И.Х. Сабитов

Конспекты семинаров по курсу математического анализа

Тема 1. Эскизы графиков

(см. отдельно)

Тема 2. Последовательности

1. Определения, новые понятия и немного о логических символах и высказываниях. Последовательностью действительных чисел *называется* отображение $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Если для каждого натурального $n \in \mathbb{N}$ значение $f(n)$ обозначить как x_n, то последовательность записывают различными способами, например, как $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ или как $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ или $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ или совсем просто как (x_n). Значения x_1, x_2 и т.д. называются соответственно первым, вторым, и т.д. элементами последовательности, а запись x_n обычно понимают как "энный" или общий элемент последовательности. На практике очень часто общий элемент x_n пишется в явном виде с указанием вида его зависимости от аргумента n; иногда предполагается, что читатель сам должен догадаться о законе его зависимости от n по виду нескольких первых элементов последовательности, а в теории чаще всего про общий элемент бывают известны только некоторые его качественные свойства. Надо иметь в виду, что разные элементы могут иметь одинаковое численное значение, например, все они могут равняться одному и тому же числу, все равно эти элементы *считаются разными* и называются по номеру их места в последовательности. Может быть, что элементы последовательности пронумерованы, начиная с произвольного числа $m \in \mathbb{Z}$, тогда ее записывают в виде $\{x_n\}_{n=m}^{\infty}$. Например, возможны записи вида $x_{-3}, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, ..$ или $x_2, x_3, x_4, ...$ При необходимости вводят новую нумерацию, положив $y_n = x_{m-1+n}, n \in \mathbb{N}$, и получится последовательность (y_n) с "обыкновенной" нумерацией $y_1, y_2, ...$

Как всегда в математике, после введения нового объекта начинается исследование различных его свойств, в частности, выделение разных его классов или классификация по разным признакам. Первая классификация - это разбиение последовательностей на классы ограниченных и неограниченных последовательностей.

Последовательность (x_n) называется *ограниченной*, если существует число $C > 0$, такое, что для всех $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $|x_n| < C$. С использованием языка и символики теории множеств это определение запишется так:

$$\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \ \text{ограничена} := \exists C > 0 : \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow |x_n| < C. \tag{12}$$

В жаргоне такая запись называется "запись на языке кванторов", так как в ней используются обозначения $\forall$ и $\exists$, называемых в теории логических операций соответственно кванторами *общности* и *существования*. Знак $\forall$ читается чаще всего как "для любого", но в соответствии с текстом может читаться и как "*для всех*", "*для каждого*" , "*для произвольного*" т.п. (это - перевернутая буква "A" и он происходит от немецкого Alles =все); знак $\exists$ читается как "*существует*" или "*найдется*" и представляет собой зеркальный образ заглавной буквы "E" имеющегося во многих европейских языках слова, происходящего от латинского "Existentia" = существование). Если существующий объект единственный, то это записывается как $\exists!$.Запись ":=" означает "*определение*" или "*по определению*"; запись ":" означает "*такое, что*" или "*удовлетворяющее условию*" (часто вместо нее пишут вертикальную черту "|") и дальше идет само условие. После приведения всех условий пишут знак $\Rightarrow$, называемый знаком *импликации* или *логического следования*; читается как "следует", "имеем", "вытекает" и т.п. Есть важное общее правило правильной записи какого-либо утверждения или определения в кванторах: каждый раз, как в записи появляется символ нового ранее неизвестного или неупоминаемого объекта. перед ним должен быть или знак общности или знак существования.

Последовательность (x_n) называется *ограниченной сверху*, если существует число $C > 0$, такое, что для всех $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $x_n < C$. Запись этого определения на языке кванторов такая

$$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ ограничена сверху} := \exists C > 0 : \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow x_n < C.$$

Задание. Теперь напишите сами определение ограниченной снизу последовательности.

Определение *неограниченной последовательности* получается отрицанием определения ограниченной последовательности: не существует никакого числа $C > 0$, для которого было бы выполнено (12). Формально для записи отрицания некоторого утверждения можно просто поставить знак $\rceil$ логического отрицания перед записью этого утверждения в кванторах, но такая форма записи, во-первых, не позволит установить, хорошо ли понимает ее автор содержание этой записи, во-вторых, такая запись не является конструктивной или, по-другому, удобной для работы. Поэтому предпочтительнее использовать, как говорят, положительную форму отрицания. Тогда на языке кванторов получается такая запись

$$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ не ограничена} := \forall C > 0 \ \exists n(C) \in \mathbb{N} : \ |x_n| \geq C \tag{13}$$

(заметьте, мы не используем термин "не существует", а пишем "существует" и или предъявляем n с нужным свойством, или доказываем его существование – в этом "положительность" содержания такой формы записи).

