Признаки Абеля и Дирихле сходимости знакопроизвольных рядов. Переместительное свойство абсолютно сходящихся рядов.

Формулировка признаков Абеля и Дирихле.

Признак Абеля сходимости знакопроизвольных рядов. Если для ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \tag{1}$$

выполнены условия :

1) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится

2) последовательность чисел a_n является ограниченной и монотонной,

тогда ряд является сходящимся.

Заметим, по поводу монотонности нет требования убывания или возрастания, допускаются оба случая.

Признак Дирихле сходимости знакопроизвольных рядов. Если для ряда (1) выполнены условия :

1) последовательность частичных сумм $B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$ ограничена

2) числа a_n монотонно стремятся к нулю,

тогда ряд является сходящимся.

Обратим внимание, что признаки Абеля и Дирихле относятся ко всем рядам, а не только к знакопеременным. Признак Дирихле более общий, чем признак Абеля, в том же смысле, как признак Коши сильнее признака Даламбера (№ 2593): если некоторый ряд удовлетворяет условиям признака Абеля, то его сходимость может быть установлена также с помощью признака Дирихле. Действительно, так как последовательность $\{a_n\}$ по условию признака Абеля монотонна и ограничена, у нее есть некоторый конечный предел a. Тогда ряд (1) можно представить в виде суммы двух рядов

$$b\sum_{n=1}^{\infty} b_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(a_n - a),$$

в которой первый ряд сходится по условию, а второй удовлетворяет признаку Дирихле, значит, есть сходимость исходного ряда.

Задачи. 1) Покажите примером, что обратное неверно. 2) Покажите, что признак Лейбница является частным случаем признака Дирихле.

Заметим, что оба признака сформулированы в форме *достаточных* условий, однако их применение к конкретно данному ряду весьма неоднозначно. Дело в том, что если дан некоторый ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$, то его общий член c_n может быть представлен в виде произведения $a_n b_n = c_n$ бесконечным числом способов, поэтому мы не можем заранее утверждать, что не удастся найти представления, удовлетворяющего условию Дирихле или даже Абеля. По этой же причине мы можем утверждать, что из сходимости по признаку Дирихле не всегда можно вывести сходимость по признаку Абеля *лишь в предположении*, что мы имеем дело *с фиксированным* представлением общего члена ряда в виде произведения. По-видимому, признак Дирихле очень близок к необходимому условию сходимости, т.е. если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится, то для его общего члена c_n существует представление $c_n = a_n b_n$, такое, что для a_n и b_n выполнены условия признака Дирихле. Во всяком случае, у меня в группе однажды был студент, который объявил, что он доказал этот факт, но его запутанное и не очень ясно изложенное доказательство где-то затерялось.

Доказательство обоих признаков основано на использовании *преобразования Абеля.* Пусть дана сумма

$$S = \sum_{i=1}^{m} a_i b_i.$$

Рассмотрим суммы

$$B_1 = b_1, B_2 = b_1 + b_2, ..., B_m = b_1 + ... + b_m.$$

Тогда выразив b_i через эти суммы $B_1, ..., B_m$ следующим образом

$$b_1 = B_1, b_2 = B_2 - B_1, b_3 = B_3 - B_2, ..., b_m = B_m - B_{m-1},$$

можем переписать сумму S в виде

$$S = a_1 B_1 + a_2(B_2 - B_1) + ... + a_m(B_m - B_{m-1}). \qquad (2)$$

Потом соберем слагаемые не при a_i, а при B_i. Получим:

$$S = (a_1 - a_2)B_1 + (a_2 - a_3)B_2 + ... + (a_{m-1} - a_m)B_{m-1} + a_m B_m = \\ = \sum_{i=1}^{m-1}(a_i - a_{i+1})B_i + a_m B_m.$$

или

$$\sum_{i=1}^{m} a_i b_i = \sum_{i=1}^{m-1}(a_i - a_{i+1})B_i + a_m B_m. \qquad (3)$$

Формула (3) и называется *преобразованием Абеля*. Она является дискретным аналогом формулы интегрирования по частям. Вспомним эту формулу

$$\int_a^b f(x)dg(x) = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b g(x)df(x), \qquad (4)$$

а формулу (3) с учетом (2) перепишем в виде

$$S = \sum_{i=1}^{m} a_i \Delta B_i = a_m B_m - \sum_{i=1}^{m} B_{i-1}\Delta a_i$$

