

НЕКОТОРЫЕ ДОПОЛНЕНИЯ К МАТЕРИАЛУ ЛЕКЦИЙ И  
УПРАЖНЕНИЙ ПО АНАЛИЗУ

(может быть использовано не только на мехмате, но, возможно, даже с большим интересом, например, на химфаке и физфаке)

ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ И  
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ФОРМЫ С  
ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИМИ ИНТЕРПРЕТАЦИЯМИ

В.А. ЗОРИЧ

I. Дифференциальная форма  
и термодинамическая система.

1. Дифференциальная 1-форма (напоминания).

Выражения вида  $a_1 dx^1 + \dots + a_n dx^n$ , как известно, называют *дифференциальной формой*, точнее, *дифференциальной 1-формой* (в отличие от общих  $k$ -форм  $a_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$ ). Мы позволим себе, следуя Эйнштейну, сокращенную запись  $a_i dx^i$  дифференциальной формы  $a_1 dx^1 + \dots + a_n dx^n$ , как обычно, подразумевая суммирование по индексу, повторяющемуся сверху и снизу.

Коэффициенты  $a_i$  формы будем считать функциями  $a_i(x)$  точки  $x = (x^1, \dots, x^n)$  в той области пространства  $\mathbb{R}^n$ , в которой форма рассматривается. Мы будем предполагать, что  $a_i(x)$  регулярные функции, имеющие столько производных, сколько потребуется для проведения нужной выкладки, содержащей дифференцирование.

Примером дифференциальной 1-формы является дифференциал функции  $dU(x) = \frac{\partial U}{\partial x^1}(x) dx^1 + \dots + \frac{\partial U}{\partial x^n}(x) dx^n$  или кратко  $dU = \frac{\partial U}{\partial x^i} dx^i$ , и ещё короче  $dU = \partial_i U dx^i$ .

Однако, далеко не всякая 1-форма  $a_1 dx^1 + \dots + a_n dx^n$  является дифференциалом некоторой функции. Те 1-формы, которые являются дифференциалами функций, называют *точными* 1-формами. Для того, чтобы 1-форма  $a_i dx^i$  была точной очевидно необходимо выполнение равенств  $\frac{\partial a_i}{\partial x^j} = \frac{\partial a_j}{\partial x^i}$ , отвечающих равенству  $\frac{\partial^2 U}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^j \partial x^i}$  смешанных производных функции.

Это необходимое условие, вообще говоря, не является достаточным, но, например, в любой односвязной области оно и достаточно.

Критерием того, что 1-форма  $\omega = a_i(x) dx^i$ , заданная в некоторой области, является дифференциалом функции в этой области,

является обращение в нуль интеграла  $\int_{\gamma} \omega = 0$  от этой формы по любому замкнутому пути  $\gamma$ , лежащему в рассматриваемой области.

Вопрос о том, является ли форма 1-форма  $a_1(x)dx^1 + \dots + a_n(x)dx^n$  дифференциалом некоторой функции  $U$  в области, равносильен вопросу о том, является ли векторное поле  $(a_1, \dots, a_n)(x)$  потенциальным в этой области, т.е. имеется ли в этой области такая функция  $U$ , что  $(a_1, \dots, a_n)(x) = (\frac{\partial U}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial U}{\partial x^n})(x)$ .

Если такая функция  $U$  имеется, то обычно функцию  $-U$  называют *потенциалом* векторного поля, а само поле называют *потенциальным* в этой области.

Замечательное свойство потенциальных полей состоит в том, что работа в таком поле вдоль пути (интеграл от соответствующей 1-формы  $\omega = -a_i(x)dx^i$ ) зависит только от начала и конца пути и равна разности значений потенциала в конце и начале пути. Если путь замкнут, то интеграл, естественно, обращается в нуль.

*Задача 1.* Проверьте потенциальность гравитационного поля.

## 2. Любимая игрушка и дифференциальная 1-форма в термодинамике.

Теперь напомним кое-что из термодинамики и сначала чуть-чуть поиграем в любимую термодинамиками игрушку, знакомую всем со школьной скамьи. В быту это медицинский шприц, велосипедный насос, цилиндр в моторе любого автомобильного двигателя внутреннего сгорания, и многое другое. (Не упоминаю паровые машины, пароходы и паровозы, с которых всё это и началось, поскольку новые поколения молодых людей не встречались с динозаврами, ну, разве что в музеях.)

