Памяти Андрея Александровича Гончара

Шар, сфера и всё-всё-всё

В.А. Зорич*

Аннотация

Описана связь многомерной геометрии с статистической термодинамикой, законами больших чисел и теорией информации.

Вместо предисловия — посвящение.

Механико-математическому факультету МГУ в 2013 году исполнилось 80 лет, как и его кафедре математического анализа, где мне довелось пересечься и работать с Андреем Александровичем Гончаром.

У кафедры с момента её образования в 1933 году было последовательно четыре заведующих, Михаил Алексеевич Лаврентьев, Александр Осипович Гельфонд, Александр Яковлевич Хинчин, Николай Владимирович Ефимов, которых, к сожалению, уже нет в живых, но которые не ушли из нашей памяти. Сейчас кафедрой заведует Виктор Антонович Садовничий. При Николае Владимировиче я, например, только пришёл на кафедру и впервые читал курс Математического анализа математикам. Александра Яковлевича я застал, будучи студентом; он нам читал курс анализа, причём это было его последнее чтение (дочитывал нам этот курс Сергей Борисович Стечкин). Александр Осипович читал нам комплексный анализ. Михаила Алексеевича я в МГУ не застал, но судьба сложилась так, что когда он уже командовал не кафедрой, а наукой в

---

*УДК 517+514+519.2 Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 14-01-00709-a) и одной книги Милна в переводе Заходера.

Сибири, я решил одну его задачу, и по его приглашению наша первая научная встреча состоялась в Новосибирском Академгородке в Институте гидродинамики.

Когда я пришел на кафедру, Андрей Александрович (который позже перешёл в Математический институт и на кафедру теории функций) уже вовсю читал лекции по анализу существовавшему тогда на мехмате инженерному потоку, а лектор и докладчик он был прекрасный, о чём уже писали многие. Его коронный приём и тогда, и много лет спустя, как мне кажется, состоял в том, что он находил простейшую ситуацию и давал идеальную постановку задачи, в которой суть вопроса обнажалась полностью, не будучи обременённой случайными обстоятельствам и отвлекающими деталями. Многие обобщения после этого уже представлялись упражнениями.

Но первое знакомство с Андреем Александровичем произошло много раньше, когда он пришёл к нам в студенческую группу первого или второго курса в качестве аспиранта-куратора группы. Потом был научный семинар Алексея Ивановича Маркушевича, на котором не раз выступал Гончар. Перескакивая через очень многое, замечу, что хотя я сам не занимался непосредственно тематикой Андрея Александровича, помню, что один из первых публичный докладов в Москве о решении задачи М.А.Лаврентьева был как раз на семинаре А.А.Гончара в отделе комплексного анализа института Стеклова. И тогда, и до самого конца на семинаре А.А.Гончара могла присутствовать разная тематика.

Минуя опять очень многое, замечу, что иногда судьба людей, каких-то работ или книг могла бы быть совсем иной, они могли просто не состояться или не появиться без чьей-то профессиональной поддержки и импульса. Например, учебник анализа, который я написал и которым в разных изданиях и переводах уже успели воспользоваться студенты университетов и у нас, и за рубежом, начинался с того, что Николай Владимирович Ефимов и Андрей Александрович Гончар инициировали ротапринтное издание моих лекций на мехмате. Потом из издательства Наука позвонила Анна Петровна Баева, студенческая одногруппница Андрея Александровича по мехмату, с предложением написать полноценный университетский учебник для студентов естественно-математического профиля. Потом были ободряющие отзывы Андрея Николаевича Колмогорова и Владимира Игоревича Арнольда. Без этих людей ничего этого бы не было. А это уже касается не только автора, но всех, кому та или иная книга оказалась нужной и полезной. Книги, как дети, потом уже живут своей жизнью.

Кое-что из изложенного ниже пару раз рассказывалось в Математическом институте на семинаре, одним из бессменных участников и руководителей которого был Андрей Александрович Гончар, любивший и математику, и шутку.