где введены обозначения $\Delta B_i = B_i - B_{i-1}, \Delta a_i = a_i - a_{i-1}$ с $B_0 = 0$. Аналогия формулы (3) с формулой (4) получится, если мы в формуле (4) положим $g(x) = \int_a^x dg(t)$ с $g(a) = 0$ и сопоставим значения a_i со значениями $f(x_i)$, а значения B_{i-1}

со значениями $g(x_i)$. Тогда сумму $\sum_{i=1}^{m} a_i \Delta B_i$ с $B_0 = 0$ можно рассматривать как интегральную сумму для $f(x)g'(x)$, сумму $\sum_{i=1}^{m} B_{i-1} \Delta a_i$ можно рассматривать как интегральную сумму для $g(x)f'(x)$, а a_m как $f(b)$ и $B_m = b_1 + ... + b_m$ как $g(b) = \int_a^b dg(t)$.

Теперь с использованием преобразования Абеля докажем следующую лемму.

Лемма. Пусть в сумме $\sum_{i=1}^{m} a_i b_i$ множители a_i монотонны по i, а все соответствующие суммы B_i ограничены по абсолютной величине одним и тем же числом L. Тогда имеет место следующая оценка

$$|S| = |\sum_{i=1}^{m} a_i b_i| \leq L(|a_1| + 2|a_m|).$$

Доказательство. Так как в формуле (3) все разности в скобках одного знака, то можно написать следующие неравенства

$$|S| \leq L \sum_{i=1}^{m-1} |a_i - a_{i+1}| + |a_m| L = L(|a_1 - a_2 + a_2 - a_3 + ... + a_{m-1} - a_m| + |a_m|)$$
$$\leq L(|a_1| + 2|a_m|),$$

. что и требовалось доказать.

Если множители a_i не возрастают и положительно, тогда оценку можно упростить:

$$|S| \leq La_1. \tag{5}$$

Теперь можно приступить к доказательству признаков Абеля и Дирихле. Для этого покажем, что в условиях этих признаков выполнен критерий Коши сходимости ряда. Запишем этот критерий

$$\forall > 0 \, \varepsilon \exists (?) N(\varepsilon) : \forall n > N \; and \, \forall p \geq 1 \Rightarrow |a_{n+1} b_{n+1} + ... + a_{n+p} b_{n+p}| < \varepsilon.$$

Нам нужно показать существование такого $N(\varepsilon)$, и тогда будет использована *достаточность* выполнения критерия Коши для сходимости ряда.

Пусть в условиях признака Абеля последовательность $|a_n|$ ограничена числом C. Для сходящегося ряда $\sum_{i=1}^{m} b_i$ критерий Коши выполнен (здесь используется его *необходимость*), и мы можем написать, что

$$\forall\ \varepsilon_1 > 0 \exists N_1(\varepsilon_1) : \forall n > N_1\ and\ \forall p \geq 1 \Rightarrow |b_{n+1} + ... + b_{n+p}| < \varepsilon_1.$$

Применим к сумме $|a_{n+1}b_{n+1} + ... + a_{n+p}b_{n+p}|$ лемму с $L = \varepsilon_1$ и получим оценку

$$|a_{n+1}b_{n+1} + ... + a_{n+p}b_{n+p}| < \varepsilon_1(|a_{n+1}| + 2|a_{n+p}| < 3\mathrm{C}\varepsilon_1 < \varepsilon,$$

если взяли $\varepsilon_1 < \frac{\varepsilon}{3C}$ и $N = N_1$. Критерий Коши выполнен и сходимость ряда доказана.

Переходим к доказательству признака Дирихле. По условию, в силу $a_n \to 0, n \to \infty$ имеем

$$\forall\ \varepsilon_0 > 0 \exists N_0(\varepsilon_0) : \forall n > N_0\ \Rightarrow |a_n| < \varepsilon.$$

Далее, пусть частичные суммы ограничены числом K. Тогда имеем неравенство

$$|b_{n+1} + ... + b_{n+p}| = |B_{n+p} - B_n| < 2K,$$

так что можем применить лемму с $L = 2K$. Тогда при $n > N$ получаем, что

$$|a_{n+1}b_{n+1} + ... + a_{n+p}b_{n+p}| < 2K(|a_{n+1}| + 2|a_{n+p}| < 6K\varepsilon_0 < \varepsilon,$$

если взяли $\varepsilon_0 < \frac{\varepsilon}{6K}$. Признак Дирихле доказан.

