Неравенство Белла, его физические истоки и обобщение

(штрихи к ЭПР-парадоксу)

В.А. Зорич

Аннотация

Даётся одно математическое обобщение известного неравенства Белла, возникшего в связи с анализом классического парадокса Эйнштейна-Подольского-Розена (ЭПР-парадокса).

1. Исходное неравенство Белла и его вариации.

a. Неравенство Белла.

Если случайные величин ξ, η, ζ по модулю не превосходят единицы, то справедливо следующее неравенство Белла:

$$|E\xi\zeta - E\eta\zeta| \leq 1 - E\xi\eta.$$

Эту формулировку можно найти в книге [9]. Здесь, как это обычно принято в теории вероятностей, символ E означает математическое ожидание (expectation) соответствующей случайной величины.

Элементарное чисто алгебраическое неравенство, прямым следствием которого является вероятностное неравенство Белла, состоит в том, что если действительные числа ξ, η, ζ таковы, что $|\xi| \leq 1, |\eta| \leq 1, |\zeta| \leq 1$, то $\xi(1+\eta) \leq 1+\eta$; тогда $\xi - \eta \leq 1 - \xi\eta$ и $|\xi\zeta - \eta\zeta| \leq 1 - \xi\eta$.

b. Неравенство Клаузера-Хорна-Шимони-Хольта.

Более удобным для физических рассмотрений оказалось вытекающее из неравенства Белла следующее неравенство Клаузера-Хорна-Шимони-

Хольта [4],[6][1]

$$|EX_1Y_1 + EX_1Y_2 + EX_2Y_1 - EX_2Y_2| \leq 2$$

для четырёх случайных величин, по модулю не превосходящих единицы.

c. Обобщение неравенств Белла.

Получим теперь обобщение этих неравенств на случай произвольного количеств действительных чисел и случайных величин.

Утверждение. *Если* $|X_k| \leq 1$, $k = 0, 1, ..., n$, *то при* $n \geq 2$

$$|X_0X_1 - X_{n-1}X_n| \leq (n-1) - \sum_{k=0}^{n-2} X_kX_{k+2}$$

и при $n \geq 3$

$$|X_0X_1 - X_{n-1}X_n + \sum_{k=0}^{n-2} X_kX_{k+2}| \leq n - 1.$$

Следовательно, если $|X_k| \leq 1$, $k = 0, 1, ..., n$, *то при* $n \geq 2$ *всегда*

$$|EX_0X_1 - EX_{n-1}X_n| \leq (n-1) - \sum_{k=0}^{n-2} EX_kX_{k+2}$$

и при $n \geq 3$ *всегда*

$$|EX_0X_1 - EX_{n-1}X_n + \sum_{k=0}^{n-2} EX_kX_{k+2}| \leq n - 1.$$

Доказательство. Докажем приведённые неравенства пошаговым применением неравенства Белла со спуском по номерам:

$$X_0X_1 - X_{n-1}X_n + \sum_{k=0}^{n-2} X_kX_{k+2} =$$

$$X_0X_1 + \sum_{k=0}^{n-3} X_kX_{k+2} + X_{n-2}X_n - X_{n-1}X_n \leq$$

$$X_0X_1 + \sum_{k=0}^{n-3} X_kX_{k+2} - X_{n-2}X_{n-1} + 1 \leq ...$$

$$X_0X_1 - X_0X_1 + (n-1) = n - 1.$$

[1] Вероятно, это соотношение у физиков больше ассоциируется с понятием неравенства Белла, чем то исходное, которое неравенством Белла называют математики.

Меняя знаки у $X_0, X_3, X_4, X_7, X_8, X_{11}, X_{12}, ...$, изменим знак левой части доказанного неравенства, не меняя знака правой.