Таким образом, правило записи отрицания уже данного утверждения или определения состоит в следующем: надо заменить квантор общности на квантор существования, а квантор существования - на квантор общности, помня при этом, что после квантора $\forall$ не может быть знака : (раз "любой", то бессмысленно писать "такой, что" - тогда уже не любой), не может быть также зависимости от чего бы то ни было (раз "любой"), а после квантора $\exists$ должен быть знак : ("такой, что", т.е. не всякий). Можно сказать, что знаки " : " и $\Rightarrow$ в конце высказывания взаимо-заменяемы с учетом вышесказанного правила.

Задание. Проверьте, что в записи (13) выполнены все эти рекомендации. Напишите отрицание отрицания, и Вы должны получить первоначальное высказывание.

Замечание. На самом деле и запись логических высказываний, и переход к их отрицанию имеют более сложную структуру с использованием более богатой символики. Подробнее об этом можно прочитать в гл. 1, §4, п. 3 учебника В.А. Зорич, Математический анализ, часть I.

Обсудим теперь содержание теорем с точки зрения их логической структуры, не вникая в тонкости науки, называемой *исчислением высказываний.* Формулировки теорем обычно состоят из двух частей: *условия* теоремы (которое по другому можно назвать *посылкой* логического высказывания) и ее *утверждения* или *заключения*, которое обычно состоит в установлении того или иного свойства обсуждаемого объекта. Таким образом, если A обозначает условие теоремы, а B - ее утверждение, то содержание теоремы состоит в том, что из A следует B, т.е. верно, что $A \Rightarrow B$. По-другому, сказанное можно сформулировать так: выполнение условия A является *достаточным* для наличия свойства B или что наличие свойства B является *необходимым* для выполнения условия A. Более кратко эту связь описывают словами: *A достаточно для B* или *B необходимо для A*. Таким образом, логически теорема"$A \to B$" построена по схеме "Если A, то B".

Пример Если число оканчивается на цифру 0 (это условие A), то оно делится на 2 (в этом заключается утверждаемое свойство B такого числа).

Иногда бывает, что из A следует B, и обратно, из B следует A, т.е. из наличия свойства B следует выполнение условия A. В этом случае используется запись $A \Leftrightarrow B$. В такой ситуации понятия "условие" и "свойство" можно поменять местами, т.е. или можно считать, что A - это условие, а B - это свойство, или же наоборот, можно объявить A свойством, а B - условием. Обычно свойством объявляется то, что хочется доказать, и оно тогда объявляется высказыванием или свойством B, а высказывание A становится условием, и запись $A \Leftrightarrow B$ развернуто читается так: *для того, чтобы было верно свойство B, необходимо и достаточно* *выполнение условия* A. Таким образом, доказательство данного утверждения будет состоять из двух частей:

Необходимость условия A :

$B \Rightarrow A$, иначе говоря, дано, что выполнено свойство B, доказать, что выполнено условие A, т.е. A *необходимо* ("обязательно") следует из B.

Достаточность условия A :

$A \Rightarrow B$, иначе говоря, дано, что выполнено условие A, доказать, что имеет место свойство B, т.е. выполнения условия A *достаточно* ("хватает") для наличия свойства B.

Замечание. После такого объяснения использования слова "достаточно" в математике надеемся, что студент не будет употреблять это слово в своей речи совершенно неподобающим образом, как это можно услышать и читать в наших СМИ. Например, у меня в памяти остались такие фразы: "В последнем теракте погибло достаточно много людей" и другая "Работа в этом направлении ведется достаточно плохо". Для кого и для чего достаточно?

Задание. 1) Есть два высказывания : число делится на 2 и число оканчивается на четное число. Свяжите двумя способами эти два высказывания в виде необходимого и достаточного условия между ними, выбирая по разному свойство и условие, и докажите то, что Вы сформулируете. 2) Дайте три примера пары высказываний A и B, для которых: а) $B \Rightarrow A$, но утверждение $A \Rightarrow B$ неверно (есть только необходимость условия A для наличия свойства B, но нет его достаточности); б) $A \Rightarrow B$, но утверждение $B \Rightarrow A$ неверно (есть достаточность условия A для наличия свойства B, но нет его необходимости); в) $A \Leftrightarrow B$ (необходимость и достаточность условия A для наличия свойства B и в обратной форме - необходимость и достаточность B для A. 3) Есть два факта - человек купил машину и у человека есть деньги. Какая логическая связь между этими фактами?

Знаменитый дедуктивный метод Шерлока Холмса состоял в том, что он из фактов, могущих иметь отношение к преступлению, выводил необходимые следствия, иначе говоря, из известных ему свойств B устанавливал необходимые признаки преступника. Задача его (и вообще, всех следователей) состояла в том, чтобы доказать, что эти необходимые условия являются и достаточными для установления преступника.

