Математика как язык и метод

(пояснение для не маленьких)

В.А. Зорич

1. Согласно легенде (популярностью которой, по некоторым сведениям, мы обязаны знаменитому французу Аруэ, известному больше под псевдонимом Вольтер[1]) на голову Ньютона упало яблоко. Поскольку к тому времени в этой голове уже содержались и законы Кеплера, и очень многое другое, результат оказался отличным от того, что получается, когда яблоко падает на другие головы.

Кое-что из того, что произошло в математике как науке после этого события, за минувшие три столетия стало азбукой естествознания.

Лабиринт, рассматриваемый сверху, всегда представляется простым.

2. Намереваясь сказать здесь кое-что о математике вообще, начну с примера, облегчающего последующее взаимопонимание.

Старше ньютонова яблока легенда о бегущем голышом по Сиракузам Архимеде, восклицающем "Эврика! Эврика!"(Нашел! Нашел!). Она имеет несколько вариантов. Мы приведем два, а потом сделаем некоторые наблюдения и выводы.

Процитируем академика М.Л.Гаспарова. [2]

«Дело было вот в чем. Сиракузский тиран Гиерон получил от золотых дел мастера золотой венец и хотел проверить, не подмешал ли мастер в золото серебра. Нужно было сравнить объемы венца и куска чистого золота с тем же весом. Архимед, опускаясь в залитую до краев ванну и глядя, как переливается через края вытесняемая его телом во-

---

[1]Фамилия Arouet с уточнением L(e) J(eun) в латинском написании выглядит как AROVETLI. Перестановкой букв отсюда получен псевдоним VOLTAIRE.

[2]М.Л.Гаспаров, «Занимательная Греция». Фортуна Лимитед, 2002. С. 362.

да, вдруг понял, что именно так можно легко измерить объемы двух тел разной формы».

Несколько более продвинутый вариант состоит в следующем. [3]

Мастеру было дано отдельно золото и серебро, которые в сплаве образуют прочное изделие. Архимеду, не повредив венца, надо было узнать, не заменил ли мастер часть золота серебром.

Пусть x_1, x_2 - соответственно количества граммов золота и серебра в готовом венце. Его вес $x_1 + x_2 = \mathrm{A}$ легко измерить и проверить совпадение с общим весом того, что было дано мастеру. Мастер не дурак, совпадение будет. Подвесим венец на динамометр, погрузим его в полную ванну, соберем вылившуюся воду, измерим её объем V и вес P, а также прочитаем новое показание В весов. Свяжем полученные данные. Кому это затруднительно, может опустить пару абзацев.

Плотности p_1, p_2 (массы единиц объема в терминах веса на Земле) наших драгоценных металлов давно хорошо известны.

Тогда величины $x_1/p_1 = V_1, \quad x_2/p_2 = V_2$ дают объемы каждого металла в венце. Значит, $V_1 + V_2 = V$.

Тем самым мы уже имеем соотношения

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} x_1 & + & x_2 & = & \mathrm{A}, \\ x_1/p_1 & + & x_2/p_2 & = & V. \end{array} \right.$$

Если математика нас научила не только писать, но и решать системы уравнений вида

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} \mathrm{a}_{11}x_1 & + & \mathrm{a}_{12}x_2 & = & b_1, \\ \mathrm{a}_{21}x_1 & + & \mathrm{a}_{22}x_2 & = & b_2, \end{array} \right.$$

то мы найдем неизвестные нам x_1, x_2, выполним государственный заказ, получим некоторое вознаграждение для продолжения существования, сможем отвечать на другие подобные вопросы и, что, наверное, главное, получим такое наслаждение от открытия, что, не чувствуя под собой земли, полетим по Сиракузам, повторяя "Эврика! Эврика!"

(Ученые, как правило, народ свободолюбивый, но готовы жизнь отдать за то, чтобы что-то с чем-то связать.)

[3] Возможно, он меньше подходил для доступной, высоко профессиональной, завораживающе увлекательной книги светлой памяти Михаила Леоновича Гаспарова (1935–2005), но больше подходит сейчас нам.