Итак, рассмотрим газ в цилиндре под поршнем. Поршень можно двигать, меняя объём газа. Стенки цилиндра могут проводить тепло, а могут и, наоборот, быть адиабатическими, изолируя газ от теплообмена с внешней средой.<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>Играя на бумаге в этот прибор (ключевой элемент как паровой машины, так и современного двигателя внутреннего сгорания), Сади Карно провел один из первых в физике гениальных (и не дорогих) мысленных экспериментов. Двигая поршень, подогревая, а когда надо, охлаждая или теплоизолируя цилиндр, он придумал циклический процесс, называемый теперь (после некоторых сделанных Клапейроном вариаций) циклом Карно. Карно нашел ответ на вопрос Уатта о возможном коэффициенте полезного действия любой тепловой машины, а заодно, как это случается, сделал великое открытие, которое (после разработки Клаузиусом) стало вторым началом термодинамики. (Идея первого начала по существу тоже присутствовала в рассуждениях Карно.) Поиграем и

Равновесному термодинамическому состоянию газа отвечают определенные значения характеризующих это состояние параметров, таких, как объём  $V$ , температура  $T$ , давление  $P$ , внутренняя энергия  $E$ . Не все они независимы. Объём — внешний параметр, который мы сами можем менять произвольно, а внутренние параметры равновесного термодинамического состояния газа, вообще говоря, меняются согласованно.

Так классический закон Клапейрона утверждает, что между объёмом  $V$  газа его давлением  $P$  и температурой  $T$  в равновесном термодинамическом состоянии газа имеется связь  $\frac{PV}{T} = c$  (называемая *уравнением состояния*), где постоянная  $c$  зависит только от количества газа.

За счёт изменения  $dE$  внутренней энергии и подводимого тепла  $\delta Q$  газ может перемещать поршень, совершая некоторую механическую работу  $\delta W$ .

В общем случае энергетический баланс состоит в том, что

$$(1) \quad \delta Q = dE + \delta W.$$

Заметим, и это весьма важно, что в отличие от  $dE$  дифференциальные формы  $\delta Q$  и  $\delta W$  не являются точными. Это не дифференциалы функций. Работа, которую надо совершить, например, при изменении объёма газа вдвое, зависит не только от начального и конечного значений объёма, так же как и возникающий при этом интегральный теплообмен с внешней средой. Обе эти величины существенно зависят от условий, в которых совершается переход из одного термодинамического состояния в другое. Например, если процесс адиабатический, то теплообмена вообще нет. В таком процессе (на таком пути перехода) интеграл от формы  $\delta Q$  равен нулю. На другом пути, соединяющем те же термодинамические состояния, интеграл от формы  $\delta Q$ , как правило, отличен от нуля, если стенки цилиндра проводят тепло. Ясно, что это автоматически относится и к дифференциальной форме работы  $\delta W$ . Именно поэтому мы употребили различные символы дифференциала в фундаментальном равенстве (1). Например, можно было бы не менять объёма, т. е. вообще без совершения механической работы, изменить состояние газа, подогрев его.

Равенство (1), учитывая, что  $\delta W = PdV$  (проверьте это!), можно переписать в виде

$$(2) \quad \delta Q = dE + PdV.$$

---

мы чуть-чуть. Это поможет нам как принять полезные математические схемы, так и не потерять потом физическое содержание в возникающих абстракциях.

В термодинамически равновесном состоянии внутренние параметры состояния системы (здесь газа) оказываются функциями внешних параметров (здесь он один — объём) и единственного внутреннего параметра — температуры. Таким образом, в формуле (2)  $E = E(T, V)$ ,  $P = P(T, V)$ .

В формулах (1) и (2) слева стоит дифференциальная форма притока тепла, интегрирование которой вдоль пути перехода между двумя равновесными термодинамическими состояниями системы (если мы такое интегрирование научимся делать) даст нам полученное системой тепло (которое может быть отрицательным, если система отдала тепло в окружающую среду). Интегрирование формы  $PdV$  даст работу системы на этом пути перехода. Интегрирование точной формы  $dE$  независимо от пути перехода сведется к разности  $E_2 - E_1$  значений внутренней энергии в рассматриваемых термодинамических состояниях.