* * *

В шаре, на вид самой простой пространственной фигуре, оказывается, содержится столько всего, что невольно приходят на ум слова Парменида «Бог — неподвижен, конечен и имеет форму шара».

1. *Газ и многомерная сфера.*

В школе учат, что шар, с какой стороны на него ни смотри, одинаков. Но если вы задаете ему разумные вопросы, то, порой, получаете неожиданные ответы. Мы здесь рассмотрим несколько таких вопросов, содержательных и важных ввиду многочисленности проявлений рассмотренных в них явлений как в математике, так и в физике.

a. *Газ.*

Рассмотрим однородный газ в какой-то покоящейся ёмкости. Пусть $v_1, ..., v_n$ — трёхмарные векторы скорости молекул. В стандартных условиях естественно считать, что совокупная кинетическая энергия $E_n = \Sigma_{i=1}^n \frac{1}{2} m v_i^2$ молекул пропорциональна их количеству n, т.е. $E_n = En$ и $\Sigma_{i=1}^n v_i^2 = \frac{2E}{m} n$. Последнее соотношение определяет сферу радиуса $\sqrt{\frac{2E}{m} n}$ в пространстве $\mathbb{R}^{3n}$. Пусть это будет пояснением к физической интерпретации следующих геометрических рассмотрений.

b. *Проекция сферы и нормальное распределение.*

В n-мерном евклидовом пространства $\mathbb{R}^n$ рассмотрим сферу $S^{n-1}(r)$ радиуса $r = \sigma\sqrt{n}$ с центром в начале координат, заданную уравнением

$$x_1^2 + ... + x_n^2 = \sigma^2 n. \tag{1}$$

Эту сферу $S^{n-1}(r)$ спроектируем ортогонально на прямую, проходящую через её центр, например, на какую-то (пусть первую) координатную ось. Получится отрезок $[-r, r]$. Фиксируем отрезок $[a, b] \subset [-r, r]$.

Пусть $S[a,b]$ — площадь той части $S^{n-1}_{[a,b]}(r)$ сферы $S^{n-1}(r)$, которая проектируется в отрезок $[a,b]$. Подсчитав отношение $\frac{S[a,b]}{S[-r,r]}$, т.е. вероятность $\mathrm{Pr}_n[a,b]$ того, что случайно выбранная точка сферы окажется в слое $S^{n-1}_{[a,b]}(r)$ над отрезком $[a,b]$ (полагая, что точки распределены по сфере равномерно), найдем (см., например, [7], [8]), что

$$\mathrm{Pr}_n[a,b] = \frac{\int_a^b \left(1-(x/r)^2\right)^{\frac{n-3}{2}} dx}{\int_{-r}^r \left(1-(x/r)^2\right)^{\frac{n-3}{2}} dx}. \tag{2}$$

Вспоминая, что в интересной для термодинамики ситуации $r = \sigma\sqrt{n}$, а $n \gg 1$, переходя к пределу при $n \to \infty$, приходим к классическому нормальному закону распределения вероятностей

$$\mathrm{Pr}_n[a \le x \le b] \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_a^b e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx. \tag{3}$$

Мы получили распределение вероятностей значений одной координаты случайной точки сферы $S^{n-1}(\sigma\sqrt{n}) \subset \mathbb{R}^n$ при $n \gg 1$.

Отметим ещё, что при рассмотрении многомерной сферы и выводе формулы (3), мы заодно получили и некоторую форму центральной предельной теоремы теории вероятностей. В самом деле, ведь по существу доказано, что скалярное произведение $< e, x >= \Sigma_{i=1}^n e_i x_i$ любого фиксированного единичного вектора $e \in \mathbb{R}^n$ и случайного вектора $x \in S^{n-1}(\sigma^2 n)$ в пределе при $n \to \infty$ распределено нормально. В частности, если взять $e = \frac{1}{\sqrt{n}}(1, ..., 1)$, а σ^2 в (1) трактовать как дисперсию, то получим классический вид центральной предельной теоремы.

c. *Распределение Максвелла.*

При термодинамической интерпретации мы в (3) фактически имеем (с точностью до естественных переобозначений и преобразований) закон распределения координат скорости (а тем самым и энергии) одной частицы в огромной системе, энергию которой можно считать бесконечно большой по сравнению с энергией одной частицы.