Не поленившись обработать остальные данные эксперимента, мы найдем, что $A - B = P$, т.е. тело, погруженное в воду, теряет в весе столько, сколько весит вытесненная им вода.

Но ведь это же ЗАКОН АРХИМЕДА!

(Естественно, все можно повторить и с другой жидкостью или даже с газом.)

Это стоит дороже венца Сиракузского тирана Гиерона! Спасибо ему за задачу, побочный продукт которой затмевает вопрос.

Да, плоты, лодки, корабли плавали и до Архимеда. Но теперь мы можем проектировать корабль, можем до спуска его на воду предвидеть его грузоподъемность. Теперь мы можем спроектировать и дирижабль для переноса по воздуху больших конструкций (при строительстве буровых, обсерваторий) в недоступных для наземного транспорта местах, и т.д.

3. Мы привели этот пример, чтобы на его фоне сказать несколько слов о специфике математики как науки. Не будем пытаться здесь дать определение математики. Просто понаблюдаем за примером и констатируем кое-что, лежащее уже на поверхности.

Математика позволила нам перевести вопрос на какой-то специальный язык. (Какие-то символы, равенства,...). Значит, математика имеет атрибуты *языка.*

Но тут есть заметное отличие от просто перевода исходного вопроса, например, с греческого на русский или китайский. По каждому из таких переводов, с одной стороны, худо-бедно можно восстановить исходный текст и содержание исходного вопроса, а с другой стороны, при таком переводе лишь меняется написание, вопрос остается.

Переходя к математическому тексту, т.е. к математической записи, мы абсолютно лишаемся возможности вернуться к конкретному частному вопросу, если мы потеряли его исходный текст. Но зато мы получаем определенный математический вопрос (здесь это решение системы уравнений), который, будучи разрешенным, ответит и на наш исходный частный вопрос и на все подобные вопросы разом.

Математики находят способы (методы) решать и системы уравнений, и многие другие задачи, которые на первый взгляд не интересны никому, кроме самих математиков. На самом же деле, подобно числу, они обслуживают огромную сферу конкретных объектов и явлений.

Итак, математика чаще всего дает не только специальный *язык*, (на котором стараются записать возникший вопрос, отбрасывая все второстепенное), но также и *метод* решения возникающей уже чисто математической задачи.

Решив ее, мы, в частности, получаем ответ и на интересующий нас специальный вопрос.

Теперь мы уже можем привести и оценить следующие высказывания:

Великая книга природы написана языком математики. (Галилей)

Если обозначения удобны для открытий, то поразительно сокращается путь к истине. (Лейбниц)

Математика — это искусство называть разные вещи одинаковыми именами. (Пуанкаре)

Добавим еще цитату из уже упоминавшейся выше книги Гаспарова:

«На могиле Архимеда по его завещанию вместо памятника было поставлено изображение цилиндра с вписанным в него шаром и начертано открытое им отношение их объемов — 3:2. Полтораста лет спустя, когда в Сицилии служил знаменитый римский писатель Цицерон, он еще видел этот памятник, забытый и заросший терновником».

Там, где раньше жил грек Архимед, уже давно не Греция. Исчезают не только могилы великих, но целые страны и цивилизации. А закон Архимеда живет вместе с природой и мирозданием. В этом единении непреходящая ценность и прелесть истинного знания и науки.

В математике, конечно, можно усмотреть и много других сторон. Например, Ломоносов не без оснований отметил, что «математика ум в порядок приводит». Она же учит слышать аргумент и ценить истину.

4. Математика, при всей своей кажущейся абстрактности, питается задачами естествознания и щедро возвращает выращенные на этой плодородной почве плоды. Это как вдох и выдох. Нарушение этого баланса опасно и в науке, и в ее преподавании. Высушенная схоластикой наука погибает.

5. И еще кое-что в этой связи.

Типичное математическое высказывание выглядит так:

Теорема. *Если то-то, то то-то.*

Это же в другой записи: А $\Rightarrow B$ (из А следует B).