Все, что пока было сказано (без подробного обсуждения и точных формулировок), имело целью воскресить в памяти читателя самые общие сведения из термодинамики. Они служат мотивировкой того формального определения термодинамической системы, которое после сделанной подготовки будет дано ниже.

### Задача 2.

**а.** Уравнение  $\frac{PV}{T} = c$  состояния идеального газа показывает, что, наряду с парой  $(V, T)$ , в качестве независимых переменных можно было бы взять также пару  $(P, T)$  или  $(V, P)$ . На плоскости каждой из этих пар координат изобразите линии постоянного объёма (*изохоры*), давления (*изобары*), температуры (*изотермы*), а также попробуйте пока хотя бы схематично, но физически правильно, изобразить *адиабаты* — термодинамические переходы, при которых нет теплообмена с внешней средой.

**б.** В плоскости координат  $(V, P)$  изобразите какой-нибудь замкнутый термодинамический цикл (замкнутую кривую) и свяжите ограниченную этой кривой площадь с работой термодинамической системы (газа) на этом цикле.

**с.** Все знают частные производные и как дифференцировать неявную функцию. Например, если  $F(x, y) = 0$ , то  $\frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial y} = 1$ , а если  $F(x, y, z) = 0$ , то  $\frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial z} = -1$ . Проверьте последнее на законе Клапейрона, считая, что  $PV - T = 0$  или  $xy - z = 0$ . Обратите внимание на неполноту математического обозначения  $\frac{\partial y}{\partial x}$ , которое физики в термодинамических расчетах себе никогда не позволяют. Они не

напишут  $\frac{\partial P}{\partial V}$ , а напишут  $\frac{\partial P}{\partial V}|_T$  или напишут  $\frac{\partial P}{\partial V}|_P$  в зависимости от того, какая из пар переменных  $(V, T)$  или  $(V, P)$  выбрана в качестве независимой. Например, если  $xy - z = 0$ , то при выборе в качестве независимых переменных пары  $(x, z)$  получим  $\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{z}{x^2}$ , а если в качестве независимых переменных взята пара  $(x, y)$ , то, разумеется,  $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$

*Задача 3.*

**а.** В оболочке (например, в воздушном шаре, возможно вовсе не шаровой формы) газ находится при давлении  $P$ . Покажите, что элементарная работа газа, связанная с изменением формы оболочки, вычисляется, как и в рассмотренном выше частном случае, по формуле  $\delta W = PdV$ .

**б.** Владея аппаратом анализа, прямым расчётом найдите выталкивающую силу, действующую на тело, погруженное на Земле в жидкость или газ и подтвердите знаменитый закон Архимеда.

Напомним в заключение этого раздела следующий важный для дальнейшего факт.

Открытия Карно, трудами Клаузиуса привели к выводу, что для любой замкнутой кривой  $\gamma$  в пространстве равновесных состояний имеет место замечательное равенство

$$(3) \quad \int_{\gamma} \frac{\delta Q}{T} = 0,$$

где  $T$  — абсолютная температура. Оно означает, что дифференциальная форма  $\frac{\delta Q}{T}$  точна, т. е. является дифференциалом некоторой функции  $S$  состояния системы. Именно её Клаузиус и назвал *энтропией* термодинамического состояния системы или системы.

Учитывая это, равенство (2) теперь можно конкретизировать, записав в виде

$$(4) \quad TdS = dE + PdV.$$

**3. Дифференциальная форма как математическая модель термодинамической системы.**

Приведённые в предыдущем разделе факты служат мотивировкой следующего (восходящего к Гиббсу, Пуанкаре, Каратеодори) формально-математического определения или математической модели простейшей термодинамической системы.

Пусть равновесное состояние абстрактной термодинамической системы определяется набором параметров  $(\tau, a_1, \dots, a_n) =: (\tau, a)$ , где

$\tau$  будет играть роль *температуры*  $T$ , а  $a = (a_1, \dots, a_n)$  — набор *внешних параметров*, которые можно менять, как объём газа под поршнем в рассмотренном выше “игрушечном” примере.

