И.Х. Сабитов

Конспекты семинаров по курсу математического анализа

Тема: Числовые ряды

1. Определения и общие свойства. Числовым рядом называется *формальная сумма* счетного числа слагаемых, которые называются *членами* или *элементами* ряда. Они нумеруются подряд в порядке возрастания номеров. Вообще нумерацию можно начинать с любого целого числа, но обычно начинают с 0 или 1. Каждому ряду можно сопоставить последовательность чисел, составленную из его членов, и обратно, каждой последовательности можно сопоставить ряд в виде формальной суммы ее членов. Сразу же скажем, что в силу такой взаимосвязи между последовательностями и рядами, в исследовании очень полезно помнить и использовать ваши знания из теории последовательностей. Если члены ряда обозначены как $a_n, n = 1, 2, 3,$ и т.д., тогда ряд обозначается символом

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + ... \tag{1}$$

Знак Σ называется знаком суммирования и, как уже было сказано, суммирование может начинаться с любого целого числа и иногда бывает удобно выбрать другое начало суммирования. Такую операцию называют *изменением индекса* суммирования (такие ситуации нам в дальнейшем встретятся). Элемент a_n без уточнения значения номера n называется *общим членом ряда.*

Мы пока не знаем, что значит просуммировать бесконечное число слагаемых, но знаем, как найти сумму любого конечного числа слагаемых. Поэтому можем составить суммы $s_1 = a_1, s_2 = a_1 + a_2, ..., s_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$, которые называются *частичными суммами* ряда. Таким образом, появляется последовательность $\{s_n\}$ частичных сумм, которая поможет нам выделить два класса рядов. Именно, если существует конечный предел

$$\exists \lim_{n\to\infty} s_n = s \in R,$$

тогда соответствующий ряд называется *сходящимся* и значение предела называется суммой ряда. В этом случае можем писать, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s.$$

Если же последовательность частичных сумм не имеет предела, тогда ряд называется *расходящимся*, и ему никакой суммы не приписывается. Но бывает уточнение: если предел последовательности s_n равен бесконечности, тогда говорят, что ряд *расходится к бесконечности.*

Таким образом, исследование числовых рядов в основном состоит из двух задач:

1) *Качественное исследование* - надо установить, является ли ряд сходящимся или расходящимся, т.е. установить существование или отсутствие предела последовательности его частичных сумм.

2) *Количественное исследование* - в случае сходимости ряда надо найти его сумму, т.е. найти значение предела последовательности его частичных сумм.

Конечно, есть еще очень много разных задач (например, какова скорость сходимости, какова природа расходимости и т.д.). Кроме того, существуют и другие варианты определения сходимости и расходимости (они изучаются в науке под названием "методы суммирования").

Содержание следующих заданий может оказаться полезным при исследовании многих рядов.

Задание 1. Доказать, что свойство ряда сходиться или расходиться *не зависит* от того, добавляем ли мы в ряд или, наоборот, выбрасываем из него *конечное число* слагаемых.

Задание 2. Произведением числа c на ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(ca_n)$. Доказать, что умножение ряда на любое число $c \neq 0$ не изменяет его сходимости или расходимости.

Задание 3. Пусть даны два ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Назовем их суммой и разностью ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, где соответственно $c_n = a_n \pm b_n$. Доказать, что a) сумма и разность двух сходящихся рядов тоже являются сходящимися рядами; b) Если в сумме (разности) один ряд является сходящимся. а другой - расходящимся, то эта сумма (разность) является расходящимся рядом; c) сумма (разность) двух расходящихся рядов может оказаться как расходящейся, так и сходящейся.

Общий критерий сходимости ряда получается применением к последовательности частичных сумм $\{s_n\}$ известного с 1-го курса критерия Коши существования предела последовательности: для того, чтобы ряд сходился, необходимо и достаточно, чтобы

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \ \forall n > N, \forall p \geq 1 \Rightarrow |s_{n+p} - s_n| < \varepsilon. \tag{2}$$

В терминах членов ряда этот критерий пишется так:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \ \forall n > N, \forall p \geq 1 \Rightarrow |a_{n+1} + a_{n+2} + ... + a_{n+p}| < \varepsilon. \tag{3}$$

Из этого критерия для любых рядов легко выводится следующее *необходимое* условие их сходимости:

Для того, чтобы ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходился, необходимо, чтобы его общий член a_n стремился к нулю при $n \to \infty$.