В случае газа, состоящего из n одинаковых молекул массы m, как мы уже понимаем. надо в пространстве $\mathbb{R}^{3n}$ рассматривать сферу $E_n = \Sigma_{i=1}^n \frac{1}{2} m v_i^2$, где E_n — совокупная энергия всех молекул газа. В этом случае $r_n^2 = \sigma^2 3n = \frac{2E_n}{m}$, поэтому $\sigma^2 = \frac{2E_n}{3nm} = \frac{2}{3}\frac{\langle E\rangle}{m} = \frac{1}{3}\langle v^2\rangle$, где $\langle E\rangle$ — средняя кинетическая энергия молекул, а $\langle v^2\rangle$ — средний квадрат их скорости.

(Предполагается, конечно, что газ находится в термодинамическом равновесии и система в целом, т.е. ёмкость, содержащая газ, покоится.)

Подставляя это значение σ^2 в (3), получим закон распределения вероятностей каждой компоненты (координаты) скорости молекулы газа — вариант закона Максвелла (который, разумеется, ещё следовало бы довести до физически значимого вида, включающего температуру.)

Если бы мы следили не за одной частицей, а за порцией из любого конечного числа частиц, то, спроектировав сферу на координатное подпространство, отвечающее этим частицам, мы, конечно, получили бы снова нормальное распределение, но в пространстве соответствующей размерности. Впрочем, это следует уже из полученного результата с учётом предполагаемой независимости частиц. Это частное проявление общего положения Гиббса о том, что малая часть (например, молекула или любая случайно взятая часть, состоящая из n молекул) большой системы, находящейся в термодинамическом равновесии, всегда по энергии распределена канонически в смысле Гиббса. (См. [6],[7].)

2. *Концентрация меры и её проявления.*

С тысячемерного арбуза, имеющего форму шара радиуса 1 метр, сняли корку толщины 1 сантиметр. Осталось меньше тысячной доли исходного арбуза! Проверьте это.

На примере шара или куба легко поэкспериментировать и заметить, что подавляющая часть объёма многомерного тела находится в непосредственной близости его границы. В частности, это означает, что если на многомерном шаре имеется функция постоянная в малой окрестности граничной сферы, а мы наблюдаем её значения, выбирая случайную точку шара и вычисляя в ней значение функции, то нам функция будет казаться постоянной.

Если мы знаем, что почти весь объём многомерного шара находится в малой окрестности граничной сферы, то, рассмотрев проекцию полусферы на шар её же размерности, получаемый в сечении исходного шара гиперплоскостью, проходящей через центр шара, можно заключить, что почти вся площадь многомерной сферы сосредоточена в малой окрестности её экватора (который секущая гиперплоскость высекает на сфере).

Мы потом подтвердим это нужными оценками (которые, впрочем, можно получить, рассмотрев асимптотику правой части формулы (2) при $n \to \infty$ и фиксированном r), а пока скажем, к каким последствиям это приводит. Например, если взять случайно и независимо пару точек на единичной сфере, или, что то же самое, пару единичных векторов в многомерном пространстве, то с большой вероятностью векторы окажутся почти ортогональными (их скалярное произведение будет близко к нулю).

Или например, любая более или менее регулярная (пусть липшицева) функция на многомерной сфере постоянна с точки зрения наблюдателя, измеряющего её значения в случайных точках.

Для человека, привыкшего иметь дело с функциями одной, двух, трех переменных, это представляется невероятным, но именно это лежит в основе постоянства таких привычных параметров среды нашего обитания, как температура и давление, которые являются функциями огромного числа равноправных переменных (молекул). Это нелинейный аналог хорошо известного в теории вероятностей закона больших чисел.