Саму *термодинамическую систему* в рассматриваемой математической модели отождествим с фундаментальной дифференциальной формой

$$(5) \quad \omega := dE + \sum_{i=1}^n A_i da_i,$$

называемой *формой теплообмена* или, более точно, *формой притока тепла*.

По определению здесь  $E$  — *внутренняя энергия системы*, а  $A_i$  — *обобщенная сила*, отвечающая вариации координаты  $a_i$  (т. е.  $\sum_{i=1}^n A_i da_i$  отвечает работе  $\delta W$  системы, связанной с изменением внешних параметров, а сама форма  $\omega$  соответствует дифференциальной форме теплообмена  $\delta Q$  равенств (1), (2)). Величины  $E$  и  $A_i$ , естественно, зависят от  $(\tau, a_1, \dots, a_n)$ . Эти зависимости входят в определение термодинамической системы. Соотношения  $A_i = A_i(\tau, a_1, \dots, a_n)$  называют *уравнениями состояния*.<sup>2</sup>

Форма  $\omega$ , определяющая термодинамическую систему, должна иметь специальный вид  $\omega = \tau dS$ , где  $S$  — функция, называемая *энтропией* системы.

Итак, в общем случае вместо равенства (4) имеем равенство

$$(6) \quad \tau dS = dE + \sum_{i=1}^n A_i da_i.$$

Мы привели здесь математическую модель или формально-математическое определение простейшей термодинамической системы. Обратите внимание, мы взяли его не "с потолка". В нём содержится опыт многочисленных исследований, результаты которых теперь в обратном к хронологии порядке можно будет получить единообразно из общих математических фактов, относящихся к дифференциальному и интегральному исчислению функций многих переменных и исчислению дифференциальных форм.

---

<sup>2</sup>Точнее, эти соотношения называют *термическими уравнениями состояния*, а зависимость  $E = E(\tau, a_1, \dots, a_n)$  называют *калорическим уравнением состояния*.

## II. Математические следствия и их физическая интерпретация.

1. *Единственность дифференциала, равенство смешанных производных и термодинамика.*

*Задача 4.*

а. Из единственности дифференциала функции  $S = S(\tau, a_1, \dots, a_n)$  получите следующие соотношения

$$\tau \frac{\partial S}{\partial \tau} = \frac{\partial E}{\partial \tau}, \quad \tau \frac{\partial S}{\partial a_i} = \frac{\partial E}{\partial a_i} + A_i.$$

б. Учитывая равенство смешанных производных регулярной функции  $S$  переменных  $\tau, a_1, \dots, a_n$ , проверьте, что в термодинамической системе имеют место следующие нетривиальные связи

$$\frac{\partial E}{\partial a_i} + A_i = \tau \frac{\partial A_i}{\partial \tau} \quad \frac{\partial A_i}{\partial a_j} = \frac{\partial A_j}{\partial a_i}.$$

с. Учитывая полученное в пунктах а и б этой задачи или независимо, покажите, что

$$\frac{\partial S}{\partial a_i} = \frac{\partial A_i}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial S}{\partial E} = \frac{1}{\tau}, \quad \frac{\partial S}{\partial a_i} \Big|_E = \frac{A_i}{\tau}.$$

Обратите внимание на то, что в последних двух формулах фиксируется, когда вычисляется соответствующая частная производная. В частности, когда вычисляется  $\frac{\partial S}{\partial E}$ , подразумевается, что соотношение  $E = E(\tau, a_1, \dots, a_n)$  разрешается относительно  $\tau$  и независимыми становятся переменные  $E, a_1, \dots, a_n$ .

*Задача 5.*

Рассмотрите частный случай термодинамической системы — идеальный газ. Ему соответствует форма (4) и уравнение состояния  $P = cT/V$  (закон Клапейрона).

Пользуясь одним из соотношений предыдущей задачи, покажите, что внутренняя энергия  $E = E(T, V)$  идеального газа на самом деле зависит только от температуры  $T$ .

Этот факт был установлен Джоулем в знаменитом эксперименте.

