей теорией это означает, что из любого начального состояния автомобиль можно перевести в любое предписанное конечное состояние.

5. Неголономные связи на языке форм.

Рассмотренное выше двумерное распределение в пространстве $\mathbb{R}^4$ (точнее, в области параметров (x, y, θ, ϕ)), порождённое векторными полями $(0,0,0,1)$ и $(\cos\phi\cos\theta, \cos\phi\sin\theta, \frac{\sin\phi}{l}, 0)$, можно задать парой независимых 1-форм ω_1, ω_2.

Например, подойдут формы

$\omega_1 = \sin\theta dx - \cos\theta dy$ и $\omega_2 = \cos\theta dx + \sin\theta dy - l\cos\phi d\theta$.

Непосредственно видно, что исходные векторы лежат в нулевом пространстве (ядре) каждой из этих независимых форм.

Подсчитав произведение $\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge d\omega_2 = (l\sin\phi)dx \wedge dy \wedge d\phi \wedge d\theta \not\equiv 0$ на основании критерия Фробениуса, конечно, вновь убеждаемся в неинтегрируемости исходного распределения.

6. Дополнительная информация.

Задача: рассмотрите парковку автомобиля с прицепом (парой прицепов, ...).

Литература близкой тематики:

Peter W. Michor
Topics in Differential Geometry. (page 40)

Robert W. Batterman
Falling Cats, Parallel Parking and Polarized Light.
Ohio State University

Richard Montgomery
Gauge Theory of the Falling Cat.
Fields Institute Communications. Volume 1.