Итак, возвращаемся снова к сфере, шару и геометрии.

a. *Концентрация площади многомерной сферы.*

Пусть $\delta \in (0,1)$ и $[a,b] = [\delta r, r]$. Воспользовавшись, например, методом Лапласа вычисления асимптотики интеграла по большому параметру, из (2) находим, что при $n \to \infty$

$$\mathrm{Pr}_n[\delta r, r] \sim \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi n}} e^{-\frac{1}{2}\delta^2 n}.$$

Это уже количественное выражение сделанного выше наблюдения, что подавляющая часть площади многомерной сферы сосредоточена в малой окрестности экваториальной плоскости — в слое $S^{n-1}_{[-\delta r,\delta r]}(r)$ над отрезком $[-\delta r, \delta r]$. Оценка сверху отношения $S^{n-1}_{[-\delta r,\delta r]}(r)/S^{n-1}_{[-r,r]}(r)$, которую можно провести, считая $r=1$, показывает, что, например,

$$\mathrm{Pr}_n[-\delta r, \delta r] > 1 - \sqrt{\frac{\pi}{2}}\; e^{-\frac{1}{2}\delta^2 n}. \tag{4}$$

Отсюда, в частности, вытекает, что если в $\mathbb{R}^n$ взять случайно и независимо пару единичных векторов v_1, v_2, то при $n \gg 1$ с большой вероятностью они окажутся почти ортогональными, т.е. их скалярное произведение $< v_1, v_2 >$ будет близко к нулю. А именно

$$\mathrm{Pr}_n\{| < v_1, v_2 > | > \delta > 0\} < \sqrt{\frac{\pi}{2}}\; e^{-\frac{1}{2}\delta^2 n}. \tag{5}$$

Из (4) и (5), в частности, видно, что при $n \gg 1$ типичные значения случайной величины $| < v_1, v_2 > |$ будут порядка $\frac{1}{\sqrt{n}}$. В случае сферы радиуса $\sqrt{n}$ и векторов V_1, V_2 длины $\sqrt{n}$ стандартное отклонение величины $< V_1, V_2 >$ от ее среднего значения (нуля) будет порядка 1.

b. *Изопериметрическое неравенство Леви.*

Пусть S^m — единичная сфера в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{m+1}$ очень большой размерности $m+1$. Пусть на сфере задана достаточно регулярная (например, из некоторого фиксированного класса Липшица) вещественнозначная функция. Берем случайно и независимо друг от друга пару точек на сфере и вычисляем в них значения нашей функции. С большой вероятностью эти значения будут почти одинаковы и близки к некоторому числу M_f.

Это, пока еще гипотетическое, число M_f называют *медианным значением функции* или *медианой функции*. Его также называют *средним значением функции в смысле Леви*. Мотивировка терминов вскоре прояснится вместе с точным определением M_f. (См. [1], [2] и [3]—[5].)

Поясним этот полезный и важный во многих отношениях (например, для статистической физики) факт.

Введем некоторые обозначения и соглашения. Договоримся расстояние между точками сферы $S^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$ понимать в смысле ее геодезической метрики ϱ. Через A_δ обозначим δ-окрестность в S^m множества $\subset S^m$. Поднормируем стандартную меру сферы, заменив ее равномерно распределенной вероятностной мерой μ, т.е. $\mu(S^m) = 1$.

Справедливо следующее утверждение доказанное Полем Леви и именуемое обычно *изопериметрическим неравенством Леви.*
Для любых $0 < a < 1$ *и* $\delta > 0$ *существует* $\min\{\mu(A_\delta) : A \subset S^m, \mu A = a\}$ *и он достигается на сферической шапочке* A° *меры* a.

Здесь $A^{\circ} = B(r)$, где $B(r) = B(x_{\circ}, r) = \{x \in S^m : \varrho(x_{\circ}, x) < r\}$ и $\mu(B(r)) = a$.