Учебники математики обычно очень тщательно обследуют фрагмент ($\Rightarrow B$), т.е. излагают по возможности подробное, логически безукоризненное доказательство того, что B действительно следует из А.

Только очень наивные и неопытные люди, в том числе и некоторые математики, могут позволить себе радоваться такой теореме, если само исходное предположение А малосодержательно, неинтересно, неестественно. Во всяком случае, надо иметь в виду, что А абсолютно равноправный и весьма существенный неформальный элемент математической теоремы.

Поясним это, напомнив одну из редких фраз, по свидетельству очевидцев произнесенную молчаливым Гиббсом (создателем математических основ классической термодинамики и статистической механики) во время обсуждения в Йельском университете, где он работал, роли и места математики, ее аксиоматического метода, а также ее взаимодействия с физикой и естествознанием.

Гиббс встал. Сказал:

«Математик может позволить себе допустить все, что ему заблагорассудится, но физика-то здравый смысл покидать не должен».

Сел. И на этом закончил свое участие в дискуссии.

Конечно, Гиббс не без иронии выразил то, о чем через полстолетия выдающийся математик и мыслитель Герман Вейль писал:

«Построения математического ума являются одновременно и свободными, и необходимыми. Отдельный математик свободен определять свои понятия и устанавливать свои аксиомы как ему угодно. Но вопрос — заинтересует ли он своих коллег-математиков продуктами своего воображения. Мы не можем не чувствовать, что некоторые математические структуры, развившиеся благодаря совместным усилиям многих ученых, несут печать необходимости, которая не затрагивается случайностями их исторического появления. Каждый, кто созерцает зрелище современной алгебры, будет поражен этой взаимодополнительностью свободы и необходимости».

Поглощение математикой новых задач (вдох), их последующее осмысление, решение, обобщение и на этой основе построение новой абстрактной математической теории (выдох) — естественный замкнутый цикл работы этой науки. В одни исторические периоды доминирует процесс накопления фактического материала, в другие периоды — подведение итогов и распределение всего по местам, [4] или логическое упорядочение

[4] Например, на рубеже XIX-XX веков Энциклопедия математических наук, изданная в Германии по инициативе Ф.Кляйна.

и формализация. [5] Более того, порой это можно наблюдать и в отдельных областях, и даже в творчестве одного и того же крупного математика (который в одни периоды мог делать и проповедовать одно, а в другие периоды — другое; в этом даже нет лицемерия, если, конечно, не отрицать сам факт).

6. Этапное продвижение в науке часто осуществляется (или, лучше сказать, оформляется) интересным и характерным способом, особенно ярко проявляющимся в таких ее абстрактных областях как теоретическая физика и математика.

Представьте себе песочные часы. Чтобы они работали, их время от времени переворачивают "с ног на голову".

В математике так же. Сначала получат много новых интересных фактов. Обнаружат среди них что-то в том или ином отношении центральное, узловое, связывающее много прежнего. Принимают это за исходный принцип, переворачивая все с ног на голову (например, сделав теорему аксиомой), и продолжают развитие, опираясь уже на этот новый принцип, объемлющий бо́льшую сферу фактов математики и мироздания.

Например, законы Ньютона выросли из открытий Галилея и Кеплера. Но, приняв законы Ньютона в качестве основы, мы можем получить из них и законы Кеплера, и многое другое. Последующее развитие физики привело к новым, уже вариационным принципам механики, включающим в себя бо́льший круг явлений и взаимодействий, отличных от взаимодействий, описываемых центральными силами.

В некотором смысле в такие моменты переворота происходит смена масштаба. Здесь она состоит как раз в смене и сокращении количества основных принципов при одновременном расширении поля объектов и явлений, которые они охватывают и объединяют.

(Кстати, о перегрузке учебных программ как правило говорят те, кто не уследил за своевременной сменой масштаба.

И еще, возможно, некстати. Есть два способа богатеть: прибирать добро к рукам — война, разбой; создавать ценности — повседневная добросовестная работа.

