

З А Д А Ч И

к коллоквиуму по математическому анализу
для студентов первого курса второго потока

2011-2012 учебный год

Лектор профессор В.А.ЗОРИЧ

ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

(число, функция, предел)

1. Длину стягивающего земной шар по экватору обруча увеличили на 1 метр. Образовался зазор. Достаточен ли он для прохода муравья? Каковы величины абсолютного и относительного увеличения радиуса Земли при таком увеличении длины экватора? (Радиус Земли ≈ 6400 км.)

2. Как связаны полнота (непрерывность) действительных чисел, неограниченность натурального ряда и принцип Архимеда? Почему любое действительное число можно сколь угодно точно приблизить рациональным? Объясните на модели рациональных дробей (рациональных функций), что принцип Архимеда может быть нарушен, и в таких числовых системах натуральный ряд ограничен и имеются бесконечно малые числа.

3. Четыре букашки, сидевшие в вершинах единичного квадрата, стали двигаться друг за другом с единичной скоростью, держа курс на преследуемого. Нарисуйте траектории их движения. Какова длина каждой траектории? Каков закон движения (в декартовых и полярных координатах)?

4. Нарисуйте диаграмму вычисления \sqrt{a} ($a > 0$) итерационным про-

цессом $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right)$. Как находить $\sqrt[n]{a}$?

Как связано решение уравнений с отысканием неподвижных точек? Верно ли, что каждое непрерывное отображение $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ имеет неподвижную точку?

5. Пусть $g(x) = f(x) + o(f(x))$ при $x \rightarrow \infty$. Верно ли, что тогда и $f(x) = g(x) + o(g(x))$ при $x \rightarrow \infty$?

Пусть известно, что $o(f(x)) = O(g(x))$ при $x \rightarrow \infty$. Верно ли, что тогда и $O(g(x)) = o(f(x))$ при $x \rightarrow \infty$ (например, когда $f = g$)?

Известно, что всегда $O(f) + o(f) = O(f)$, и $o(f) + o(f) = o(f)$, и $2o(f) = o(f)$ при фиксированной базе. Следует ли отсюда, что $o(f) \equiv 0$?

6. Известно, что произведение двух или любого конечного числа бесконечно малых является функцией бесконечно малой. Приведите пример, показывающий, что для бесконечных произведений это уже не всегда так.

7. Зная степенное разложение функции e^x , найдите методом неопределенных коэффициентов (или иначе) несколько первых членов (или все) степенного разложения функции $\ln(1+x)$.

8. Вычислите $\exp A$, когда A — одна из матриц

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

9. Сколько членов ряда для e^x надо взять, чтобы получить многочлен, позволяющий вычислять e^x на отрезке $[-1, 2]$ с точностью до 10^{-3} ?

10. Зная степенные разложения функций $\sin x$ и $\cos x$, найдите методом неопределенных коэффициентов (или иначе) несколько первых членов (или все) степенного разложения функции $\operatorname{tg} x$ в окрестности точки $x = 0$.

11. Длину стягивающего земной шар по экватору обруча увеличили на 1 метр, после чего обруч натянули, подперев вертикальным столбиком. Какова высота столбика, если радиус Земли ≈ 6400 км. ?

12. Вычислите $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(e \cdot \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{-x} \right)^x$.

13. Нарисуйте эскизы графиков следующих функций:

a) $\log_{\cos x} \sin x$; b) $\operatorname{arctg} \frac{x^3}{(1-x)(1+x)^2}$.