Значит, как только мы видим, что общий член ряда не стремится к нулю при бесконечном возрастании его номера, сразу делаем вывод, что ряд расходится. Из этого вытекает такое практическое правило: как только вам предлагается ряд для исследование на сходимость, так первым делом "прикиньте", стремится ли к нулю его общий член. Если не стремится, вопрос закрыт: ряд расходится. Если же сразу не видно, стремится ли общий член к нулю или же видно, что его предел равен нулю, тогда уж нужны дополнительные рассмотрения.

Задание 4. Покажите примерами, что это условие $a_n \to 0, n \to \infty$ не является достаточным для сходимости ряда.

Иногда исследование сходимости ряда упрощается, если его преобразовать с использованием операции *группировки.* Она состоит в расставлении пар скобок () без изменения порядка расположения членов a_i ряда; после расставления пар скобок мы сначала отдельно считаем сумму членов внутри каждой пары скобок и эти суммы объявляем членами A_k нового ряда

$$(A) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 + A_2 + ...,$$

где A_k - сумма членов внутри k-ой пары. Все это можно представить в виде следующей записи. Пусть ряд начинается с элемента a_1 и пусть номера $p_1 = 1 < p_2 < ..., < p_k < ...$ - номера тех элементов, перед которыми стоит скобка (. Тогда внутри первой пары скобок будут члены $a_1, ..., a_{p_2-1}$ и $A_1 = a_1 + a_2 + ... + a_{p_2-1}$; внутри второй пары скобок будут члены $a_{p_2}, ..., a_{p_3-1}$ и $A_2 = a_{p_2} + ... + a_{p_3-1}$ и т.д., в общем случае $A_k = a_{p_k} + ... + a_{p_{k+1}} - 1$. Тогда сходимости рядов (1) и (A) будут связаны теоремами, приведенными в задачнике Демидовича как задачи под номерами 2554, 2555, 2657. Основой решения этих задач является следующее наблюдение: последовательность частичных сумм ряда (A) является некоторой подпоследовательностью последовательности частичных сумм ряда (1), поэтому при сходимости ряда (1) любой ряд (A) *всегда* сходится, а из расходимости некоторого ряда (A) будет следовать расходимость исходного ряда (1). А вот обратное верно не всегда, что подтверждается следующим простым примером: пусть ряд (1) имеет вид $\Sigma_{n=0}^{\infty}(-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + ... + (-1)^n + ...$; если мы сгруппируем члены этого ряда по два слагаемых, то получим сходящийся ряд из нулей с суммой 0.

Задание 5. Сгруппируйте члены этого ряда таким образом, чтобы получился сходящийся ряд с суммой 1. b) Покажите, что никакой группировкой нельзя добиться, чтобы сумма сгруппированного ряда была отлична от 0 и 1.

Задание 6. Используя знаки логического перехода, выпишите все возможные комбинации связей между сходимости/расходимости рядов (1) и (A) и сформулируйте их в терминах "необходимости" и "достаточности".

Заметим, однако, что если ряд знакопостоянный, то поведение рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и любого сгруппированного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ одинаково - или они оба сходятся или оба расходятся.

2. Знакопостоянные ряды. Ряд называется *знакопостоянным*, если все его члены имеют один и тот же знак. В более общем определении надо предполагать, что члены ряда не меняют свой знак на противоположный, т.е. допускается наличие нулевых членов. Очевидно, что достаточно уметь исследовать *знакоположительные* ряды. Отметим, что все утверждения, которые будут даны ниже, верны, если их условия относительно членов рядов выполняются не с первого номера, а только начиная с некоторого номера. Важнейшие признаки сходимости/расходимости знакопостоянных рядов даются *признаками сравнения.*

Рассмотрим ряды

$$(\mathbf{A})\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \ \text{ и } \ (\mathbf{B})\ \sum_{n=1}^{\infty} b_n. \tag{4}$$

Верны следующие утверждения

1) Пусть $a_n \geq 0,\ b_n \geq 0$ и выполнены неравенства $a_n \leq b_n, n \geq 1$. Тогда, если сходится ряд $(\mathbf{B})$, то сходится и ряд $(\mathbf{A})$; если ряд $(\mathbf{A})$ расходится, то расходится и ряд $(\mathbf{B})$.

Заметьте, что если ряд $(\mathbf{B})$ расходится, то про поведение ряда $(\mathbf{A})$ ничего сказать нельзя - он может оказаться как расходящимся, так и сходящимся. Такая же неопределенность будет и с рядом $(\mathbf{B})$ при сходящемся ряде $(\mathbf{A})$.