Там, где часто говорят о величии, скорее используют первый способ.

Выдающийся голландец, учитель многих физиков, Лоренц по поводу первой мировой войны, как свидетельствует Эйнштейн, [6] скромно заме-

---

[5] Еще свежие многотомные труды Н.Бурбаки.

[6] А.Эйнштейн. Собрание научных трудов. Т. 4. М.: Наука, 1967. Статья

тил: «Я счастлив, что принадлежу к нации слишком маленькой, для того чтобы совершать большие глупости».

Говорят, что еще сравнительно недавно (а возможно, и сейчас) в букварях японских детей было написано примерно следующее: «Наша страна маленькая и бедная. Нам надо много и хорошо работать, чтобы она стала богаче».

Некогда отсталая провинция России — Финляндия демонстрирует нам эффективность честного труда и уважения законов.

Индуктивный метод науки как-то солиднее и надежнее, чем принцип "все, сразу и даром".)

7. Теперь несколько слов о так называемой высшей математике.

Что же характерно для этой высшей математики, оформившейся, условно говоря, в трудах Ньютона и Лейбница и бурно развившейся за три минувших с тех пор столетия.

Эта математика научилась иметь дело не только с постоянными величинами, но и с *процессами в развитии.*

Возникло и постепенно оформилось фундаментальное для науки вообще понятие функциональной зависимости или *функции.*

Скорость изменения любой переменной величины и ускорение получили адекватную математическую формулировку в терминах *производных.*

Возник новый язык и новое *исчисление* (*дифференциальное*, когда по заданной зависимости ищется относительная скорость изменения величин, и *интегральное*, когда решается обратная задача: например, по записям скорости или ускорения ищется местонахождение подвижного объекта, пусть хоть подводной лодки).

Основы этого дифференциального и интегрального исчисления, как таблица умножения, являются теперь обязательными компонентами любого естественнонаучного образования, если не образования вообще.

Поясним почему. Если $x = x(t)$ — закон движения, т.е. зависимость координат объекта от времени, то дифференциальное исчисление позволяет найти его скорость $v = x'(t)$ и ускорение $a = x''(t)$.

Если известна масса m объекта и действующая на него сила F, то по закону Ньютона должно быть выполнено соотношение

$$mx'' = F,$$

«Г.А.Лоренц как творец и человек». С. 334–336.

которое является равенством, содержащим производные (в данном случае вторую производную $x''(t)$ исходной функции $x(t)$). Если нас интересует, как будет двигаться это тело под воздействием заданной силы $F(t)$, то мы будем искать неизвестную в этом случае зависимость $x = x(t)$, удовлетворяющую написанному уравнению.

Появилась необходимость исследования и решения уравнения совсем нового типа — *дифференциального уравнения.*

Это уже опять чисто математический вопрос (отвлеченный от движений планет, эволюции звездных систем, работы ядерных реакторов, выпечке хлеба, роста банковских сбережений и микроорганизмов, страховых обязательств, популяций рыб и животных, хищников и жертв; и так далее, и тому подобное...). Но вопрос, который имеет ко всему этому прямое отношение.

Итак, когда математика строит теорию, предлагающую методы решения определенного класса математических задач, она предоставляет нам аппарат, обслуживающий разом целую новую сферу конкретных явлений. Явления, возможно, были и раньше, как плоты до закона Архимеда. Но теперь мы понимаем их лучше. Точнее, мы построили математическую модель для них, которую понимаем и которой мы с помощью математического аппарата в какой-то степени умеем распоряжаться. Уже одно это как правило имеет такие приложения, которые с лихвой окупают щедрые затраты цивилизованного общества на мел для математиков.

Как отмечал Г.Вейль: «Во всех естественных науках знание основано на наблюдении. Но наблюдение лишь констатирует положение вещей. Как предвидеть будущее? Для этого наблюдение необходимо сочетать с математикой».