При $a = 1/2$, т.е. когда A° — полусфера, получаем следствие:

Если подмножество $A \subset S^{n+1}$ *таково, что* $\mu(A) \geq 1/2$, *то* $\mu(A_\delta) \geq 1 - \sqrt{\pi/8}e^{-\delta^2 n/2}$.

При $n \to \infty$ здесь $\sqrt{\pi/8}$ можно заменить на $1/2$.

Теперь обозначим через M_f такое число, для которого

$\mu\{x \in S^m : f(x) \leq M_f\} \geq 1/2$ и $\mu\{x \in S^m : f(x) \geq M_f\} \geq 1/2$.

Его-то и называют *медианой* или *средним в смысле Леви значением* *функции* $f : S^m \to \mathbb{R}$. (Если M_f-уровень функции f на сфере имеет нулевую меру, то мера каждого из указанных двух множества будет в точности равна половине μ-площади сферы S^m.)

Следующее утверждение, смысл которого разъяснен выше, называется леммой Леви: *Если* $f \in C(S^{n+1})$ *и* $A = \{x \in S^{n+1} : f(x) = M_f\}$, *то* $\mu(A_\delta) \geq 1 - \sqrt{\pi/2}e^{-\delta^2 n/2}$.

Мы начали все изложение с замечания, что почти вся площадь многомерной сферы сосредоточена в окрестности экватора. Теперь мы имеем общее утверждение той же природы: малая окрестность медианного уровня любой функции, непрерывной на многомерной сфере, содержит почти всю сферу. Именно поэтому с точки зрения наблюдателя, измеряющего значения такой функции, она и представляется практически постоянной. Проделаем некоторые вычисления, которые количественно пояснят сказанное.

c. *Стабилизация значений функций очень многих переменных.*

Пусть $\omega_f(\delta) = \sup\{|f(x) - f(y)| : \varrho(x, y) \leq \delta\}$ — *модуль непрерывности функции* f. Значения функции f на множестве A_δ близки к M_f. Точнее, если $\omega_f(\delta) \leq \varepsilon$, то $|f(x) - M_f| \leq \varepsilon$ на A_δ. Таким образом, лемма Леви показывает, что “хорошие” функции почти постоянны на почти всей области определения — единичной сфере S^m, когда её размерность m очень велика. Точнее, из леммы Леви при $m = n+1$ получаем оценку $\Pr\{|f(x) - M_f| > \omega_f(\delta)\} < \sqrt{\pi/2}e^{-\delta^2 n/2}$

Например, если $f \in \mathrm{Lip}(S^{n+1}, \mathbb{R})$ и L — константа Липшица для функции f, то $\Pr\{|f(x) - M_f| > \delta/L\} < \sqrt{\pi/2}e^{-\delta^2 n/2}$ или в иной записи $\Pr\{|f(x) - M_f| > \varepsilon\} < \sqrt{\pi/2}e^{-(\varepsilon/L)^2 n/2}$. При этом стандартное отклонение величины $|f(x) - M_f|$ от нуля, если $n \gg 1$, будет порядка $L/\sqrt{n}$.

В случае, когда функция f определена не на единичной сфере, а на сфере радиуса r, величина r войдет в проведенные оценки. Например, ε/L заменится на ε/rL, а стандартное уклонения значений функции от M_f естественно возрастет пропорционально r.

Если f — гладкая функция, то константой Липшица L для нее, очевидно, может служить максимум модуля ее градиента. Так для линейной функции $S_n = \frac{1}{n}(x_1 + ... + x_n)$ имеем $L = L_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Возьмем последовательность $f_n \in \mathrm{Lip}(S^{n-1}(r_n), \mathbb{R})$ липшицевых функций, для которых $L_n = \mathrm{O}(\frac{1}{\sqrt{n}})$ при том, что $r_n = \sqrt{n}$. Учитывая только что сказанное получим, что $\Pr\{|f_n(x) - M_{f_n}| > \varepsilon\} < \sqrt{\pi/2}e^{-(\varepsilon/r_n L_n)^2 n/2}$, а для стандартного отклонения от нуля величины $|f_n(x) - M_{f_n}|$ имеем верхнюю оценку $r_n L_n/\sqrt{n} = O(1/\sqrt{n})$ при $n \gg 1$.