2) Пусть $a_n > 0,\ b_n > 0$. Если выполнены неравенства $0 < c \leq \frac{a_n}{b_n} < C < \infty$, тогда поведение рядов $(\mathbf{A})$и $(\mathbf{b})$ одинаково, т.е. либо оба сходятся, либо оба расходятся.

3) Предыдущий признак в предельной форме имеет следующий вид: пусть $a_n \geq 0,\ b_n > 0$ и пусть существует

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = C < +\infty.$$

Тогда, если $C \neq 0$, то ряды $(\mathbf{A})$и $(\mathbf{b})$ сходятся и расходятся одновременно. Если же $C = 0$, то из сходимости ряда $(\mathbf{B})$ следует сходимость ряда $(\mathbf{A})$.

4) Этот признак очень часто используется в виде так называемого *признака эквивалентности*: пусть $a_n \geq 0, b_n \geq 0$ и $a_n \sim b_n$ при $n \to \infty$, тогда ряды $(\mathbf{A})$ и $(\mathbf{B})$ сходятся и расходятся одновременно.

5) Наконец, есть признак, связанный с отношениями соседних членов: пусть $a_n > 0,\ b_n > 0$ и пусть

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}.$$

Тогда из сходимости ряда $(\mathbf{B})$ следует сходимость ряда $(\mathbf{A})$, а из расходимости ряда $(\mathbf{A})$ следует расходимость $(\mathbf{B})$.(Этот признак используется при доказательстве признака Раабе).

Задание 7. Докажите все эти утверждения.

Идея применения этих признаков состоит в том, что исследуемый ряд сравнивается с каким-нибудь рядом, поведение которого известно, и из этого выводится заключение о поведении исследуемого ряда. Значит, желательно иметь некоторые ряды с известным свойством сходимости/расходимости. Один такой ряд известен из школьной математики, это – ряд из членов геометрической прогрессии и.

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} q^n \qquad \text{сходится при } |q| < 1 \text{ и расходится при } |q| \geq 1} \tag{5}$$

(т.е. мы здесь охватываем и случай знакопеременного ряда).

Задание 8. Вспомните формулу суммы членов геометрической прогрессии и выведите из нее случаи сходимости расходимости ряда (5).

Второй ряд, часто используемый для сравнения, это ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}. \tag{6}$$

При $p \leq 0$ ряд расходится, так как его общий член не стремится к нулю при $n \to \infty$. При $p = 1$ - это известный гармонический ряд, расходимость которого обычно доказывается на лекциях. На основании 1-го признака сравнения получаем, что при $p < 1$ ряд (6) расходится. Пусть $p > 1$ или $p = 1 + \varepsilon, \varepsilon > 0$. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n^\varepsilon} - \frac{1}{(n+1)^\varepsilon}) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n.$$

Частичные суммы этого ряда имеют вид

$$(1 - \frac{1}{2^\varepsilon}) + (\frac{1}{2^\varepsilon} - \frac{1}{3^\varepsilon}) + ... + (\frac{1}{n^\varepsilon} - \frac{1}{(n+1)^\varepsilon}) = 1 - \frac{1}{(n+1)^\varepsilon} \to 1,$$

следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ сходящийся. С другой стороны, для его общего члена имеем оценку

$$c_n = \frac{1}{n^\varepsilon} - \frac{1}{(n+1)^\varepsilon} = \frac{1}{n^\varepsilon}(1 - (1 + \frac{1}{n})^{-\varepsilon}) = \frac{1}{n^\varepsilon}(1 - 1 + \varepsilon\frac{1}{n} + o(\frac{1}{n}) \sim \frac{\varepsilon}{n^{1+\varepsilon}},$$

значит, по признаку эквивалентности, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ при $p > 1$ сходится.

