И.Х. Сабитов

Лекции

Тема 1. Элементы теории множеств

1. Определения, терминология, обозначения. Понятие **множества**, будучи исходным, первоначальным понятием, не имеет своего точного определения (как и, например, понятие "точка" в геометрии), и его только объясняют такими интуитивно понятными разными словами, как "совокупность", "набор", "собрание", "семейство" некоторых объектов, обладающих, как правило, каким-то общим свойством или признаком, который часто называют *характеристическим.* Природа этих объектов может быть совершенно произвольной, но само описание объединяющего их признака или совокупности признаков, должно быть таким, чтобы можно было определить входит любой данный объект в это множество или нет. Объекты, составляющие данное множество, называются его **элементами**. Примеры: можно говорить о множестве студентов в данной учебой группе, можно говорить о множестве химических элементов, о множестве слов в данном словаре, о множестве нулей данной функции, а вот говорить о множестве студентов всей Земли можно только после того, как будет точно определено, кого можно считать студентом. Множество можно задать и просто списком или перечислением его элементов, например, можно рассмотреть множество M, элементами которого являются числа 1,2,3 и буквы a,b,c. Задание множества, обозначенного, например, как X, обычно записывают так:

$$X = \{x : \text{дальше идет описание характеристического признака элементов множества}\}.$$

(двоеточие читается так: "таких, что"). Например, множество X нулей функции $y = \sin x$ запишется так: $X = \{x : \sin x = 0\}$. В вышеприведенном примере множество M запишется так: $M = \{1, 2, 3, a, b, c\}$. (Некоторые авторы вместо двоеточия используют длинную вертикальную черту, и тогда, например, для множества X нулей функции $y = \sin x$ получается такая запись $X = \{x \mid \sin x = 0\}$.)

Факт принадлежности данного элемента x множеству X записывается так: $x \in X$ (читается "x" прнналдежит множеству X" или каким-то эквивалентным выражением русского языка). Тот факт, что некоторый объект x не является элементом множества X, записывается так: $x \notin X$.

Два множества A и B считаются *равными* (A=B), если они состоят из одних и тех же элементов.

`Вопрос 1`: Пусть на факультете есть две группы с полностью совпадающими списками фамилий студентов. Можно ли считать эти два множества студентов равными?

Среди всех множеств выделяется множество, не содержащее ни одного элемента. Оно называется *пустым* множеством и обозначается $\emptyset$. Например, множество $X = \{x : \sin x = 2\}$ является пустым. Пустое множество единственно. Это значит, если пустое множество появилось по факту отсутствия в нем какого бы то ни было элемента, хотя поиск его и проводился по двум разным характеристическим свойствам, результатом будет одно и то же пустое множество. Например, если в группе нет студента с фамилией Иванов, то множества $X = \{x : \sin x = 2\}$ и $Y = \{y : \text{все студенты данной группы с фамилией Иванов}\}$ оба являются одним и тем же пустым множеством $\emptyset$. Тем самым, в данном случае равенство множеств характеризуется не совпадением в них элементов, а фактом вообще их отсутствия.

В нашем курсе *наиболее часто* будут использоваться следующие множества:

- **N** - множество всех натуральных чисел $\{1, 2, 3, ...\}$;
- $\mathbf{N}_0$ - множество всех неотрицательных целых чисел $\{0, 1, 2, ...\}$;
- **Z** - множество всех целых чисел $\{0, \pm 1, \pm 2, ...\}$;
- **Q** - множество всех рациональных чисел;

- $\mathbf{R}$ - множество всех действительных чисел;
- отрезок вида $[a, b] = \{x : a \le x \le b\}$, где $a \in \mathbf{R}, b \in \mathbf{R}$;
- интервал вида $(a, b) = \{x : a < x < b\}$, где $a \in \mathbf{R}, b \in \mathbf{R}$;

Остальные варианты задания множества чисел или точек на числовой прямой будут приводиться по мере появления в них необходимости.