2. *Термодинамические потенциалы.*

*Задача 6.*

а. Если бы мы вместо переменных  $\tau, a_1, \dots, a_n$  в качестве независимых взяли  $E, a_1, \dots, a_n$ , разрешив уравнение  $E = E(\tau, a_1, \dots, a_n)$

относительно  $\tau$ , то из формулы (6), определяющей термодинамическую систему, мы по одной функции  $S$  — энтропии, нашли бы все параметры системы:  $\frac{\partial S}{\partial E} = \frac{1}{\tau}$ ,  $\frac{\partial S}{\partial a_i} = \frac{A_i}{\tau}$ . (Конечно, потом можно или следует вернуться к координатам  $\tau, a_1, \dots, a_n$ .)

Это подобно тому, как знание одной функции — потенциала векторного поля, если поле потенциально, позволяет восстановить всё поле. По этой причине и в термодинамике характеристические функции, по которым восстанавливается термодинамическая система, т.е. все её параметры, часто называют *термодинамическими потенциалами*. Мы видим, что в переменных  $E, a_1, \dots, a_n$  таким потенциалом является *энтропия*.

В переменных  $\tau, a_1, \dots, a_n$  характеристической функцией термодинамической системы будет функция  $\Psi = E - \tau S$ , называемая *свободной энергией*.

Проверьте это и покажите, что  $\frac{\partial \Psi}{\partial \tau} = -S$ ,  $\frac{\partial \Psi}{\partial a_i} = -A_i$ ,  $E = \Psi - \tau \frac{\partial \Psi}{\partial \tau}$ . Заметим, что, как видно из этих формул, свободная энергия является также потенциалом поля сил  $(A_1, \dots, A_n)$  при постоянном значении температуры, а энергия системы получается преобразованием Лежандра свободной энергии по температуре.

**б.** Рассмотрим термодинамическую систему (типа газа), определяемую соотношением  $\delta Q = dE + PdV$  или  $TdS = dE + PdV$ , где  $E = E(T, V)$  и  $P = P(T, V)$ . В качестве независимых переменных здесь, наряду с парой  $(T, V)$  можно было бы выбрать любую из пар  $(E, V)$ ,  $(T, P)$ ,  $(S, V)$ ,  $(S, P)$ . Каждому такому выбору соответствует своя характеристическая функция термодинамической системы. Используя правило дифференцирования произведения функций и элементарные преобразования дифференциальных выражений, покажите, что указанным парам координат будут отвечать следующие термодинамические потенциалы: *энтропия*  $S(E, V)$ ; *свободная энергия*  $\Psi$  или  $F = E - TS(T, V)$ ; *свободная энтальпия*  $\Phi = F + PV(T, P)$ ; *энергия*  $E(S, V)$ ; *энтальпия*  $H = E + PV(S, P) (= \Phi + TS)$ .

Свободная энергия ещё называется *свободной энергией Гельмгольца*, а свободная энтальпия ещё называется *свободной энергией Гиббса* и часто обозначается символом  $G$ .

### 3. Производная по направлению и теплоёмкость.

Всем известно понятие *производной функции по вектору*

$$D_v f(x) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + vt) - f(x)}{t}.$$



Эта величина характеризует скорость изменения значений функции при смещении от рассматриваемой точки  $x$  в области определения функции в направлении вектора  $v$  со скоростью  $|v|$ . Если в качестве  $v$  берется единичный вектор данного направления, то производную функции по такому вектору обычно называют *производной функции по данному направлению или в данном направлении*. Например, частные производные функции нескольких переменных — это её производные в направлении координатных осей.

В термодинамике есть родственное этому понятию по духу понятие теплоёмкости. Теплоёмкость объекта (кастрюли с супом, стакана воды, порции газа,...), грубо говоря, это то количество тепла, которое нужно сообщить объекту, чтобы поднять его температуру на один градус.

А теперь поточнее. Температуру будем мерить в фиксированной шкале — той шкале Кельвина абсолютной температуры, которая уже использовалась в записи уравнения состояния идеального газа. В качестве точки  $x$ , от которой мы стартуем, теперь выступает то состояние термодинамического равновесия объекта — термодинамической системы, в котором мы начинаем объект (систему) подогреть. Но состояние равновесия термодинамической системы задаётся набором её термодинамических параметров. Параметров несколько, поэтому надо ещё сказать в каком направлении  $e$  мы собираемся смещаться в пространстве равновесных состояний. Например, для фиксированной порции газа можно измерять её теплоёмкость при постоянном объёме, а можно измерять при постоянном давлении.