Итак, запомним для будущего, что ряд

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \qquad \text{расходится при } p \leq 1 \text{ и сходится при } p > 1.} \tag{7}$$

Для применения метода сравнения на основе формулы (L) надо уметь выделять для общего члена ряда его главную часть при $n \to \infty$ с использованием известных с 1-го курса эквивалентностей и разложений в формулу Тейлора и затем на основание признака эквивалентности устанавливаем сходимость или расходимость исследуемого ряда. Как пример, рассмотрим задачу № 2612 из задачника Демидовича. В ней дан вид общего члена ряда

$$a_n = \left[e - (1 + \frac{1}{n})^n\right]^p > 0.$$

Имеем следующие представления участвующих в a_n выражений при $n \to \infty$:

$$e - (1 + \frac{1}{n})^n = e - e^{n\ln(1+\frac{1}{n})} = e - e^{n(\frac{1}{n} - \frac{2}{n^2} + o(\frac{1}{n^2}))} = e - e^{1 - \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n})} =$$
$$= e(1 - e^{-\frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n})}) = e(1 - 1 + \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n})) \sim \frac{e}{2n}.$$

Следовательно,

$$a_n \sim \frac{c}{n^p},\ c = (\frac{e}{2})^p,$$

и поэтому ряд сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leq 1$. Заметим, попутно мы установили главный член приближения элементов последовательности $(1 + \frac{1}{n})^n$ к ее пределу e, уточнив пример № 70.

6) *Интегральный признак сходимости/расходимости.* Пусть дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n, a_n > 0$ с монотонно убывающей последовательностью элементов a_n и пусть на некотором множестве

$[a, +\infty), a \geq 1$, существует непрерывная, положительная и монотонно убывающая функция $f(x)$ с условием $f(n) = a_n$, для всех n, начиная с некоторого значения $n = N \geq 1$. Тогда ряд сходится и расходится вместе с нитегралом $\int_a^{\infty} f(x)dx$.

Изложение признаков сравнения мы завершим следующим принципиально важным утверждением: не существует самого медленно сходящегося и самого медленного расходящегося знакоположительного ряда. Более подробный смысл этого утверждения и его доказательство можно найти в книге Г.М. Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления т. II, гл. XI, §2, п. 375, а мы ограничимся таким комментарием: что было бы, если бы существовал. например, самый медленно сходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n$? Тогда *все* ряды $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ с $b_n > a'_n$ были бы расходящимися, т.е. был бы *универсальный* ряд, сравнение с которым давал бы ответ о поведении любого ряда: если $b_n < a'_n$, тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ был бы сходящимся, а если бы было $b_n > a'_n$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ был бы расходящимся (иначе был бы ряд, сходящийся медленнее, $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n$). В упомянутой книге доказывается, что если некоторый знакоположительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то существует сходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ с $b_n > a_n$ даже с условием $a_n = o(b_n), n \to \infty$.

Примеры все более и более медленно сходящихся рядов встречаются, например, в астрономии при вычислении различных характеристик траекторий небесных тел.

Переходим к "*именным*" признакам, т.е. к признакам, которые имеют исторически установившиеся названия по именам их авторов.

Признак Даламбера. Он имеет несколько вариантов записи.

Пусть для ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, a_n > 0$$

выполнено условие $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1$, тогда ряд сходится. Если же $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$, тогда ряд расходится.

В предельной форме этот признак имеет следующий вид: если существует

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q,$$

то при $q < 1$ ряд сходится, при $q > 1$ ряд расходится, а при $q = 1$ требуется дальнейшее исследование, так как тогда могут быть случаи как сходимости, так и расходимости.

Подтверждением последнего утверждения является ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, для которого рассматриваемый предел равен 1 при всех p, в то время как при $p \leq 1$ имеем сходимость, а при $p > 1$ получается сходимость.

Задание 9. Какая форма признака Даламбера является более сильной? (Объясните, что значит "более слабая" или "более сильная" форма какого либо утверждения?)

В случае отсутствия предела отношения $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ можно использовать еще другие варианты признака Даламбера, а именно, если $\overline{\lim}_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1$, то ряд сходится, а если $\underline{\lim}_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q > 1$, то ряд расходится. Обратное в обоих случаях неверно, что подтверждается примерами.

Задание 9. a) Докажите справедливость этих последних утверждений, включая построение нужных примеров. b) Как логически связаны между собой все варианты признака Даламбера - они пересекаются или некоторые вытекают из других?

Признак Коши. Он тоже имеет несколько вариантов.

Пусть для ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, a_n > 0$$

выполнено условие $\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1$, тогда ряд сходится. Если же $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$, то ряд расходится.

В предельной форме этот признак имеет следующий вид: если существует

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q,$$

то при $q < 1$ ряд сходится, при $q > 1$ ряд расходится, а при $q = 1$ требуется дальнейшее исследование, так как тогда могут быть случаи как сходимости, так и расходимости.

Подтверждением последнего утверждения является ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$, для которого рассматриваемый предел равен 1 при всех p, в то время как при $p \le 1$ имеем сходимость, а при $p > 1$ получается сходимость.