В частности, когда $f_n = S_n$, получаем классический закон больших чисел, относящийся к значениям простейшей линейной функции $S_n = \frac{1}{n}(x_1 + ... + x_n)$ при $n \gg 1$.

Пусть $f_n = x_1 + ... + x_n$. Уровни этой функции — гиперплоскости в $\mathbb{R}^n$, ортогональные вектору $(1, ..., 1)$. То же можно сказать и о линейной функции $\Sigma_n = \frac{1}{\sqrt{n}}(x_1 + ... + x_n)$ с той разницей, что при движении из начала координат в направлении $(1, ..., 1)$ ее значения совпадают с расстоянием до начала координат. По этой причине на сфере $S^{n-1}(r_n = \sigma\sqrt{n})$ они распределены так же, как любая из координат. Но предельное (при $n \to \infty$) распределение вероятностей координат нам уже известно (формула (3)). Получаем центральную предельную теорему теории вероятностей.

3. *Характерные параметры многомерного шара.*

а. *Объём многомерного шара.*

Хорошо известно, что один из способов вычисления интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

состоит в следующем. Вычисляют интеграл от функции $e^{-(x_1^2+x_2^2)}$ по всей плоскости $\mathbb{R}^2$ переменных (x_1, x_2), исчерпывая $\mathbb{R}^2$ сначала расширяющимися квадратами, а потом кругами. В первом случае двойной интеграл сводят к повторному ("теорема Фубини"), а во втором — переходят к полярным координатам и вычисляют явно возникающий интеграл. Сравнив результаты, получают указанный ответ.

Повторив описанную процедуру в n-мерном случае, применительно к функции $e^{-(x_1^2+...+x_n^2)}$, можно получить равенство

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx\right)^n = \sigma_{n-1} \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r^{n-1} dr, \tag{6}$$

где σ_{n-1} — площадь ($(n-1)$-мера) единичной сферы $S^{n-1}(1)$ в $\mathbb{R}^n$.

Теперь получаем формулы

$$\sigma_{n-1} = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \qquad v_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\frac{n}{2}\Gamma(\frac{n}{2})} \tag{7}$$

для площади единичной сферы и объёма единичного шара в n-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$.

Из этих формул следует, что при $n \gg 1$ имеется асимптотика $v_n \simeq \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \left(\sqrt{\frac{2\pi e}{n}}\right)^n$. Кроме того, поскольку шар единичного объёма в $\mathbb{R}^n$ имеет радиус $r_n = v_n^{-\frac{1}{n}}$, то $r_n \simeq \sqrt{\frac{n}{2\pi e}}$ при $n \gg 1$. (См. в этой связи [5].)

Именно эту единичную массу (вероятностную меру) мы и распределяли на прямой при проектировании. Брать радиус порядка $\sqrt{n}$ нам подсказала физическая задача, но теперь, когда мы знаем объём многомерного шара, мы пришли к тому же из геометрических соображений.

Кто-то может заметить, что ведь раньше мы проектировали не шар, а сферу. Но нам известно, что почти весь объём (масса, мера) многомерного шара находится в малой окрестности граничной сферы, причём размер этой окрестности уменьшается по мере роста размерности пространства. Значит, в пределе в проекции на прямой мы получаем одно и то же нормальное распределение.

b. *Оценка объёма пересечения многомерных шаров.*

Нам пригодится ещё одно наблюдение, связанное с многомерностью, которое, вроде бы, противоречит нашей интуиции, воспитанной на привычных трёхмерных объектах.