Поэтому, если $|X_k| \leq 1$, $k = 0, 1, ..., n$, то при $n \geq 3$

$$-(n-1) \leq X_0X_1 - X_{n-1}X_n + \sum_{k=0}^{n-2} X_kX_{k+2} \leq n-1,$$

и

$$|X_0X_1 - X_{n-1}X_n + \sum_{k=0}^{n-2} X_kX_{k+2}| \leq n-1,$$

а также

$$|EX_0X_1 - EX_{n-1}X_n + \sum_{k=0}^{n-2} EX_kX_{k+2}| \leq n-1.$$

Меняя знаки у $X_0, X_2, X_4, X_6, X_8, ...$, из уже доказанного неравенства

$$X_0X_1 - X_{n-1}X_n \leq (n-1) - \sum_{k=0}^{n-2} X_kX_{k+2} \ ,$$

которое при $n = 2$ сводится к неравенству Белла, получим соотношение

$$-(X_0X_1 - X_{n-1}X_n) \leq (n-1) - \sum_{k=0}^{n-2} X_kX_{k+2} \ ,$$

поэтому, если $|X_k| \leq 1$, $k = 0, 1, ..., n$, то при $n \geq 2$

$$|X_0X_1 - X_{n-1}X_n| \leq (n-1) - \sum_{k=0}^{n-2} X_kX_{k+2} \ ,$$

а также

$$|EX_0X_1 - EX_{n-1}X_n| \leq (n-1) - \sum_{k=0}^{n-2} EX_kX_{k+2} \ .$$

Это обобщение исходного неравенства Белла $|E\xi\zeta - E\eta\zeta| \leq 1 - E\xi\eta$.

Второе из приведённых в сформулированном выше утверждении неравенств в частном случае, когда $n = 3$, даёт

$$|X_0X_1 - X_2X_3 + X_0X_2 + X_1X_3| \leq 2.$$

Введя здесь обозначения $(X_0, X_1, X_2, X_3) = (X_1, Y_1, Y_2, X_2)$, получим

$$|X_1Y_1 + X_1Y_2 + X_2Y_1 - X_2Y_2| \le 2$$

Отсюда следует неравенство Клаузера-Хорна-Шимони-Хольта

$$|EX_1Y_1 + EX_1Y_2 + EX_2Y_1 - EX_2Y_2| \le 2$$

для четырёх случайных величин, по модулю не превосходящих 1.

2. Источник неравенства Белла.

Элементарные неравенства, изложенные выше, сами по себе вряд ли вызывают сколь-нибудь серьёзный интерес; математика, и теория вероятностей в частности, знают куда более тонкие и вызывающие не только интерес, но и восторг соотношения. Неравенство Белла интересно не столько само по себе в его формально-математическом облике, сколько своим происхождением и глубиной вопросов, для решения которых оно было придумано и использовано.

a. Классический детерминизм или квантовая случайность.

Физикам, да и не только им, хорошо известен почти философский спор двух гигантов, Эйнштейна и Бора, начавшийся публично в 1927 году. Первый утверждал, что "Бог не играет в кости" и вероятностные предсказания квантовой механики, разительно отличающиеся от привычного детерминизма классической физики, лишь свидетельство неполноты теории. Бор же утверждал, что вероятность тут вовсе не случайна, что это закон природы, что так устроен квантовый мир. Совершенно замечательно то, что затянувшийся и, казалось бы, почти философский спор постепенно удалось привести к экспериментально проверяемым математическим соотношениям. Эти соотношения, неравенства Белла, были написаны физиком-теоретиком Беллом в работе [3] 1964 года, посвящённой анализу знаменитого парадокса Эйнштейна, Подольского, Розена (ЭПР -парадокса) 1935 года (см. [1], [2]), который должен был окончательно убедить Бора и всех его последователей в неполноте квантовой механики. Неравенства Белла были выведены в предположениях классической физики и было показано, что если квантовая теория справедлива, то эти неравенства могут нарушаться (теорема Белла). Тут же началась экспериментальная проверка этих неравенств. Считается, что совсем убедительным был эксперимент Алена Аспэ [5], проведённый им в 1982 году в лаборатории под Парижем. В эксперименте неравенства Белла нарушались, значит, по крайней мере один из тех "незыблемых" принципов классического детерминизма, на которых покоились неравенства Белла, оказался неверным в применении к микромиру.

Напомню, что в 2016 году исполнилось 100 лет со дня публикации Эйнштейном Общей Теории Относительности (1916). Но Эйнштейн был пионером и квантовой физики[2], хотя, как уже было сказано выше, радикально расходился с Бором в своих общих детерминистических взглядах. В подкрепление их и в качестве показателя неполноты квантового описания реальности (природы) и был изобретён знаменитый мысленный ЭПР эксперимент, который потом стал предметом обсуждения физиков и математиков нескольких поколений. В наше время он трансформировался в идею квантовых коммуникаций, квантовой теории информации, квантовых вычислений и квантового компьютера. Не погружаясь в эти уже весьма обширные области, в которых автор не компетентен, скажем всё же хотя бы несколько слов о содержании и выводах ЭПР эксперимента.

b. ЭПР-парадокс, его развитие и анализ.