Итак, *теплоёмкость*  $C(x, e)$  системы зависит от исходного состояния  $x$  равновесия системы и от направления  $e$  смещения в пространстве её равновесных состояний, причём сама величина  $C(x, e)$  есть предел отношения  $\frac{\Delta Q}{\Delta T}$  приращения (притока) тепла к приращению температуры системы, когда смещение от состояния  $x$ , происходящее в направлении  $e$ , стремится к нулю.

### Задача 7.

Рассмотрите частный случай термодинамической системы — идеальный газ в количестве одного моля. Ему соответствует форма (4) и уравнение состояния  $P = RT/V$ , где  $R$  — так называемая *универсальная газовая постоянная*.

Молярные теплоёмкости газа принято обозначать строчной буквой  $c(x, e)$ . Более того, символами  $c_V$  и  $c_P$  принято обозначать теплоёмкость моля газа при фиксированном объёме и при фиксированном давлении соответственно.

Покажите (вспомнив, где нужно, задачу 5), что для идеального газа справедливы следующие соотношения:

**a.**  $c_V = \left. \frac{\partial E}{\partial T} \right|_V$  .

**b.**  $c_P = \left. \frac{\partial E}{\partial T} \right|_V + R$  .

**c.**  $c_P - c_V = R$  (Соотношение Майера).

*Задача 8.*

В довольно большом диапазоне состояний газа величины  $c_V$  и  $c_P$  можно считать практически постоянными.

**a.** Принимая это допущение, покажите, что формулу  $\delta Q$  притока тепла из соотношения (4) в случае идеального газа можно представить в виде

$$\delta Q = \frac{1}{R} (c_V V dP + c_P P dV),$$

поскольку при постоянстве  $c_P, c_V$  можно считать, что  $E = c_V T$  и нам известно, что  $c_P - c_V = R$ .

**b.** При том же, что и выше, допущении о постоянстве величин  $c_P, c_V$  получите формулу

$$dS = \frac{c_V}{T} dT + \frac{R}{V} dV$$

для дифференциала энтропии моля идеального газа.

**c.** Получите теперь формулу

$$S = \ln \frac{T^{c_V} V^R}{T_0^{c_V} V_0^R}$$

для энтропии моля идеального газа.

*Задача 9.*

Изменение состояния термодинамической системы, происходящее без теплообмена с окружающей средой, как известно, называется *адиабатическим* изменением состояния или *адиабатическим термодинамическим процессом*. Ясно, что адиабатические процессы в пространстве равновесных термодинамических состояний системы происходят при неизменной энтропии (см. формулы (4) или (6)), поэтому *адиабаты* ещё могут быть названы *изоэнтропами*.

Вслед за Пуассоном получите следующие уравнения адиабаты идеального газа

- а.  $T^{c_V} V^R = T_0^{c_V} V_0^R$  в переменных  $(T, V)$ .  
 б.  $P^{c_V} V^{c_P} = P_0^{c_V} V_0^{c_P}$  в переменных  $(P, V)$ .  
 с.  $T^{c_P} P^R = T_0^{c_P} P_0^R$  в переменных  $(T, P)$ .

4. *Цикл Карно и коэффициент полезного действия тепловой машины.*

Рассмотрим снова идеальный газ как термодинамическую систему. Для неё выполняется соотношение (2), выражающее энергетический баланс в равновесных термодинамических процессах. Если совершить такой квазистатический процесс вдоль некоторого замкнутого пути  $\gamma$  в пространстве равновесных состояний, то, очевидно, мы придём к равенству

$$\int_{\gamma} \delta Q = \int_{\gamma} P dV.$$

Слева стоит полученное системой в этом цикле тепло, а справа стоит механическая работа системы, произведённая в этом цикле. Если в качестве независимых параметров взять не пару  $(T, V)$ , а пару  $(V, P)$ , то в плоскости  $(V, P)$  последнему интегралу отвечает площадь области, ограниченной кривой  $\gamma$  (с точностью до знака, зависящего от ориентации кривой).

Конкретизируем теперь цикл  $\gamma$ .

