З А Д А Ч И

к коллоквиуму по математическому анализу в группах 207-212 второго курса второго потока 2012-2013 учебный год Лектор профессор В.А.Зорич

Тема: РЯДЫ И ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА

0. Вы держите один конец резинового шнура длиной 1 км. От второго его конца, который закреплен, к вам со скоростью 1 см/с ползет букашка. Каждый раз, как только она проползает 1 см, вы растягиваете резинку на 1 км. Доползет ли букашка до вашей руки? Если да, то приблизительно сколько ей на это потребуется времени?

После некоторого размышления для ответа на предыдущий вопрос вам может оказаться полезной сумма $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$. Вспомните интеграл и покажите, что $S_n - 1 < \int_1^n \frac{1}{x}dx < S_{n-1}$.

1. P — полином. Вычислите $(e^{t\frac{d}{dx}})P(x)$.

2. Проверьте, что вектор-функция $e^{t\mathrm{A}}x_0$ решает задачу Коши $\dot{x} = Ax,\ x(0) = x_0$ ($\dot{x} = Ax$ — система уравнений, задаваемая матрицей A).

3. Найдите с точностью до $o(1/n^3)$ асимптотику положительных корней $\lambda_1 < \lambda_2 < ... < \lambda_n < ...$ уравнения $\sin x + 1/x = 0$ при $n \to \infty$.

4. a) Покажите, что $\ln 2 = 1 - 1/2 + 1/3 - ...$.
Сколько членов этого ряда надо взять, чтобы знать $\ln 2$ с точностью до 10^{-3}?
b) Проверьте что $\frac{1}{2}\ln\frac{1+t}{1-t} = t + \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 + ...$
Используя это разложение, удобно вычислять $\ln x$, полагая $x = \frac{1+t}{1-t}$.
c) Полагая в b) $t = 1/3$, найдите, что

$$\frac{1}{2}\ln 2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}(\frac{1}{3})^2 + \frac{1}{5}(\frac{1}{3})^5 + ...$$

Сколько членов этого ряда надо взять, чтобы знать $\ln 2$ с точностью до 10^{-3}? Сравните с тем, что было в a).
Это один из приемов улучшения сходимости.

5. Проверьте, что в смысле Абеля
a) $1 - 1 + 1 - ... = \frac{1}{2}$.
b) $\sum_{k=1}^{\infty} \sin k\varphi = \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\varphi \qquad \varphi \neq 2\pi n, \quad n \in Z.$
c) $\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \cos k\varphi = 0 \qquad \varphi \neq 2\pi n, \quad n \in Z.$

6. Докажите лемму Адамара:
a) Если $f \in C^{(1)}(U(x_0))$, то $f(x) = f(x_0) + \varphi(x)(x - x_0)$,
где $\varphi \in C(U(x_0))$ и $\varphi(x_0) = f^{'}(x_0)$.
b) Если $f \in C^{(n)}(U(x_0))$, то

$$f(x) = f(x_0)+\frac{1}{1!}f^{'}(x_0)(x-x_0)+...+\frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x_0)(x-x_0)^{n-1}+\varphi(x)(x-x_0)^n,$$

где $\varphi \in C(U(x_0))$ и $\varphi(x_0) = \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)$.
c) Как выглядят эти соотношения в координатной записи, когда $x = (x^1, ..., x^n)$, то-есть, когда f—функция n переменных?
7. a) Проверьте, что функция

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{\cos xt}{\sqrt{1-t^2}}\ dt$$

удовлетворяет уравнению Бесселя $y^{''} + \frac{1}{x}y^{'} + y = 0$.
b) Попробуйте решить это уравнение, используя степенные ряды.
c) Найдите степенное разложение функции $J_0(x)$.
8. Проверьте справедливость асимптотических разложений
a) $\Gamma(\alpha, x) := \int_x^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}\ dt \simeq e^{-x}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-k+1)}x^{\alpha-k}$,
b) $\mathrm{Erf}(x) := \int_x^{+\infty} e^{-t^2}\ dt \simeq \frac{1}{2}\sqrt{\pi}e^{-x^2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(3/2-k)x^{2k-1}}$
при $x \to +\infty$.
9. a) Вслед за Эйлером найдите, что ряд $1 - 1!x + 2!x^2 - 3!x^3 + ...$ связан с функцией

$$S(x) := \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt}\ dt\ .$$

b) Сходится ли этот ряд?
c) Дает ли он асимптотическое разложение $S(x)$ при $x \to 0$?
10. a) Линейный прибор A, характеристики которого постоянны во времени, в ответ на входной сигнал $\delta(t)$ в виде δ-функции выдал сигнал (функцию) $E(t)$. Каков будет ответ прибора на входной сигнал $f(t)$, $-\infty < t < +\infty$?
b) Всегда ли по преобразованному сигналу $\hat{f} := Af$ однозначно восстанавливается исходный сигнал f?