В случае отсутствия для $\sqrt[n]{a_n}$ предела можно использовать еще другие варианты признака Коши, а именно, если $\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q < 1$, то ряд сходится, а если $q > 1$, то ряд расходится. Обратное в обоих случаях верно, но с возможным добавлением значения $q = 1$.

Задание 10. Докажите справедливость этих последних утверждений.

Замечание 1. Как видим, дополнительный вариант признака Коши существенно отличается от дополнительного варианта признака Даламбера: он почти совпадает с необходимым и достаточным условием сходимости знакоположительного ряда. Это не случайно, объяснение этому будет ясно, когда мы изучим тему "Степенные ряды".

Отличие между признаками Даламбера и Коши видно и из следующего их свойства.

Теорема 1. *Если для знакоположительного ряда существует предел* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$, *тогда существует и предел* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ *и он тоже равен* q. *Обратное неверно.*

Мы сформулировали в виде теоремы задачу № 2593, которая, в свою очередь, является переформулировкой задачи № 141 (а пример невозможности обратного дан в том же № 2593). Смысл теоремы в том, что всякий ряд, качественное поведение которого можно установить с применением признака Даламбера, допускает такое же исследование с применением признака Коши, но обратное неверно. Это значит, что признак Коши сильнее признака Даламбера. Шуточное "доказательство" этого факта такое: да, это так, потому что Коши жил позже Даламбера и он не мог предложить признак слабее признака Даламбера.

Признак Раабе. Пусть для ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, a_n > 0$$

выполнено условие

$$\exists \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = r.$$

Тогда при $r > 1$ ряд сходится, а при $r < 1$ ряд расходится.

Задание 11. Приведите вариант признака Раабе, в котором вместо предела использовались бы неравенства на функцию под знаком предела (аналогично первым вариантам признаков Даламбера и Коши).

Наиболее сильным и эффективным, признаком, обобщающим признаки Даламбера и Раабе, является

Признак Гаусса. Пусть для общего члена ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, a_n > 0$$

при $n \to \infty$ верно следующее представление

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^{1+\varepsilon}}$$

с $|\theta_n| < C, \varepsilon > 0$. Тогда при $\lambda > 1$ ряд сходится, при $\lambda < 1$ ряд расходится, а при $\lambda = 1$ ряд сходится, если $\mu > 1$, и расходится, если $\mu \le 1$.

Как видим, для этого признака нет случаев, когда остается неопределенность.

3. Знакопеременные ряды. Исторически первым признаком сходимости знакопеременного ряда был

Признак Лейбница. Если в знакочередующемся ряде

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n, a_n > 0,$$

последовательность $\{a_n\}$ при $n \to \infty$ монотонно стремится к нулю, тогда ряд является сходящимся.

Как видим, сходящимися являются все ряды с общим членом $\dfrac{(-1)^n}{n^p}, p > 0$. Но это не значит, что все ряды $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ с $b_n \sim \dfrac{(-1)^n}{n^p}, p > 0$, являются сходящимися, так как для знакопеременных рядов признак эквивалентности "не работает". Пример дается задачей № 2701. Два ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty}[\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}]$$

имеют эквивалентные при $n \to \infty$ общие члены, но первый из них сходится, а второй расходится. Мы начинаем изучение знакопеременных рядов с этого замечания, так как использование признака эквивалентности для установления сходимости/расходимости знакопеременных рядов является стандартной ошибкой студентов. Поэтому желательно, чтобы при применении этого признака было предварительно установлено, что ряд является знакопостоянным. Оформляется это в записи, например, так:

$$a_n > 0, a_n \sim \frac{1}{n^p}, p > 1 \Rightarrow \text{ряд сходится},$$

т.е. сначала указывается, что ряд знакоположительный, а потом уж ссылаются на признак эквивалентности. Такое оформление показывает, что студент применяет признак эквивалентности осознанно, а не случайно находит верный ответ.

Абсолютная и условная сходимости. Каждому знакопроизвольному ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ можно сопоставить знакоположительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$, состоящий из модулей членов рассматриваемого ряда. С использованием критерия Коши сходимости ряда, который примени́м для *всех* рядов, можно показать, что *из сходимости ряда из модулей следует сходимости самого ряда.* Но обратное неверно, например, ряд $\dfrac{(-1)^n}{n^p}$ сходится при всех $p > 0$, но ряд из модулей сходится только при $p > 1$. Ввиду такой ситуации лля знакопеременных рядов различают два вида сходимости : абсолютную и условную. Ряд называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд из модулей его членов; ряд называется *условно сходящимся, если он сам сходится, но ряд из модулей расходится.* Таким образом, факт условной сходимости содержит две информации: известна расходимость ряда из модулей (она первая!), и известна сходимость самого ряда. Как увидим позже, ряды сходящиеся абсолютно и условно, обладают существенно разными свойствами.