Важнейшим понятием в теории множеств является понятие **подмножества**: множество B называется подмножеством множества A, если каждый элемент множества B является элементом множества A. Этот факт записывается так: $B \subset A$. Считается, что для любого множества пустое множество является его подмножеством, так что включение $\emptyset \subset A$ верно всегда. Если непустое подмножество $B \ne A$, то включение B в A называют *строгим* и тогда B называют *собственным* подмножеством множества A. Иногда, чтобы подчеркнуть, что рассматриваемое подмножество B в результате проверки может оказаться совпадающим с самим множеством A, используют запись $B \subseteq A$ (видим аналогию с записями строгого и нестрогого неравенства). Свойство включенности является *транзитивным*. Это значит, что если $B \subset C$, а $C \subset A$, тогда $B \subset A$ (снова видим аналогию со свойством неравенства).

`Упражнение 1`. Найдите число всех возможных подмножеств множества с n элементами.

2. Операции с множествами. Для множеств можно ввести операции, дающие в результате новые множества.

Операция **объединения** двух множеств с обозначением $A \cup B$:

$$A \cup B \overset{def}{=} \{x : x \in A \text{ или } x \in B\}, \tag{1}$$

т.е. объединение двух множеств по определению состоит из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств.

Операция **пересечения** двух множеств с обозначением $A \cap B$:

$$A \cap B \overset{def}{=} \{x : x \in A \text{ и } x \in B\}, \tag{2}$$

т.е. пересечение двух множеств по определению состоит из всех элементов, принадлежащих одновременно обоим множествам. Если пересечение двух множеств пусто, т.е. $A \cap B = \subseteq$, тогда они называются *дизъюнктными*.

Отметим важное свойство: *объединение и пересечение двух подмножеств одного и того же множества X тоже являются его подмножествами* (обратите внимание, что для справедливости этого свойства для пересечений, в частности, нужно считать и пустое множество подмножеством любого множества).

Покажем, что для операций объединения и пересечения выполнены соответственно аналоги свойств сложения и умножения чисел:

Теорема 1. *Для операций объединения и пересечения выполнены следующие соотношения*:

$$A \cup B = B \cup A$$

(*коммутативность или перестановочность операции объединения, аналог* a+b=b+a);

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

(*ассоциативность или сочетательность операции объединения, аналог* (a+b)+c=a+(b+c));

$$A \cap B = B \cap A$$

(*коммутативность или перестановочность операции пересечения, аналог* $a \cdot b = b \cdot a$);

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

(*ассоциативность или сочетательность операции пересечения*);

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup A \cap C$$

(*дистрибутивность или распределительное свойство*

операций объединения и пересечения, аналог $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$)

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \tag{3}$$

(*аналога этому свойству в арифметике нет*)

В силу этих свойств операции объединения и пересечения можно распространить *индуктивно* на объединение и пересечение конечного числа множеств с обозначением

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 ... \cup A_n \text{ и} \tag{4}$$

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 ... \cap A_n. \tag{5}$$

Делается это следующим образом: например, для объединения, считаем, что объдинение уже определено для $n-1$ множеств, тогда по определению полагаем, что

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i \overset{def}{=} \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i \right) \cup A_n$$

и результат в силу свойств коммутативности и ассоциативности операции объединения будет один и тот же независимо от выбора порядка и группировки объединяемых множеств. Например, для случая трех множеств их объединение можно осуществить многими (найдите, сколькими?) способами:

$$A_1 \cup (A_2 \cup A_3), A_1 \cup (A_3 \cup A_2), (A_1 \cup A_2) \cup A_3, (A_1 \cup A_3) \cup A_2, A_2 \cup (A_1 \cup A_3, A_2 \cup (A_3 \cup A_1), \text{и т.д.}$$

и все эти способы объединения дадут одно и то же множество, которое мы обозначаем как $\bigcup_{i=1}^{3} A_i = A_1 \cup A_2 \cup A_3$.

Вообще операции объединения и пересечения можно определить по аналогичным правилам для любой системы множеств X_α, где значения индекса α соответствуют всем элементам некоторого данного множества A (например, если $A = \mathbf{N}$, то индекс α принимает все значения натуральных чисел 1,2,3,...; если A – отрезок $[0, 1]$, то считается, что индекс α пробегает все точки этого отрезка), с соответствующими обозначениями

$$\bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha \text{ и } \bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha, \tag{6}$$

только в случае бесконечного числа значений индекса α мы уже не сможем представить эти операции формулами вида (4) и (5).