Одним из краеугольных камней квантовой теории является принцип неопределённости Гейзенберга, постулирующий невозможность одновременного точного измерения некоторых физических характеристик квантового объекта, например, координаты и импульса квантовой частицы. Но в квантовой физике, как и в классике, справедлив закон сохранения импульса, в силу которого, если какая-то система, имевшая нулевой импульс, распадается на две одинаковые части (частицы), то эти части, разлетаясь, имеют равные по величине и противоположные по направлению импульсы. Значит, измерив импульс одной частицы, без измерения можно узнать импульс второй, у которой теперь надо измерить только координату, чтобы, казалось бы, знать и её координату, и импульс.

Сильно упростив многое, мы всё же сохранили главную идею мысленного эксперимента, предложенного в работе Эйнштейна, Подольского, Розена — идею использования пары (ЭПР-пары) частиц, связанных общей историей и некоторым законом сохранения.

Большим упрощающим шагом, сделавшим мысленный ЭПР эксперимент реализуемым, было предложение Бома (1956) рассмотреть не импульс и координату (непрерывные переменные), а дихотомные переменные, например, проекцию спина на выделенное направление для частицы

[2]Единственная из шести, по мнению физиков, заслуженных Эйнштейном нобелевских премий была ему присуждена в 1921 году именно за квантовую теорию света и фотоэффекта, а не за теорию относительности, как можно было бы думать.

со спином 1/2.

Квантовые системы (частицы), измерение которых имеет два устойчивых исхода (например, состояния спина электрона или поляризации фотона) теперь принято называть *кубитами* по аналогии с классическими битами информации. Именно физические кубиты и их комбинации должны стать носителями информации и составить вычислительную базу зарождающихся квантовых компьютеров.

Две такие квантовые частицы могут по-разному образовывать пару, точнее, такая пара может быть в разных квантовых состояниях. В частности, квантовая пара может быть, как говорят, запутанной, перепутанной или сцепленной (entangled — англ.). (Такую пару физики называют *ЭПР-парой*, помня эксперимент предложенный Эйнштейном, Подольским и Розаном.) Например, такую пару могут образовывать два электрона с нулевым суммарным спином. Пусть электроны разлетаются и их спины измеряют парой согласованно ориентированных приборов Штерна-Герлаха. Оказывается, если вы померили спин одной из частиц сцепленной пары, в данном случае спин одного из электронов (а он исходно мог иметь любое направление), то спин другой частицы пары, будучи измерен сонаправленным прибором Штерна-Герлаха, автоматически окажется противоположным.

Замечательно то, что согласно квантовой теории сами компоненты такой пары могут находиться друг от друга далеко — эффект будет тем же. Тогда, казалось бы, можно передавать информацию из одного места в другое со скоростью, превышающей скорость света, что, на первый взгляд, противоречит теории относительности. Сверхсветовая передача информации традиционными методами (с перемещением масс, волн, энергии) невозможна, но замечательно, что указанные квантовые взаимодействия действительно имеют место! Это можно считать попутным продуктом экспериментов, связанных с ЭПР-парадоксом.

Рассмотрев ЭПР эксперимент в форме, предложенной Бомом, Белл сделал следующее. Приняв основные положения классического детерминизма, он, как мы уже сказали, получил некоторые неравенства между измеряемыми величинами, которые не должны нарушаться, если сделанные исходные положения справедливы. С другой стороны, он показал, что если исходить из положений квантовой теории, то эти неравенства могут нарушаться. Осталось реализовать описанный эксперимент и проверить, кто же прав. Это и было сделано. Было показано, что если мы хотим правильно описывать мир квантовых частиц, нам неизбежно придётся отказаться по крайней мере от одного из казавшихся неоспоримыми принципов классической физики, например, от детерминизма или принципа локальности взаимодействий.

c. Новые эксперименты.

Подобно тому, как начальный ЭПР эксперимент был упрощён Бомом, аргументация Белла работы [3], использующая исходное неравенство Белла, была упрощена и теперь опиралась на неравенство вида неравенства Клаузера-Хорна-Шимони-Хольта, приведённое выше в разделе 1b. Мы не входим здесь в описание деталей самих экспериментов и анализ их результатов. Это можно прочитать в работе [4], а в современном изложении, например, сначала в [7], а затем и в [6].