Признак Абеля сходимости знакопроизвольных рядов. Если для ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \tag{8}$$

выполнены условия :

1) ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится

2) последовательность чисел b_n является ограниченной и монотонной,

тогда ряд является сходящимся.

Заметьте, по поводу монотонности нет требования убывания или возрастания, допускаются оба случая.

Признак Дирихле сходимости знакопроизвольных рядов. Если для ряда (8) выполнены условия :

1) последовательность частичных сумм $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ ограничена

2) числа b_n монотонно стремятся к нулю,

тогда ряд является сходящимся.

Обратим внимание, что признаки Абеля и Дирихле относятся ко всем рядам, а не только к знакопеременным. Признак Дирихле более общий, чем признак Абеля, в том же смысле, как признак Коши сильнее признака Даламбера: если некоторый ряд удовлетворяет условиям признака Абеля, то его сходимость может быть установлена также с помощью признака Дирихле. Действительно, так как последовательность $\{b_n\}$ по условию признака Абеля монотонна и ограничена, у нее есть некоторый конечный предел b. Тогда ряд (8) можно представить в виде суммы двух рядов

$$b\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(b_n - b),$$

в которой первый ряд сходится по условию, а второй удовлетворяет признаку Дирихле, значит, есть сходимость исходного ряда.

Подробное доказательство признаков Абеля и Дирихле в моем материале "Лекция Сабитова по рядам" на сайте кафедры математического анализа, здесь же мы приведем некоторые комментарии к ним.

Заметим, что оба признака сформулированы в форме *достаточных* условий, однако их применение к конкретно данному ряду весьма неоднозначно. Дело в том, что если дан некоторый ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$, то его общий член c_n может быть представлен в виде произведения $a_n b_n = c_n$ бесконечным числом способов, поэтому мы не можем заранее утверждать, что не удастся найти представления, удовлетворяющего условию Дирихле или даже Абеля. По этой же причине мы можем утверждать, что из сходимости по признаку Дирихле можно вывести сходимость по признаку Абеля *лишь в предположении*, что мы имеем дело *с фиксированным* представлением общего члена ряда в виде произведения. По-видимому, признак Дирихле очень близок к необходимому условию сходимости, т.е. если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится, то для его общего члена c_n существует представление $c_n = a_n b_n$, такое, что для a_n и b_n выполнены условия признака Дирихле. Во всяком случае, у меня в группе однажды был студент, который объявил, что он доказал этот факт, но его запутанное и не очень ясно изложенное доказательство где-то затерялось.

Метод исследования сходимости часто состоит в следующем: 1) сначала определяют область значений параметров, в которой выполняется необходимое условие сходимости, т.е. область, в которой общий член стремится к нулю, и тем самым отбрасывают область, в которой заведомо есть расходимость; 2) затем бывает полезно рассмотреть абсолютную сходимость, так как тогда можно использовать признаки сходимости знакоположительных рядов; 3) установив область, где нет абсолютной сходимости, в ней надо исследовать условную сходимость, для чего обычно рассматривают поведение общего члена при $\frac{1}{n} \to 0$ с использованием его эквивалентности или формулы Тейлора с выделением в ней столько членов, чтобы ряд с отбрасываемым остатком заведомо абсолютно сходился; при этом каждый из рядов, в которых в качестве общего члена чаще всего участвуют степенные слагаемые от $\frac{1}{n}$, обычно легко исследуются на основе формулы (7.

Рассмотрим два примера - задачи № 2671 и № 2680 из задачника Демидовича.