Напомним, что *цикл Карно* изменения состояния рабочего тела тепловой машины (например, газа, находящегося в цилиндре под поршнем) состоит в следующем. Имеются два энергоёмких тела, нагреватель и холодильник (например, паровой котел и атмосфера), находящиеся при постоянной температуре  $T_1$  и  $T_2$  соответственно ( $T_1 > T_2$ ). Рабочее тело (газ) рассматриваемой тепловой машины, имея в состоянии 1 температуру  $T_1$ , приводится в контакт с нагревателем и за счет уменьшения внешнего давления по изотерме квазистатически расширяется и переводится в состояние 2. При этом машина заимствует от нагревателя тепло  $Q_1$  и производит механическую работу  $W_{12}$  против внешнего давления. В состоянии 2 газ теплоизолируют и заставляют квазистатически расширяться до состояния 3, пока его температура не достигнет температуры  $T_2$  холодильника. При этом машина также совершит некоторую работу  $W_{23}$  против внешнего давления. В состоянии 3 газ приводят в контакт с холодильником и путем увеличения давления изотермически

сжимают до состояния 4. При этом над газом совершается работа (сам газ совершает отрицательную работу  $W_{34}$ ) и газ отдает холодильнику некоторое количество тепла  $Q_2$ . Состояние 4 выбирается так, чтобы из него можно было вернуться в исходное состояние 1 квазистатическим сжатием газа по адиабате. Итак, из состояния 4 газ возвращают в состояние 1. При этом над газом придется совершить работу (а сам газ произведет отрицательную работу  $W_{41}$ ). В результате описанного кругового процесса (*цикла Карно*) внутренняя энергия газа (рабочего тела машины), очевидно, не изменится (ведь мы вернулись в исходное состояние), поэтому произведенная машиной работа равна  $W = W_{12} + W_{23} + W_{34} + W_{41} = Q_1 - Q_2$ .

Полученное от нагревателя тепло  $Q_1$  лишь частично пошло на совершение работы  $W$ . Величину  $\eta = \frac{W}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}$  естественно называть *коэффициентом полезного действия* (к. п. д.) рассматриваемой *тепловой машины*.

#### Задача 10.

**a.** Напомним, что в задаче 8а, воспользовавшись уравнением состояния  $PV = RT$  и соотношением Майера  $c_P - c_V = R$  для моля идеального газа, мы получили следующее выражение формы  $\delta Q$  притока тепла  $\delta Q = c_P \frac{P}{R} dV + c_V \frac{V}{R} dP$ . Напишите теперь формулу для количества  $Q$  тепла, получаемого молем газа при изменении его состояний вдоль произвольного пути  $\gamma$  плоскости равновесных состояний с координатами  $(V, P)$ .

**b.** Рассмотрите теперь цикл Карно. Нарисуйте его в плоскости  $(V, P)$ .

**c.** Вычислите интеграл  $\int_{\gamma_i} \frac{\delta Q}{T} = \int_{\gamma_i} dS$  на каждом из четырех участков  $(\gamma_i, i = 1, 2, 3, 4)$  цикла Карно.

**d.** Откройте, вслед за Карно и Клаузиусом, замечательное равенство<sup>3</sup>

$$\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2} \quad \text{или} \quad \frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} = 0,$$

развитием которого является общая формула Клаузиуса (3) ( $\int_{\gamma} \frac{\delta Q}{T} = 0$ ), которой вы, вероятно, воспользовались при доказательстве этой теоремы Карно-Клаузиуса.

<sup>3</sup>Оно, как и формула (3), в явном виде впервые появилось уже только у Клаузиуса, с его чётким математическим языком и ясностью понятий, которые теперь лежат в фундаменте аппарата и языка всей классической термодинамики.

**е.** Попробуйте самостоятельно вывести общую теорему Клаузиуса (соотношение (3)), считая известным, что в цикле Карно  $\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2}$ .

**ф.** Покажите, что коэффициент полезного действия тепловой машины, работающей по циклу Карно, равен  $1 - \frac{T_2}{T_1}$ .

Знаменитая вторая теорема Карно состоит в том, что никакая тепловая машина, как бы она ни была устроена, не может иметь больший коэффициент полезного действия, если она работает между теми же температурами  $T_1, T_2$  нагревателя и холодильника.<sup>4</sup>

Развитием этой второй теоремы Карно является фундаментальное общее *неравенство Клаузиуса*

$$\int_{\gamma} \frac{\delta Q}{T} \leq 0,$$

относящееся к любому замкнутому термодинамическому циклу любой термодинамической системы. Если цикл обратим, то интеграл, конечно, равен нулю (объясните это!). В типичном же случае он отрицателен, поскольку тепловые процессы, как правило, необратимы.