Аналогом операции вычитания является операция разности двух множеств. Результат операции **разности** двух множеств с обозначением $A \setminus B$:

$$A \setminus B \overset{def}{=} \{x : x \in A \text{ и } x \notin B\}, \tag{7}$$

по определению состоит из элементов "уменьшаемого" множества, не принадлежащих "вычитаемому" множеству.

Ниже будем предполагать, что мы рассматриваем только множества, являющиеся подмножествами некоторого большого множества X. Тогда все три операции можно связать между собой некоторыми равенствами (вспомним, что в арифметике кроме сложения, умножения и вычитания есть еще правила работы со скобками, в которых участвуют все три операции). Сначала можно добавить операцию **дополнения** множества $A \subset X$ до множества X с обозначением $\mathbf{C}_X A = X \setminus A$. Тогда для всех трех операций выполнены следующие формулы, не имеющие прямых аналогов в арифметике чисел:

Теорема 2. *Для операций объединения, пересечения и разности имеют место следующие формулы Моргана:*

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$$
$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C),$$

которые в терминах дополнений до общего объемлющего множества $X = A$ *можно представить в виде*

$$\mathbf{C}_X(B \cup C) = (\mathbf{C}_X B) \cap \mathbf{C}_X C)$$
$$\mathbf{C}_X(B \cap C) = \mathbf{C}_X B \cup \mathbf{C}_X C).$$

Отметим полезное наблюдение: множества $A \subset X$ и его дополнение $\mathbf{C}_X A$ дизъюнктны.

Формулы Моргана верны и для любого количества множеств:

$$\mathbf{C}_X\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \bigcap_{i=1}^{n} (\mathbf{C}_X A_i)$$
$$\mathbf{C}_X\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \bigcup_{i=1}^{n} (\mathbf{C}_X A_i).$$

Они выражают **принцип двойственности** операций объединения и пересечения по отношению к операции дополнения и используются во многих разделах математики, в частности, в теории вероятностей.

Упражнение 2. Сформулируйте принцип двойственности, начав словами "Дополнение к объединению равно..."

Доказательства всех приведенных выше соотношений проводится одинаковым методом: доказывается, что любой элемент множества в левой части принадлежит множеству в правой части, и обратно, любой элемент множества в правой части принадлежит множеству в левой части, что и означает, что они состоят из одних и тех же элементов.

Для примера начнем доказывать равенство (3). Обозначим его левую часть как множество D. Берем произвольный элемент $x \in D$. По определению объединения, $x \in A$ или $x \in B \cap C$. Если элемент $x \in A$, тогда он принадлежит и $A \cup B$, и $A \cup C$, значит, принадлежит их пересечению. Если же $x \notin A$, тогда он принадлежит $B \cap C$, т.е. $x \in B$, и $x \in C$, значит, $x \in A \cup B$ и $x \in A \cup C$, и поэтому он принадлежит их пересечению. Точно такими же рассуждениями докажем, что всякий элемент множества в правой части принадлежит множеству в левой части. Проведите это рассуждение аккуратно, рассмотрев все возможности, и убедитесь также в эквивалентности представления формул Моргана в двух видах – через разности множеств и через их дополнения.

С множествами можно проводить еще другие операции. Существует **симметрическая разность** с обозначением $A\delta B$, определяемая следующим равенством

$$A \Delta B \stackrel{def}{=} (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Эта операция связана с операциями объединения и пересечения следующим соотношением

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Существует также операция **прямого** (или **декартового**) **произведения** двух множеств A и B с обозначением $A \times B$, определяемое следующим образом

$$A \times B \stackrel{def}{=} \{(x, y) : x \in A \text{ и } y \in B\}.$$

Мы видим, что элементы этого произведения состоят из *упорядоченных* пар элементов умножаемых множеств.