1) Исследовать на сходимость/расходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\pi\sqrt{n^2+k^2}).$$

Имеем, при $n \to \infty$

$$a_n = \sin(\pi\sqrt{n^2+k^2}) = \sin[\pi n(1+\frac{k^2}{n^2})^{\frac{1}{2}}] = \sin \pi n[(1+\frac{k^2}{2n^2}+O(\frac{1}{n^4})] =$$
$$\sin[\pi n + \frac{\pi k^2}{2n} + O(\frac{1}{n^3})] = \cos \pi n \sin[\frac{\pi k^2}{2n} + O(\frac{1}{n^3})] = (-1)^n \frac{\pi k^2}{2n}[1+O(\frac{1}{n^2})].$$

Следовательно, ряд знакочередующийся и так как $|a_n| \sim \frac{c}{n}$, то абсолютной сходимости нет. Ряд представляется как сумма двух рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \dfrac{\pi k^2}{2n}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ с $b_n = O(\frac{1}{n^2})$. Первый ряд сходится по признаку Лейбница, а второй сходится согласно формуле (7). Итог - рассматриваемый ряд сходится условно.

2) Исследовать на сходимость/расходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{[\sqrt{n}+(-1)^{n-1}]^p}.$$

Сразу замечаем, что при $p \leq 0$ общий член не стремится к 0, значит, при $p \leq 0$ ряд расходится. Далее считаем $p > 0$. Ряд знакочередующийся, но монотонного убывания модуля общего члена при переходе от a_{2n} к a_{2n+1} нет, значит, признак Лейбница неприменим. Тогда надо изучить поведение общего члена при $n \to \infty$. Имеем следующее его представление

$$a_n = (-1)^{n-1} \frac{1}{n^{\frac{p}{2}}} \left(1 - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)^{-p} = \frac{(-1)^{n-1}}{n^{\frac{p}{2}}} \left(1 - p\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + O(\frac{1}{n})\right).$$

Значит, $|a_n| \sim \dfrac{1}{n^{\frac{p}{2}}}$, поэтому при $p > 2$ ряд сходится абсолютно, а при $0 < p \leq 2$ абсолютной сходимости нет. Продолжаем исследование при $0 < p \leq 2$. Видим, что ряд можно представить в виде суммы трех рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{\frac{p}{2}}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p}{n^{\frac{p+1}{2}}} \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n,$$

где $b_n = O(\frac{1}{n^{1+\frac{p}{2}}})$. Первый ряд сходится по признаку Лейбница, второй сходится по признаку эквивалентности при $p > 1$, третий ряд сходится абсолютно при $p > 0$. При $0 < p \leq 1$ первый и третий ряды сходятся, а второй расходится, значит, их сумма, т.е. исходный ряд, расходится. *Ответ*: ряд сходится абсолютно при $p > 2$ и сходится условно при $1 < p \leq 2$. Отметим, что мы наши *полную* или *всю* область сходимости.

Замечание 2. В связи с последней фразой заметим, что большинство признаков являются достаточными условиями сходимости, поэтому, если, используя их, найти область сходимости, то из этого еще не следует, что найдена вся область сходимости. Надо теперь предположить, что параметр не принадлежит найденной области, и доказать, что тогда получится расходимость, и только после этого можно утверждать, что найдена вся область сходимости. Стандартная ошибка здесь такая: установив для некоторых значений параметра неравенство $0 < a_n \leq b_n$, где ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ - сходящийся, делают вывод, что ряд для a_n тоже сходящийся. Но это еще не значит, что найдена вся область сходимости - может быть, что для некоторых значений параметра $a_n > b_n$, тем не менее, ряд для a_n сходится (вспомните замечание после первого признака сходимости. Приведите пример такой ситуации.

Кроме метода, основанного на исследовании асимптотики общего члена, существуют, конечно, и другие методы. Одним таким "другим" методом является метод, основанный на исследовании сходимости сгруппированного ряда, который был описан раньше, сразу после *задания 5.* К указанным там номерам №№ 2554, 2555, 2657, связывающим сходимость/расходимость данного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с поведением его некоторым образом сгруппированного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ добавим новый признак сходимости.

Теорема 2. *Пусть при группировке членов знакопеременного ряда* $(a):\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *в группы собираются поочередно члены одного и того же знака без изменения порядка их следования, так что получается знакочередующийся ряд* $(A):\ \sum_{k=1}^{\infty} A_k$*. Тогда поведение исходного ряда и таким образом сгруппированного ряда одинаково, причем в случае сходимости суммы обоих рядов совпадают.*

Заметим, что отличие этого утверждения от задачи № 2657 в том, что число слагаемых в A_k может расти неограничено.