Все, что мы до этого обсуждали, относилось к обратимым термодинамическим процессам (путям в пространстве равновесных состояний).

**г.** Оцените к. п. д. паровой машины, в которой максимальная температура пара не превышает  $150^\circ\text{C}$  то есть  $T_1 = 423\text{ K}$ , а температура холодильника — окружающей среды — порядка  $20^\circ\text{C}$ , то есть  $T_2 = 291\text{ K}$ ).

*Задача 11.*

*Коэффициент полезного действия реактивного движения.*

**а.** Пусть  $Q$  — химическая энергия единицы массы топлива ракеты,  $\omega$  — скорость истечения топлива. Тогда  $\frac{1}{2}\omega^2$  есть кинетическая энергия выброшенной единицы массы топлива. Коэффициент  $\alpha$  в равенстве  $\frac{1}{2}\omega^2 = \alpha Q$  есть коэффициент полезного действия процессов горения и истечения топлива. Для ракетных двигателей на твёрдом топливе (бездымный порох)  $\omega = 2\text{ км/с}$ ,  $Q = 1000\text{ ккал/кг}$ , а на жидком (бензин с кислородом)  $\omega = 3\text{ км/с}$ ,  $Q = 2500\text{ ккал/кг}$ . Определите в этих случаях коэффициент  $\alpha$ .

<sup>4</sup>Профессиональные историки науки могут сказать, и не без основания, что мы тут несколько упрощаем дело и что у Карно не всё было так уж гладко и явно сформулировано. Объективности ради отмечаем это, отсылая заинтересованного читателя к рукописям Карно и к работам их комментаторов.

(Калория — устаревшая единица измерения тепловой энергии, выражавшая количество тепла, потребное для нагревания одного грамма воды на один градус Цельсия. Калория = 4.1868 джоуля — механический эквивалент тепла (1 кал = 4.1868 Дж). Кстати, о порядке величин: стакан воды, точнее, двести граммов воды, подогрели с нуля градусов до кипения, до ста градусов Цельсия. На какую высоту затраченной энергией можно было бы поднять, например, домкратом, легковой автомобиль весом в одну тонну?)

**в.** Коэффициент полезного действия (к. п. д.) ракеты определяется как отношение её конечной кинетической энергии  $m_K \frac{v^2}{2}$  к химической энергии сгоревшего топлива  $m_T Q$  (здесь  $m_K$  — масса корпуса, то есть масса ракеты без топлива,  $m_T$  — масса топлива, а  $v$  — конечная скорость).

Опираясь на принцип сохранения импульса механической системы, элементарными методами математического анализа легко получить (получите!) следующую формулу Меццеровского-Циолковского для расчёта скорости движения тела переменной массы

$$V(t) = V_0 + \omega \ln \frac{M(0)}{M(t)}.$$

Здесь  $V_0$  — начальная скорость,  $M(0)$  — начальная масса ракеты вместе с топливом,  $M(t)$  — масса ракеты с топливом в момент времени  $t$ , а  $V(t)$  — скорость, которую ракета имеет в этот момент  $t$ . Положим  $V_0 = 0$ . Тогда для интересующей нас сейчас конечной скорости ракеты  $v$  получаем формулу

$$v = \omega \ln \left( 1 + \frac{m_T}{m_K} \right).$$

Пользуясь этой формулой, получите формулу для к. п. д. ракеты через  $m_K$ ,  $m_T$ ,  $Q$  и  $\alpha$  (см. пункт а этой задачи).

**с.** Оцените к. п. д. автомобиля с жидкостным реактивным двигателем, если автомобиль разгоняется до установленной в городе скорости 60 км/час.

**д.** Оцените к. п. д. ракеты на жидком топливе, выводящей спутник на низкую околоземную орбиту.

**е.** Оцените, для какой конечной скорости реактивное движение на жидком топливе имеет наибольший к. п. д.

**ф.** Укажите, при каком отношении масс  $m_T/m_K$  топлива и корпуса к. п. д. ракеты с любым видом топлива становится максимально возможным.