Предположим, что два одинаковых шара, например, шара радиуса 1, в пространстве $\mathbb{R}^n$ пересекаются. Если их центры находятся на взаимном расстоянии ε $(0 < \varepsilon < 2)$, то пересечение этих шаров, очевидно, содержится в шаре радиуса $\sqrt{1-(\varepsilon/2)^2}$ с центром в середине отрезка, соединяющего центры исходных шаров. Значит отношение объема пересечения двух исходных шаров к собственному объему каждого из них не превосходит $(1-(\varepsilon/2)^2)^{n/2}$. Теперь ясно, что при любом фиксированном значении ε эта величина может быть сделана сколь угодно малой за счёт выбора достаточно большого значения n.

4. *Кодирование сигнала в канале с шумом.*

Укажем в заключение еще одну область, где функции очень большого числа переменных тоже появляются естественным образом и где принцип концентрации меры проявляется и используется тоже по существу.

Мы уже привыкли к цифровому (дискретному) кодированию и передаче сигнала (музыки, изображения, сообщения — информации) по каналу связи. В таком виде сообщение можно себе мыслить как вектор

$x = (x^1, ..., x^n)$ в пространстве $\mathbb{R}^n$ очень большой размерности. На передачу такого сообщения затрачивается энергия E, пропорциональная $||x||^2 = |x^1|^2 + ... + |x^n|^2$ (подобно рассмотренной выше суммарной кинетической энергии молекул газа). Если T — продолжительность передачи сообщения x, то $P = E/T$ — средняя мощность, затрачиваемая на передачу одного символа (одной координаты вектора x). Если Δ — среднее время, затрачиваемая на передачу одной координаты вектора x, то $T = n\Delta$ и $E = nP\Delta$.

Передающее и принимающее устройства согласованы так, что передатчик преобразует (кодирует) подлежащее передаче исходное сообщение в форму вектора x, отправляет его по каналу связи, а приемник, зная код, расшифровывает x, преобразуя его в форму исходного сообщения.

Если нам надо передать M сообщений $A_1, ..., A_M$ длины n, то достаточно в шаре радиуса $E^{\frac{1}{2}} = (nP\Delta)^{\frac{1}{2}}$ фиксировать M точек $a_1, ..., a_M$, согласовав этот выбор с приемным концом канала связи. Если в канале связи нет помех, то, получив вектор a из согласованного набора, приемник безошибочно декодирует его в соответствующее сообщение A.

Если же в канале связи есть помехи (что обычно и случается), то помеха, случайный вектор $\xi = (\xi^1, ..., \xi^n)$, сместит передаваемый вектор a и на приемник поступит вектор $a + \xi$, который надо будет правильно расшифровать.

Если точки $a_1, ..., a_M$ были выбраны так, что шары радиуса $||\xi||$ с этими центрами не пересекаются, то однозначная расшифровка еще возможна. Но если соблюдать это требование, то уже нельзя брать сколько угодно точек $a_1, ..., a_M$ и возникает проблема плотной упаковки шаров. Это сложная задача, решение которой в рассматриваемой ситуации, как показал Шеннон, можно избежать, учитывая, что размерность n пространства $\mathbb{R}^n$ здесь огромна.

Позволим себе иногда ошибаться при расшифровке принятого сообщения. Потребуем, однако, чтобы вероятность ошибки была сколь угодно мала (меньше любого фиксированного положительного числа). Шеннон показал, что даже при наличии в канале связи случайных помех (белый шум) любой ограниченной мощности, выбирая достаточно длинный код (т.е. при больших значениях n), можно добиться скорости передачи сколь угодно близкой к скорости передачи информации по каналу без шума, при этом со сколь угодно малой вероятностью ошибки.

Геометрическая идея теоремы Шеннона непосредственно связана с обсуждавшимися выше особенностями распределения меры (объема) областей в пространстве большой размерности. Поясним это, минуя сейчас такие полезные наблюдения, как то, что в многомерном случае почти все кодирующие точки можно считать лежащими на граничной сфере, а случайный вектор помехи (белого шума) можно считать ортогональным вектору сигнала.