Замечание. В математической литературе необходимое и достаточное условие часто выражается такими витиеватыми фразами, как "тогда и только тогда", "в том и только в том случае", "если и только если". Избегайте употребления таких фраз, пока не научились их четко понимать, так как в них можно запутаться, когда попросят расшифровать их смысл и доказать, что́ из чего вытекает.

Наконец, в качестве подтверждения усвоения материала этого пункта докажите такую простую теорему:

Теорема. Для того, чтобы последовательность была ограниченной, необходимо и достаточно, чтобы она была ограниченной и сверху, и снизу.

2. Предел последовательности. *Определение* предела последовательности. Пусть дана некоторая последовательность $\{x_n\}$. Число $a \in \mathbb{R}$ называется пределом последовательности при n стремящимся к бесконечности, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \ \forall n > N \ \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon \tag{14}$$

(читается эта запись так "для любого положительного числа ε существует зависящее от ε натуральное число N, такое, что для всех номеров $n > N$ выполнено неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$; конечно, связующие слова могут быть заменены на другие равнозначные слова, например, вместо слова "существует" можно сказать "найдется" и т.д.).

Этот факт записывается в виде равенства следующим образом:

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a.$$

Иногда для проведения доказательств бывает удобно считать, что неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$ выполняется, начиная с номера $n = N$, т.е. определение (14) заменяется на следующее: число

a называется пределом последовательности при $n \to \infty$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \ \forall n \geq N \ \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon. \tag{15}$$

В связи с этим полезно доказать, что эти определения предела равносильны, т.е. каждое из них следует из другого. Докажем, что из определения (14) следует определение (15). Пусть выполнено определение (14) с $N = N_1$. Тогда выполнено и определение (15) с $N = N_2 = 1+N_1$. Действительно, если $n \geq N_2$, тогда $n > N_1$, значит, для $n \geq N_2$ выполнено неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$.

Пусть теперь выполнено определение (15) с некоторым $N = \tilde{N}$. Тогда неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$, верное для $n \geq \tilde{N}$, верно и для $n > \tilde{N}$, значит, выполнено и определение (14) с $n = \tilde{N}$.

Полезно также заметить, что в определении предела не уточняется допустимое верхнее значение нужного числа N, напротив, если определение выполнено с некоторым $N = N_0(\varepsilon)$, тогда оно тем более выполнено с любым $N > N_0$. А вот нижняя грань допустимых N при данном ε существует, и она возрастает (точнее, не убывает) с уменьшением ε. Задача нахождения наименьшего нужного значения $N(\varepsilon)$ при данном ε иногда является важной и во многих случаях трудной задачей. Общая идея решения такой задачи следующая: пишем неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$ и находим наименьшее значение n, при котором выполнено это неравенство, или оцениваем это значение сверху, если трудно найти точную его величину.

Примеры. 1) Решим задачу № 42б из Демидовича. Предполагаемый предел равен $a = 0$; пишем неравенство $|\dfrac{2n}{n^2+1} - 0| < \varepsilon$. Преобразуем его: $2n < \varepsilon n^2 + \varepsilon$. Это неравенство второй степени относительно n имеет положительные решения $n > 1 + \sqrt{1-\varepsilon^2}\varepsilon$; так как значения n ищутся среди натуральных чисел, то наименьшее нужное $N(\varepsilon) = [-1 + \sqrt{1-\varepsilon^2}\varepsilon]$, где $[x]$ обозначает наибольшее целое число, не большее, чем x. Например, для $\varepsilon = 0,6$ имеем $N_{min} = 3$, а для $\varepsilon = 0,1$ имеем $N_{min} = [10,995] = 10$ (так как мы рассматриваем значения $n > N_{min}$, то $n \geq 11 > 10,995$). Если бы мы решали похожую задачу для последовательности с общим членом $x_n = \dfrac{2n}{n^3+1}$, то вычисление N_{min} уже было бы затруднительной задачей, так как найти точное решение кубического уравнения непросто, но легко могли бы найти для него верхнюю оценку. Действительно, нз неравенства $\dfrac{2n}{n^3+1} < \varepsilon$ переходим к неравенству $n(\varepsilon n^2 - 2) + \varepsilon > 0$, которое заведомо выполнено, если $n \geq \sqrt{2/\varepsilon}$; следовательно, в этом случае нужное неравенство $\dfrac{2n}{n^3+1} < \varepsilon$ гарантированно выполнено при $n > N_0 = [\sqrt{2/\varepsilon}]$, и для N_{min} получаем верхнюю оценку $\exists N_{min} \leq N_0$.