З А Д А Ч И

к коллоквиуму по математическому анализу

для студентов первого курса второго потока

2011-2012 учебный год

Лектор профессор В.А.ЗОРИЧ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

1. Покажите, что если вектор ускорения $\mathbf{a}(t)$ в любой момент t ортогонален вектору $\mathbf{v}(t)$ скорости движения, то величина $|\mathbf{v}(t)|$ остаётся постоянной.

2. Пусть (x,t) и $(\tilde{x},\tilde{t})$ — соответственно координата и время движущейся точки в двух системах отсчёта. Считая известными формулы $\tilde{x} = \alpha x + \beta t$, $\tilde{t} = \gamma x + \delta t$ перехода из одной системы отсчёта в другую, найдите формулу преобразования скоростей, т.е. связь между $v = \frac{dx}{dt}$ и $\tilde{v} = \frac{d\tilde{x}}{d\tilde{t}}$.

3. Функция $f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}$ при $x \neq 0$ и $f(0) = 0$ дифференцируема на $\mathbb{R}$, но f' разрывна при $x = 0$ (проверьте). «Докажем», однако, что если $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ дифференцируема на $\mathbb{R}$, то f' непрерывна в любой точке $a \in \mathbb{R}$. По теореме Лагранжа

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(\xi),$$

где ξ — точка между a и x. Тогда если $x \to a$, то $\xi \to a$. По определению,

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a),$$

и поскольку этот предел существует, то существует и равен ему предел правой части формулы Лагранжа, т.е. $f'(\xi) \to f'(a)$ при $\xi \to a$. Непрерывность f' в точке a «доказана». Где ошибка?

4. Пусть функция f имеет $n+1$ производную в точке x_0, и пусть $\xi = x_0 + \theta_x(x - x_0)$ — средняя точка в формуле Лагранжа остаточного члена $\frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi)(x - x_0)^n$, так что $0 < \theta_x < 1$. Покажите, что $\theta_x \to \frac{1}{n+1}$ при $x \to x_0$, если $f^{(n+1)}(x_0) \neq 0$.

5. *a*) Если функция $f \in C^{(n)}([a, b], \mathbb{R})$ в $n+1$ точке отрезка $[a, b]$ имеет нули, то на этом отрезке имеется по крайней мере один нуль функции $f^{(n)}$ — производной f порядка n.

b) Покажите, что полином $P_n(x) = \frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}$ на отрезке $[-1, 1]$ имеет n корней. ($x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ и $P_n^{(k)}(-1) = {P_n}^{(k)}(1) = 0$ при $k = 0, ..., n-1$.)

6. Вспомните геометрический смысл производной и покажите, что если функция f определена и дифференцируема на интервале I и $[a, b] \subset I$, то функция f' (даже не будучи непрерывной!) принимает на отрезке $[a, b]$ все значения между $f'(a)$ и $f'(b)$.

7. Докажите неравенство

$$a_1^{\alpha_1} \dots a_n^{\alpha_n} \leq \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n,$$

где числа $a_1, \dots, a_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ неотрицательны и $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 1$.

8. Покажите, что

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^x(\cos y + i \sin y) \qquad (z = x + iy),$$

поэтому естественно считать, что $e^{iy} = \cos y + i \sin y$ (формула Эйлера) и

$$e^z = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y).$$

9. Найдите форму поверхности жидкости, равномерно вращающейся в стакане.

10. Покажите, что касательная к эллипсу $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ в точке (x_0, y_0) имеет уравнение $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$ и что световые лучи от источника, помещённого в одном из фокусов $F_1 = \left(-\sqrt{a^2 - b^2}, 0\right)$, $F_2 = \left(\sqrt{a^2 - b^2}, 0\right)$ эллипса с полуосями $a > b > 0$, собираются эллиптическим зеркалом в другом фокусе.

11. Частица без предварительного разгона под действием силы тяжести начинает скатываться с вершины ледяной горки эллиптического профиля. Уравнение профиля: $x^2 + 5y^2 = 1,\ y \geq 0$. Рассчитайте траекторию движения частицы до её приземления.

12. Средним порядка α чисел $x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n$ называют величину

$$s_\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left(\frac{x_1^\alpha + x_2^\alpha + \ldots + x_n^\alpha}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

В частности, при $\alpha = 1, 2, -1$ получаем соответственно *среднее арифметическое*, *среднее квадратичное* и *среднее гармоническое* этих чисел.

Будем считать, что все числа $x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n$ неотрицательны, а если степень $\alpha < 0$, то будем предполагать, что они даже положительны.

a) Используя неравенство Гёльдера, покажите, что если $\alpha < \beta$, то

$$s_\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq s_\beta(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

причём равенство имеет место лишь когда $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

b) Покажите, что при стремлении α к нулю величина $s_\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n)$ стремится к $\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}$, т.е. к *среднему геометрическому* этих чисел.

С учётом результата задачи *a*) отсюда, например, следует классическое неравенство между средним геометрическим и средним арифметическим неотрицательных чисел (напишите его).

c) Если $\alpha \to +\infty$, то $s_\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) \to \max\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, а при $\alpha \to -\infty$ величина $s_\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n)$ стремится к меньшему из рассматриваемых чисел, т.е. к $\min\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Докажите это.

13. Пусть $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ — закон движения точки (т.е. её радиус-вектор как функция времени). Считаем, что это непрерывно дифференцируемая функция на промежутке $a \leq t \leq b$.

a) Можно ли, ссылаясь на теорему Лагранжа о среднем, утверждать, что на $[a, b]$ найдётся момент ξ, такой что $\mathbf{r}(b) - \mathbf{r}(a) = \mathbf{r}'(\xi) \cdot (b - a)$? Поясните ответ примерами.

b) Пусть $\mathrm{Convex}\{\mathbf{r}'\}$ — выпуклая оболочка множества (концов) векторов $\mathbf{r}'(t),\ t \in [a, b]$. Покажите, что найдётся вектор $\mathbf{v} \in \mathrm{Convex}\{\mathbf{r}'\}$, такой что $\mathbf{r}(b) - \mathbf{r}(a) = \mathbf{v} \cdot (b - a)$.

c) Соотношение $|\mathbf{r}(b) - \mathbf{r}(a)| \leq \sup |\mathbf{r}'(t)||b - a|$, где верхняя грань берется по $t \in [a, b]$, имеет очевидный физический смысл, — какой? Докажите это неравенство как общий математический факт, развивающий классическую теорему Лагранжа о конечном приращении.

Если у вас осталось что-то недоделанное из первого коллоквиума, например в его задачах 3 и 11, то, располагая новыми знаниями, доделайте это и принесите.