Докажем эту теорему. Мы уже знаем, что если ряд (A) расходится, то расходится и ряд (a) (это их общее свойство). Пусть ряд (A) сходится. Возьмем любую частичную сумму $s_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$ ряда (a) и расставим в ней скобки, образуя члены A_k ряда (A). Если последняя закрывающаяся скобка пришлась сразу после a_n, тогда эта частичная сумма ряда (a) совпадет с некоторой частичной суммой S_p ряда (A). Если же последняя закрывающаяся скобка появилась до исчерпания членов суммы s_n, тогда s_n представится в виде

$$s_n = S_p + B(p,n), \tag{9}$$

где $|B(p,n)| < |A_{p+1}|$, так как в $B(p,n)$ слагаемые являются строго частью слагаемых в следующем A_{p+1}, а все слагаемые в A_{p+1} одного знака. Кроме того, ввиду сходимости ряда (A) имеем соотношение $A_p \to 0, p \to \infty$, значит, правая часть в формуле (9) стремится к сумме S сходящегося ряда (A), тогда и левая часть стремится к тому же пределу.

Теперь с использованием этой теоремы решим задачу № 2687.

Исследовать сходимость/расходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_n = \dfrac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n^p}$. Прежде всего видим, что при $p \le 0$ общий член не стремится к нулю с возрастанием n, поэтому рассматриваем только значения $p > 0$. Кроме того, при $p > 1$ очевидно есть абсолютная сходимость, а при $0 < p \le 1$ абсолютной сходимости нет, поэтому изучаем лишь условную сходимость при $0 < p \le 1$. Выпишем несколько слагаемых ряда

$$-1 - \frac{1}{2^p} - \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p} + \frac{1}{8^p} - \frac{1}{9^p} - ...$$

Естественно напрашивается идея сгруппировать ряд по членам с одинаковым знаком. Смена знака происходит в номерах $n = k^2$ и поэтому получится знакочередующийся ряд $(A):\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^k A_k$, где

$$A_k = \frac{1}{k^{2p}} + ... + \frac{1}{(k^2+2k)^p}.$$

Видим, что

$$\frac{2k+1}{(k^2+2k)^p} < A_k < \frac{2k+1}{k^{2p}} \tag{10}$$

и необходимое условие сходимости $A_k \to 0$ выполняется только при $2p > 1$. Попытаемся при этом условии применить признак Лейбница, для чего нужно проверить монотонность убывания A_k. Воспользуемся неравенством (10) и получим

$$A_{k+1} < \frac{2k+3}{(k+1)^{2p}} \text{ и } \frac{2k+1}{(k^2+2k)^p} < A_k,$$

но желанного неравенства $\frac{2k+3}{(k+1)^{2p}} < \frac{2k+1}{(k^2+2k)^p}$ не получается. Это значит, вместо (10) надо искать более точные неравенства, для чего вспомним метод оценок, использованный при доказательстве интегрального признака Коши. Суммарная площадь прямоугольников с основаниями длины 1 и высотами $\dfrac{1}{j^2}, k \le j \le (k+1)^2 - 1 = k^2 + 2k$, больше площади, лежащей под графиком кривой $y = \dfrac{1}{x^p}$ на промежутке $k^2 \le x \le (k+1)^2$ (сделайте рисунок!), поэтому при $p \ne 1$ верна оценка

$$A_k > \int_{k^2}^{(k+1)^2} \frac{dx}{x^p} = \frac{2}{k^{2p-1}} + 2\frac{1-2p}{k^{2p}} + O(\frac{1}{k^{1+2p}}).$$

Аналогично находим, что площадь указанных прямоугольников меньше площади, лежащей под графиком той же кривой $y = \frac{1}{x^p}$ на промежутке $k^2 - 1 \le x \le (k+1)^2 - 1$, что после вычислений даст оценку

$$A_k < \frac{2}{k^{2p-1}} + \frac{1-2p}{k^{2p}}$$

Заменив в последнем неравенстве k на $k+1$, непосредственным вычислением находим, что при достаточно больших k

$$A_k > \frac{2}{k^{2p-1}} + 2\frac{1-2p}{k^{2p}} > \frac{2}{k^{2p-1}} + 4\frac{1-2p}{k^{2p}} > A_{k+1},$$

что и дает требуемую монотонность убывания A_k, вместе с этим и сходимость ряда (A). Затем применением теоремы 2 получаем условную сходимость рассматриваемого ряда (a). Условная сходимость при $p = 1$ устанавливается аналогичным сравнением с площадью под кривой $y = \frac{1}{x}$.

Такой же метод, примененный к № 2688, покажет, что для соответствующим образом сгруппированного ряда (A) не выполнено необходимое условие сходимости.