Для информации отметим только следующее. Эксперименты по проверке неравенств Белла, например, эксперименты Аспэ, проводились с ЭПР парой сцепленных квантовых частиц и носили статистический характер. Усовершенствованные эксперименты продолжались и позже. В частности, в 1990-2000 годах Греенбергер, Хорн, Цайлингер и Шимони провели эксперимент (GHSZ-эксперимент) с тремя фотонами в сцепленном состоянии (описание см. в [7], [8]). Замечательная особенность этого эксперимента в том, что квантово-механические предсказания некоторых результатов измерений над тремя сцепленными частицами противоречат классическому детерминизму и локальному реализму в случаях, когда квантовая теория даёт достоверные, т.е. нестатистические предсказания.

Заметим, что тут уже вовсю работает комплексный язык, лежащий в самом фундаменте квантовой теории с её комплексной волновой функцией и комплексной амплитудой вероятностей, а также то, что квантовые системы объединяются по тензорному закону, а не через прямое произведение пространств их состояний.

d. Нелокальности квантовых взаимодействий.

Отметим, что нелокальность квантовых взаимодействий (если это так интерпретировать), казалось бы, можно проверять в эксперименте более простом, чем упомянутые выше общие эксперименты по проверке неравенств Белла. Пусть между одинаково ориентированными измерителями (приборами Штерна–Герлаха) A и B находится источник ЭПР пар электронов. Источник генерирует пары электронов в сцепленном состоянии. Один электрон пары летит в сторону измерителя A, а другой — в сторону B. Спины электронов пары противоположны, но в плоскости перпендикулярной оси AB они могут иметь любое направление. Распределение этих случайных направлений равномерное, поэтому любой из должным образом ориентированных приборов A и B, работая в одиночку, будет с равной вероятностью регистрировать спин как вверх, так и вниз по направлению ориентации своей вертикальной оси, ортогональной направлению AB. Получается типичная случайная последовательность процесса Бернулли. Но если производится измерение обоих электронов пары, причём сначала это делает один из приборов, пусть A, то оказывается, что совершенно определённо прибор B будет регистрировать последовательность спинов, противоположную той, которую зарегистрировал прибор A. Более того, даже если приборы A и B установить далеко друг от друга почти на одном расстоянии от источника ЭПР пар, но поставить прибор B чуть дальше, чтобы первым срабатывал прибор A, то картина останется той же, хотя при этом уже будет полностью исключена (теорией относительности) возможность классической передачи информации от A к B, после измерения в A, но до измерения в B.[3]

Добавим, что описанное квантовое явление, если уж не для сверхсветовой передачи информации, то, например, для сонаправленной ориентации удалённых приборов, наверное, уже может быть использовано. Напомним ещё, что хотя управление непредсказуемым по времени актом радиоактивного распада единичного атома не представляется возможным, управление атомным реактором вполне успешно реализуется благодаря стандартным для теории вероятностей законам больших чисел, когда коллективное поведение большой системы случайных величин оказывается почти детерминированным. Это может относится и к ЭПР-парам, о которых шла речь выше.

e. Заключительный комментарий (или если копнуть глубже).

Мы начали с простеньких математических неравенств. Потом пояснили, каким физическим вопросом они были инициированы. Мы сказали о мысленном эксперименте Эйнштейна-Подольского-Розена, его развитии и натурной проверке в реальных экспериментах. Обсуждение возникших вопросов на этом далеко не закончилось. Дискуссии затрагивают как основы квантовой физики, так и основные представления об информа-

[3] Добавим, что опыт анализа ЭПР эксперимента показал, что многие ошибки бывают связаны и с тем, что, рассматривая набор случайных квантовых величин (событий), при оценке средних считают, что у набора этих случайных величин есть совместная функция распределения вероятностей, тогда как сами события или какие-то пары из них с точки зрения квантовой теории даже неосуществимы одновременно.

ции. Анализ этих вопросов, ориентированный на физику, как и обширную библиографию времени написания статьи, можно найти в работе [10]. Приведу только одну цитату из этой работы, в которой довольно подробно обсуждается использование коллапса волновых функций для сверхсветовой передачи информации. "Поскольку он (метод) основан на коллапсах волновых функций без перемещения вещества или распространения волн, то скорость передачи информации, вроде бы, не должна лимитироваться скоростью света. Однако сверхсветовая передача информации настолько непривычна, настолько она затрагивает основные принципы современной физики, что нам потребуется более подробное обсуждение возможности (или невозможности) передачи сигналов (не волн!) со скоростью больше скорости света."