Предположим, что два одинаковых шара в пространстве $\mathbb{R}^n$ пересекаются. Если принятый сигнал окажется в этом пересечении, то возможна ошибка в расшифровке переданного сообщения. Но если вероятность попадания в какую-то область считать пропорциональной относительному объему области, то естественно сравнить объем пересечения шаров с объемом шара. Мы это уже проделали (см. последнем пункт предыдущего раздела) и выяснили, что если центры двух шаров радиуса 1 находятся на взаимном расстоянии ε $(0 < \varepsilon < 2)$, то отношение объема пересечения шаров к собственному объему каждого из них не превосходит $(1-(\varepsilon/2)^2)^{n/2}$. Теперь ясно, что при любом фиксированном значении ε эта величина может быть сделана сколь угодно малой за счет выбора достаточно большого значения n. (Подробности см. в [9], [10] и [8].)

5. *Заключение.*

Об одном и том же разные, даже очень умные люди, могут иметь разные, порой контрастирующие суждения. Так, Протагору из Абдеры приписывают следующее высказывание (кажется, приведшее впоследствии к уничтожению его книг)

«О богах невозможно знать ни того, что они есть, ни того, что их нет, ни того, каковы они по виду; а причина тому: неясность вопроса и краткость человеческой жизни.»

ЛИТЕРАТУРА

1. *H. Poincaré,* Calcule des probabilité. Gautier Villars, Paris, 1912.

А. Пуанкаре, Лекции по теории вероятностей. — М., Ижевск: Изд. РХД, 1999.

2. *P. Levy,* Problémes concrets d'analyse functionnelle. Gautier Villars, Paris, 1951.

3. *V. Milman and G. Schechtman,* Asymptotic Theory of Finite Dimensional Normed Spaces. (With an Appendix by M. Gromov). Lecture Notes in Mathematics **1200**, Springer-Verlag, 1986.

(Appendix I. *M. Gromov*, Isoperimetric inequality in Riemannian manifolds. 114–129.)

4. *В.Д. Мильман,* Явления, возникающие в высоких размерностях. УМН, **59**, 1, 157–168, 2004.

5. *K. Ball,* An Elementary Introduction to Modern Convex Geometry. Flavors of Geometry. MSRI Publications, Volume **31**, 1997.

6. *Г.А. Лоренц,* Статистические теории в термодинамике. — М., Ижевск: Изд. РХД, 2001.

7. *В.В. Козлов,* Тепловое равновесие по Гиббсу и Пуанкаре. —М., Ижевск: Изд. РХД, 2002.

8. *V. Zorich,* Mathematical Analysis of Problems in the Natural Sciences. Springer, 2011.[1]

(Дополненный перевод на английский язык книги *В.А.Зорич*, Математический анализ задач естествознания, М., МЦНМО, 2008.)

9. *C.E. Shannon,* A mathematical theory of communication. Bell System Tech. J. **27**, 379–423, 623–656, 1948.

К. Шеннон, Работы по теории информации и кибернетике. Пер. с англ., — М.: Изд. иностр. лит., 1963.

10. Теория информации и ее приложения. — М.: Физматлит, 1959.

Сборник переводов включает статью

К. Шеннон, Связь при наличии шума.

[1] В конце этой книги на английском языке был помещен «Непредвиденный эпилог». Я хотел бы привести его здесь на русском языке.

"Английский перевод этой книги был почти завершен, когда скоропостижно скончался Владимир Игоревич Арнольд. Я не знаю, кто будет читать эту книгу, но книга и все мы математики потеряли самого яркого, тщательного и профессионального читателя, которому с дружеской улыбкой явно или неявно были адресованы отдельные места текста. Многое еще будет сказано и написано о В.И.Арнольде. Объективное время и следующие поколения оценят его заслуги. Но следующие поколения уже не будут его современниками. Им будет трудно понять, что потеря Арнольда для математики, по крайней мере, в России, и особенно при нынешнем состоянии науки в стране, подобна потере среды обитания."

(*C.E. Shannon,* Communication in the presence of noise. PIRE **37**, 1, 10–21, 1949.)

В.А. Зорич (V.A. Zorich)
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
E-mail : vzor@mccme.ru