Пример 1. Если на плоскости введена декартова система прямоугольных координат и множества $A = [a, b]$ и $B = [c, d]$ заданы как соответствующие отрезки на осях Ox и Oy, то множество $A \times B$ можно толковать как множество точек на плоскости с координатами $(x, y), a \leq x \leq bf, c \leq y \leq d$, которые заполнят соответствующий прямоугольник.

Если же брать пары в виде (y, x), то получится произведение $B \times A$, которое равно $A \times B$ только в случае $A = B$. В этом случае прямое произведение толкуется как степень A^2 и далее можно определить по индукции любую степень A^n как $A^n \stackrel{def}{=} A^{n-1} \times A$, считая $A = A^1$. Можно доказать, что для любого $n = p + q$ верно равенство $A^n = A^{p+q} = A^p \times A^q$, и далее можно представить A^n в виде $A^n = A \times A ... \times A$ (n раз). Все эти построения будут полезны в линейной алгебре и в теории функций многих переменных.

Введенное понятие подмножеств полезно в задачах **классифмкации** объектов по их объединяющим признакам. Пусть пары элементов данного множества A наделены некоторым отношением (каким-то признаком), которое обозначим знаком $\mathcal{R}$ (читается "рукописное эр"), и при наличие для элементов $x \in A$ и $y \in A$ этого отношения будем писать $x\mathcal{R}y$. Наиболее интересно так называемое **отношение эквивалентности**, которое обозначается $\sim$ и удовлетворяет следующим трем условиям

$$\begin{gathered}
1) \text{ Для любого } x \in A \text{ имеем } x \sim x \text{ (рефлексивность отношения эквивалентости).} \\
2) \text{ Если } x \sim y, \text{ то } y \sim x \text{ (симметричность отношения эквивалентости).} \\
3) \text{ Если } x \sim y \text{ и } y \sim z, \text{то } x \sim z \text{ (транзитивность отношения эквивалентости).}
\end{gathered} \tag{8}$$

Пример 2. Рассмотрим множество $\mathbf{Z}$ целых чисел и в качестве отношения $\mathcal{R}$ между целыми числами x y возьмем требование, чтобы их разность была четным числом. Тогда легко проверить выполнение всех трех условий (8) и поэтому это отношение будет отношением эквивалентности и мы можем писать, что в этом случае $x \sim y$.

Применение отношения эквивалентности для классификации объектов или элементов множества основано на следующем наблюдении. Отнесем в один класс все эквивалентные между собой элементы множества, получится некоторое количество (конечное или бесконечное) **классов эквивалентности**. Эти классы между собой не пересекаются. Действительно, пусть есть два разных класса эквивалентности K_1 и K_2. Пусть у них есть некоторый общий элемент x_0. Тогда для любого элемента $x_1 \in K_1$ имеем $x_1 \sim x_0$. Аналогично, для любого элемента $x_2 \in K_2$ имеем $x_0 \sim x_2$. Следовательно, по свойству транзитивноси получаем, что $x_1 \sim x_2$, т.е. x_1 и x_2 должны быть в одном классе эквивалентности, что противоречит тому, что K_1 и K_2 – разные классы. Значит, K_1 и K_2 не пересеаются. Как итог получаем, что рассматриваемое множество A разобъется на не пересекающиеся между собой (т.е. дизъюнктные) подмножества, состоящие из классов эквивалентности.

`Упражнение 3.` Покажите, что каждый класс эквивалентности полностью определяется любым свои элементом.

Пример 3. В рассмотренном выше примере 2 множество целых чисел распадается на два класса: класс четных и класс нечетных чисел. Сколько будет классов эквивалентности, если мы объявим эквивалентными все числа, разность которых делится на 3?,на 4?, на n? Какие числа составят классы эквивалентности?

Завершим этот пункт следующим **замечанием**. Глубокий анализ понятия "множества" представляет собой сложнейшую задачу, решение которой требует введения новых его уточнений в виде дополнительных аксиом. В первую очередь это вызвано большой неопределенностью в том, что считать корректным заданием элементов множества. Например, если попытаться ввести понятие множества M всех множеств, то окажется, что для некоторых множеств невозможно проверить, входят они в M или нет.