Без математики, разумеется, не было бы ни Ньютона, ни Максвелла, ни Эйнштейна, ни Бора... , какими мы их знаем. Значит, не было бы той цивилизации, плодами которой мы так охотно и легко ежедневно пользуемся. Чтобы это стало совсем ясно, представьте себе на миг, что мы–люди утратили слово–язык–речь[7]. Я не обсуждаю вопрос хорошо–плохо. Я просто хотел пояснить альтернативу и место математики.

---

[7]Возможно, для кого-то убедительнее звучит потеря мобильного телефона, телевидения и прочего, про что Сократ говорил «как много есть вещей, без которых можно обходиться».

К сказанному о математике, добавлю напоследок кое-что очень общее. Процитирую страничку из живой, яркой и содержательной книжки Ричарда Фейнмана «Вы, конечно, шутите, мистер Фейнман!» (Издат. Регулярная и хаотическая динамика, 2001, с. 298). Дело было в Швеции в день вручения Нобелевских премий. Далее идет цитата.

«После ужина мы перешли в комнату, где завязались различные беседы. За столом сидела датская принцесса Какая-то в окружении нескольких человек. Я увидел, что около их стола есть пустой стул и тоже присел.

Она повернулась ко мне и сказала: "О! Вы один из лауреатов Нобелевской премии. В какой области Вы работаете?"

— В физике, — ответил я.

— О, ну об этом никто ничего не знает, поэтому мы не сможем об этом поговорить.

— Напротив, — ответил я. — Мы не можем говорить о физике, потому что кто-то *что-то* о ней знает. Ибо мы *можем* обсуждать только то, о чем никто ничего не знает. Мы можем говорить о погоде; можем обсуждать социальные проблемы; мы можем беседовать о психологии; можем также обсуждать международные финансовые дела, — золотые переводы мы обсуждать *не можем*, поскольку все их понимают, — таким образом, мы все можем говорить только на тему, о которой никто ничего не знает!

Я не знаю, как они это делают. Существует способ принять *ледяное* выражение лица, и она это *сделала*! Она отвернулась, чтобы побеседовать с кем-то другим.

Через некоторое время я понял, что меня полностью исключили из разговора, поэтому я встал и пошел прочь. Посол Японии, который сидел за столом, вскочил и последовал за мной. "Профессор Фейнман, — сказал он, — есть кое-что, что мне хотелось бы рассказать Вам о дипломатии".

Он пустился в длинную историю о том, как молодой человек в Японии поступает в университет, изучает международные отношения, поскольку считает, что может сделать свой вклад для блага своей страны. Перейдя на второй курс, он начинает испытывать легкие приступы сомнения относительно того, что изучает. По окончании колледжа он занимает свой первый пост в посольстве и испытывает еще большие сомнения относительно своего понимания дипломатии, пока наконец не осознает, что *никто* ничего не знает о международных отношениях. И тогда он может стать послом! "Поэтому, профессор Фейнман, — сказал он, — когда в следующий раз Вы будете приводить примеры того, о чем все говорят, но никто не знает, пожалуйста, включите и международные отношения!"

Он оказался очень интересным человеком, и мы продолжили разговор. Я всегда поражался тому, как по-разному развиваются разные страны и разные люди. Я сказал послу, что есть феномен, который всегда удивлял меня: то, каким образом Япония сумела так быстро достичь такой высокой степени развития, что стала играть в мире столь важную роль. "Какая черта или особенность японцев обеспечила такую возможность?— спросил я.

Мне очень понравился ответ посла. Он сказал: "Я не знаю. Я могу только предположить, но не знаю, насколько это соответствует истине. Японцы верили, что единственный способ поднять страну — это дать своим детям лучшее образование, чем имели они сами; самым важным для них было уйти от своего положения крестьян и получить образование. Поэтому в семьях огромные усилия прикладывались к тому, чтобы поощрять детей хорошо учиться в школе, чтобы они могли чего-то достичь. Из-за этого стремления постоянно чему-то учиться, через систему образования очень легко распространялись новые идеи из внешнего мира. Быть может, это и есть одна из причин столь быстрого развития Японии".»