Современные (и весьма различающиеся) точки зрения на глубокие проблемы, инициированные ЭПР-парадоксом, описаны в статье [11].

Оставляя в стороне вопрос о сверхсветовой передаче информации, о нарушении принципа причинности, об интерпретации нелокальности квантовоых взаимодействий, можно вполне определённо констатировать реальные успехи идеи квантовых коммуникаций, квантовой теории информации и квантовых вычислений. На эту тему уже написано не только много статей, но и книг. Для первого (и вполне содержательного) знакомства с этим кругом вопросов, например, можно рекомендовать (на наш взгляд, прекрасно написанную) статью [12]. Непосредственно ЭПР-парадоксу в контексте неравенств Белла посвящена, например, лекция [13]. Это презентация в виде слайдов с короткими чёткими формулировками и даже с фотографиями основных участников событий. Математиков может заинтересовать обзор [14].

Наконец, отметим (это весьма примечательно, хотя не широко известно), что саму идею квантовых вычислений и квантового компьютера, наряду с замечательным физиком Ричардом Фейнманом, впервые высказал, тоже замечательный, но математик, Юрий Манин [15].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] A.Einstein, B.Podolsky, N.Rosen, Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete? // Phys. Rev. — American Physical Society, 1935. — Vol. 47, Iss. 10. — P. 777-780.

[2] В.А.Фок, А.Эйнштейн, Б.Подольский, Н.Розен, Н.Бор, Можно ли

считать, что квантово-механическое описание физической реальности является полным? // УФН, том XVI, выпуск 4. — 1935. — С. 436—457.

[3] J.S.Bell, On the Einstein Podolsky Rosen paradox // Physics Vol. 1, No. 3, pp. 198—200, 1964 Physics Publishing Co. Printed in the United States.

[4] John F. Clauser, Michael A. Horne, Abner Shimony, and Richard A. Holt, Proposed Experiment to Test Local Hidden-Variable Theories. Phys. Rev. Lett. 23, 880 – Published 13 October 1969; Erratum Phys. Rev. Lett. 24, 549 (1970)

[5] Alain Aspect, Bell's Theorem: The naive view of an experimentalist // Springer. — 2002.

[6] А.С. Холево, Квантовые системы, каналы, информация. // М., МЦНМО, 2010. Испр. файл - Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, `www.mi.ras.ru/~holevo/qir_cor.pdf`

[7] А.Н.Рубцов, П.А.Прудковский, С.П.Кулик, Введение в квантовую физику. // Лекции на физфаке МГУ, 2013.

[8] D.M.Greenberger, M.A.Horne, A.Shimony, A.Zeilinger. Bell's theorem without inequalities. // Am. J. Phys. 58, 1131-1141 (1990).

[9] А.Н. Ширяев, Задачи по теории вероятностей. // МЦНМО, 2011. С. 36, задача 15.

[10] Б.Б.Кадомцев, Динамика и информация. УФН, 164, №5, 449 (1994).

[11] `https://en.wikipedia.org/wiki/EPR_paradox`

[12] Eleanor Rieffel and Wolfgang Polak, An Introduction to Quantum Computing for Non-Physicists. ACM Computing Surveys, Vol. 32, No. 3, September 2000, pp. 300–335.

[13] Mark Williamson, Bell's inequalities and their uses. http://www.cs.ox.ac.uk/activities/quantum/course/notes/L10/bell100610.pdf

[14] R.F.Werner, All the Bell Inequalities. `https://qig.itp.uni-hannover.de/qiproblems/`.

[15] Ю.И.Манин, Вычислимое и невычислимое. М.: Сов. радио, 1980.[4]

[4]Это издание уже библиографическая редкость, но часть книги [15], содержащая нужный нам сейчас фрагмент, воспроизведена в книге Ю.И.Манин, Математика как метафора. М.: МЦНМО, 2008. См. там раздел Вычислимость и язык, с. 72, 73. Весьма рекомендуем просмотреть там раздел Математика и физика, а ещё лучше, прочитать всю эту книжку, интересную во многих аспектах.