Примеры. 1) Признак Лейбница является частным случаем признака Дирихле.

2) Рассмотрим ряды

$$a)\ \ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx \ \ \text{и}\ \ b)\ \ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

с условием, что последовательность $\{a_n\}$ монотонно стремится к нулю.

Легко доказать следующие равенства

$$\sin x + \sin 2x + ... + \sin nx = \frac{\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

$$\cos x + \cos 2x + ... + \cos nx = \frac{\sin\frac{nx}{2}\cos\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}.$$

На основании этих равенств заключаем, что частичные суммы членов с $\sin nx$ и $\cos nx$ в обоих рядах ограничены величиной $|\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}|$ при любом x с условием $x \neq 2\pi k, k \in \mathbf{N}$. Следоватедьно, при этих значениях x оба ряда сходятся. В частности, при этих x сходящимися являются ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^p} \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^p},\ p > 0$$

(заметьте, на самом деле ряд с синусами сходится при всех x).

Переместительное свойство абсолютно сходящихся рядов. Пусть дано произвольное взаимно-однозначное отображение $P : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, которое каждому $k \in \mathbf{N}$ сопоставляет некоторое $n_k \in \mathbf{N}$. Пусть дан некоторый ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n. \tag{6}$$

Рассмотрим новый ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k},$$

про который говорят, что он получен перестановкой P из ряда (6). Возникает естественный вопрос - каково поведение нового ряда, если известна сходимость исходного ряда? Оказывается, ответ зависит от характера его сходимости.

Теорема. Если ряд (6) сходится абсолютно и имеет сумму S, тогда любой ряд, полученный из него некоторой перестановкой, сходится и имеет ту же самую сумму S.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай знакопостоянного ряда. Пусть для конкретности ряд знакоположительный. Для сокращения записи обозначим элементы a_{n_k} переставленного ряда как a'_k, т.е. вместе с (6) рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a'_k. \tag{7}$$

Для частичной суммы $A'_k = a'_1 + ... + a'_k = a_{n_1} + ... + a_{n_k}$ ряда (7) рассмотрим частичную сумму $A_{n'}$ всех элементов из ряда (6) с номером $n' > max\{n_1, ..., n_k\}$. Тогда имеем очевидное неравенство

$$A'_k \leq A_{n'} \leq S.$$

Значит, частичные суммы переставленного ряда ограничены, следовательно, он сходится к некоторой сумме $S' \leq S$. Но ряд (6) в свою очередь можно рассматривать как переставленный из (7), поэтому аналогичным рассуждением получаем неравенство $S \leq S'$, т.е. получаем $S' = S$. В случае знакоположительных рядов теорема доказана.

Пусть теперь абсолютно сходящийся ряд (6) знакопроизвольный. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

сходящийся, и он по только что доказанному, сохраняет свою сходимость при любой перестановке, а тогда сам переставленный ряд тоже сходится (потому что из абсолютной сходимости следует обычная сходимость). Остается доказать, что он сходится к той же сумме S. Заметим, если ряд сходится абсолютно, то сходятся и знакопостоянные ряды, составленные как из его положительных, так и из отрицательных членов (так как их частичные суммы ограничены). Пусть сумма ряда из положительных членов равна $Q > 0$, а сумма ряда из отрицательных членов равна $T < 0$. Тогда можно показать, что общая сумма самого ряда равна $S = Q + T$ (проведите это доказательство самостоятельно!). При перестановке ряда происходят и некоторые перестановки в знакопостоянных рядах, составленных из положительных и отрицательных членов, которые, однако, не изменяют их соответствующие суммы Q' и T', т.е. для них получится $Q' = Q, T' = T$, следовательно, $S' = Q' + T' = Q + T = S$. Теорема доказана.

Теорема Римана о перестановках условно сходящихся рядов. В случае условно сходящихся рядов перестановка ряда может полностью изменить его сумму и даже превратить ряд из сходящегося в расходящийся. Об этом имеет место следующая

Теорема Римана. Если ряд (6) сходится условно, тогда для любого $s \in \overline{bfR}$ существует перестановка $P : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, такая, что сумма переставленного ряда равна s.